Journal

für die

66181

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Unter Mitwirkung des Herrn

Weierstrass

herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 117.

In vier Heften.

Berlin,
S.W. Anhaltstrasse 12.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1897.

Inhaltsverzeichniss des Bandes 117.

Seite

Fischer, K. Ueber kanonische Systeme algebraischer Functionen einer Veränderlichen, die einem Gattungsbereich dritter oder vierter Ordnung angehören. . . . . 1— 23

Grünfeld, E. Ueber die Beschaffenheit der Differentialgleichungen der n Adjungirten, die zu einer linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung gehören. . . . . 273—290

Günther, P. Zur Theorie der adjungirten Differentialgleichung. 168

Hazzidakis, J. N. Biegung mit Erhaltung der Hauptkrümmungsradien. . 42— 56

Hensel, K. Ueber die Darstellung der Integrale erster Gattung durch ein Fundamentalsystem. . . . . 29— 41

— — Ueber die Reduction algebraischer Systeme auf die kanonische Form. . . . . 129—139

— — Ueber die Fundamentaltheiler algebraischer Gattungsbereiche. . . 333—345

— — Ueber die Elementartheiler zweier Gattungen, von denen die eine unter der anderen enthalten ist. . . . . 346—355

Horn, J. Ueber die Reihenentwickelung der Integrale eines Systems von Differentialgleichungen in der Umgebung gewisser singulärer Stellen. (Fortsetzung der Arbeit aus Band 116 S. 265—306.) . . . . . 104—128, 254—266

Jaerisch, P. Theorie der Reflexion und Brechung transversaler Kugelwellen mit Anwendung auf die Reflexion und Brechung des Lichtes. . . . . 291—332

Kneser, A. Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser linearer Differentialgleichungen bei grossen reellen Werthen des Arguments. (Zweiter Aufsatz.) . . . . . 72—103

Kowalewski, G. Ueber eine Art von simultaner Darstellung bestimmter Integrale. . . . . 267—272

Seite

Landsberg, G. Ueber das Fundamentalsystem und die Discriminante der Gattungen algebraischer Zahlen, welche aus Wurzelgrössen gebildet sind. 140—147

Mertens, F. Ueber Multiplication und Nichtverschwinden *Dirichlet*scher Reihen. . . . . 169—184

Netto, E. Zur Theorie der Resultanten. (Nachtrag zu der Abhandlung aus Bd. 116 S. 33—49.) . . . . . 57— 71

Schlesinger, L. Zur Theorie der *Euler*schen Transformirten einer homogenen linearen Differentialgleichung der *Fuchs*schen Klasse. . . . . 148—167

Schottky, F. Ueber die Werthschwankungen der harmonischen Functionen zweier reellen Veränderlichen und der Functionen eines complexen Arguments. . . . . 225—253

Schur, F. Ueber den *Pohlke*schen Satz. . . . . 24— 28

Thomé, L. W. Ueber eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen auf lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. . . . 185—224

Nachruf für *Karl Weierstrass*. 357

Druckfehler.

Seite 80 Zeile 11 u. 12 von unten lies G statt g.
- 352 - 8 von unten lies diese statt dasselbe.

Ueber kanonische Systeme algebraischer Functionen einer Veränderlichen, die einem Gattungsbereich dritter oder vierter Ordnung angehören.

(Von Herrn *Karl Fischer*.)

Einleitung.

Es sei y Wurzel einer irreduciblen Gleichung

$$(1.) \qquad y^n - f_1(x).y^{n-1} + f_2(x)y^{n-2} \cdots \pm f_n(x) = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen von x sind, und $\mathfrak{G}(x, y)$ der Bereich oder „Körper“ aller rationalen Functionen von x und y. Wie Herr *Hensel* in seiner Abhandlung: „Ueber einen neuen Fundamentalsatz in der Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen“*) gezeigt hat, lässt sich ein beliebiges System von n zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Grössen für jede Stelle $x = a$ auf eine gewisse „kanonische Form“ reduciren, und mit dieser Transformation eines Systems in seine kanonischen Formen ist unter anderem das Problem der Herleitung eines Fundamentalsystems für alle algebraisch ganzen Grössen in $\mathfrak{G}$ vollständig gelöst.

Die vorliegende Arbeit will zeigen, wie sich in algebraischen Körpern zweiten, dritten oder vierten Grades die Reduction der Basis $(1, y, \ldots, y^{n-1})$ auf ihre kanonischen Formen im Einzelnen gestaltet. Die Elemente der kanonischen Systeme werden sich dabei als rationale Functionen von y und $f_1, \ldots, f_n$ ergeben, ohne dass die Variable x noch explicite in ihnen auftritt. Ist z. B. $n = 2$, so ist das System $(1, y - \frac{1}{2}f_2)$ für *alle* Punkte im Endlichen kanonisch. Der Punkt $x = \infty$ soll überhaupt ausser Betracht bleiben. Im allgemeinen Körper *dritten* Grades giebt es *zwei*, in dem *vierten* Grades *fünf* Systeme rationaler Functionen von $(y, f_1, \ldots, f_n)$, von denen immer wenigstens eins für einen beliebigen Punkt $x = a$ eine kanonische Basis ist.

*) Journal für Mathematik, Bd. 115.

Herr *Hensel* geht in seiner oben genannten Abhandlung von folgendem Satze aus:

Componirt man ein System S, das aus n^2 Grössen eines beliebigen Rationalitätsbereiches besteht, mit irgendwelchen Systemen, deren Elemente *ganze* Grössen eines Bereiches sind, so ergiebt sich ein System S', dessen Elementartheiler Vielfache derer von S sind.

Es seien nun $Y^{(0)}, Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)}$ n Functionen in $\mathfrak{G}$, ferner $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ die conjugirten Werthe oder Zweige von y und $Y_0^{(i)}, Y_1^{(i)}, \ldots, Y_{n-1}^{(i)}$ diejenigen von $Y^{(i)}$. Die Determinante $|Y_k^{(i)}|$ $(i, k = 0, 1, \ldots, n-1)$ möge nicht identisch verschwinden, und $(x-a)^{\delta_i}$ sei die höchste Potenz von $x-a$, die in allen aus $(Y_k^{(i)})$ zu bildenden Determinanten $(i+1)$-ter Ordnung enthalten ist. Setzt man alsdann:

$$\delta_i - \delta_{i-1} = \varepsilon_i, \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1;\ \varepsilon_0 = \delta_0)$$

so sind die Potenzen $(x-a)^{\varepsilon_0}, (x-a)^{\varepsilon_1}, \ldots, (x-a)^{\varepsilon_{n-1}}$ die sogenannten Elementartheiler des Systems $(Y_k^{(i)})$ für den Punkt $x = a$, und zwar einem bekannten Satze nach in derjenigen Anordnung, dass

$$\varepsilon_0 \leqq \varepsilon_1, \quad \ldots, \quad \leqq \varepsilon_{n-1}$$

ist.

Die conjugirten Werthe von $Y^{(i)}$ mögen sämmtlich durch $(x-a)^{e_i}$, nicht aber durch eine höhere Potenz von $x-a$ theilbar sein; das System $(Y_k^{(i)})$ kann alsdann in das Diagonalsystem $((x-a)^{e_i})$ und das System der n^2 mod. $(x-a)$ *ganzen* algebraischen Grössen $((x-a)^{-e_i} . Y_k^{(i)})$ decomponirt werden. Die Elementartheiler $(x-a)^{\varepsilon_i}$ müssen mithin Vielfache derer des Diagonalsystems $((x-a)^{e_i})$ sein. Letztere sind aber bekanntlich die Elemente $(x-a)^{e_i}$ selbst. Nimmt man nun an, die Bezeichnung der Functionen $Y^{(i)}$ sei in der Weise festgesetzt, dass $e_0 \leqq e_1 \ldots \leqq e_{n-1}$ ist, so muss nothwendig $e_0 \leqq \varepsilon_0$, $e_1 \leqq \varepsilon_1$, $\ldots$, $e_{n-1} \leqq \varepsilon_{n-1}$ sein. Für den Fall, dass

$$\varepsilon_0 = e_0, \quad \varepsilon_1 = e_1, \quad \ldots, \quad \varepsilon_{n-1} = e_{n-1}$$

ist, nennt Herr *Hensel* das System $(Y^{(i)})$ „für den Punkt $x = a$ kanonisch." Das System $((x-a)^{-\varepsilon_i} Y_k^{(i)})$ ist dann mod. $(x-a)$ ein „Einheitssystem"; seine Elemente sind im Punkte $x = a$ sämmtlich endlich, und seine Determinante ist dabei in $x = a$ von Null verschieden.

Es sei $(\overline{Y}^{(0)}, \ldots, \overline{Y}^{(n-1)})$ ein zweites System von n Functionen in $\mathfrak{G}$,

dessen Determinante $|\bar{Y}_k^{(i)}|$ nicht identisch verschwindet. Zwischen $(Y^{(i)})$ und $(\bar{Y}^{(i)})$ bestehen dann lineare homogene Gleichungen:

$$\bar{Y}_k^{(i)} = \sum_{h=0}^{h=n-1} u_h^{(i)} Y_k^{(h)}, \quad Y_k^{(i)} = \sum_{h=0}^{h=n-1} \bar{u}_h^{(i)} \bar{Y}_k^{(h)}, \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

in denen die Coefficienten $u_h^{(i)}$ und $\bar{u}_h^{(i)}$ rationale Functionen von x sind. Wenn nun sowohl die Functionen $u_h^{(i)}$, wie die Functionen $\bar{u}_h^{(i)}$ im Punkte $x = a$ sämmtlich endlich sind, sollen die Systeme $(Y^{(i)})$ und $(\bar{Y}^{(i)})$ als „mod.$(x-a)$ äquivalent" angesehen werden. Die Coefficienten-Systeme $(u_h^{(i)})$ und $(\bar{u}_h^{(i)})$ sind reciprok; die nothwendige und hinreichende Bedingung für die betrachtete Aequivalenz reducirt sich also darauf, dass in *einem* der Systeme $(u_h^{(i)})$ und $(\bar{u}_h^{(i)})$ alle Elemente mod. $(x-a)$ ganz sind und ihre Determinante mod. $(x-a)$ von Null verschieden ist.

Das System $(\bar{Y}_k^{(i)})$ ist aus $(u_h^{(i)})$ und $(Y_k^{(h)})$, das System $(Y_k^{(i)})$ aus $(\bar{u}_h^{(i)})$ und $(\bar{Y}_k^{(h)})$ componirt. Wenn also die Componenten $(u_h^{(i)})$ und $(\bar{u}_h^{(i)})$ beide aus mod. $(x-a)$ ganzen Elementen bestehen, so müssen sowohl die Elementartheiler des Systems $\bar{Y}_k^{(i)}$ für den Punkt $x = a$ Vielfache derer von $(Y_k^{(i)})$ sein, wie auch umgekehrt letztere Vielfache derer von $\bar{Y}_k^{(i)}$. Alle mod. $(x-a)$ äquivalenten Systeme $(Y^{(i)})$ besitzen also in Bezug auf den Factor $x-a$ die gleichen Elementartheiler.

Herr *Hensel* hat nun gezeigt, dass für beliebiges $x-a$ jedes System in ein äquivalentes transformirt werden kann, welches für die Stelle $x = a$ kanonisch ist. In der darauf folgenden Herleitung des „neuen Fundamentalsatzes in der Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen" ist dieser Satz dann das wesentlichste Beweisglied.

Ist ein System $(Y^{(i)})$ mod. $(x-a)$ auf eine kanonische Form reducirt, so sind die conjugirten Werthe von $Y^{(i)}$ sämmtlich durch den Elementartheiler $(x-a)^{\varepsilon_i}$ theilbar, durch eine höhere Potenz von $x-a$ aber nicht. Die Grössen $Y_0^{(i)}, \ldots, Y_{n-1}^{(i)}$ sind aber die Wurzeln einer Gleichung vom $n$ten Grade, deren Coefficienten rationale Functionen von x sind. Bezeichnet man diese mit $1, C_1, C_2, \ldots, C_n$, so ist der grösste gemeinsame Theiler aller Wurzeln $Y_k^{(i)}$ mit dem der n Grössen

$$C_1, \quad C_2^{\frac{1}{2}}, \quad \ldots, \quad C_n^{\frac{1}{n}}$$

identisch; die Exponenten ε_i sind also rationale Zahlen, deren Nenner nicht grösser als n ist.

Man denke sich jetzt für eine bestimmte Stelle $x = a$ die Elementartheiler aller Systeme $(Y_k^{(i)})$ gebildet, deren Determinante nicht identisch verschwindet. Reducirt man dann $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ auf ihre positiven echt gebrochenen Reste, so ist nach Herrn *Hensel*s Fundamentalsatz das entstehende Restsystem — abgesehen von der Reihenfolge der einzelnen Brüche — für jede Basis $Y^{(i)}$ das gleiche. Für den Fall, dass $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ selbst schon sämmtlich dem Intervall $0 \leqq \varepsilon < 1$ angehören, und auch nur unter dieser Bedingung ist $(Y^{(i)})$ ein sogenanntes „Fundamentalsystem" für alle an der Stelle $x = a$ endlichen Grössen in $\mathfrak{G}$. Man versteht darunter bekanntlich ein System von folgender Eigenschaft: Es seien, was auch für alle späteren Stellen gelten soll, $u_0, u_1, \ldots$ beliebige rationale Functionen von x; alsdann umfasst die Form

$$Y = u_0 Y^{(0)} + u_1 Y^{(1)} + \cdots + u_{n-1} Y^{(n-1)},$$

wenn $|Y_k^{(i)}|$ nicht identisch gleich Null ist, sämmtliche Grössen in $\mathfrak{G}$. Ist nun $(Y^{(i)})$ ein Fundamentalsystem mod. $(x-a)$, so ist Y dann und nur dann im Punkte $x = a$ endlich, wenn auch alle Coefficienten $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ dort endlich bleiben.

Um ein Fundamentalsystem für den Punkt $x = a$ zu erhalten, braucht man nur eine beliebige Basis in eine mod. $(x-a)$ kanonische zu transformiren und dann jedes Element $Y^{(i)}$ durch die höchste Potenz von $x-a$ zu dividiren, die in seinen sämmtlichen conjugirten Werthen enthalten ist und einen *ganzzahligen* Exponenten besitzt. Das neue System gehört dann wiederum dem Bereiche $\mathfrak{G}$ an und ist ebenfalls für den Punkt $x = a$ kanonisch; die Exponenten *seiner* Elementartheiler sind aber positive echte Brüche.

Für alle Punkte, wo $|Y_k^{(i)}|$ nicht verschwindet, ist ein System ganzer Elemente $(Y^{(i)})$ von vornherein ein Fundamentalsystem. Ist $(Y^{(i)})$ ein solches für *alle* Stellen im Endlichen, so sind in der Reihe der Grössen

$$u_0 Y^{(0)} + u_1 Y^{(1)} + \cdots + u_{n-1} Y^{(n-1)}$$

alle diejenigen, aber auch nur alle diejenigen für jeden endlichen Werth von x endlich, also ganze algebraische Functionen von x, bei denen $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ *ganze* rationale Functionen sind. Die *Existenz* derartiger Fundamentalsysteme hat *Kronecker* in seiner Abhandlung: „Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variablen"*) folgendermaassen bewiesen:

*) Journal für Mathematik, Bd. 91.

Sämmtliche Grössen in $\mathfrak{G}$ besitzen die Form:

$$w = u_{n-1}y^{n-1} + u_{n-2}y^{n-2} + \cdots + u_0.$$

Es sei jetzt vorausgesetzt — und diese Annahme will ich bis zum Schluss dieser Arbeit beibehalten — dass y eine algebraisch *ganze* Function von x, dass also jeder der Coefficienten $f_1, \ldots, f_n$ in (1.) eine *ganze* rationale Function dieser Variablen ist. Wenn dann w ebenfalls eine algebraisch *ganze* Function von x ist, können die Coefficienten u nur solche Nenner besitzen, die in der Discriminante D der Gleichung (1.) als Theiler enthalten sind. Unter allen algebraisch ganzen Functionen w, die in Bezug auf y vom Grade i ($i \leqq n-1$) sind, muss sich also eine:

$$\bar{\zeta}^{(i)} = \bar{u}_i^{(i)} y^i + \bar{u}_{i-1}^{(i)} y^{i-1} + \cdots + \bar{u}_0^{(i)}$$

befinden, in welcher der Nenner des in seine reducirte Form gesetzten ersten Coefficienten

$$\bar{u}_i^{(i)} = \frac{M_i(x)}{N_i(x)}$$

eine ganze rationale Function möglichst hohen Grades von x ist, und n derartige Functionen ($\bar{\zeta}^{(0)} = 1, \bar{\zeta}^{(1)}, \ldots, \bar{\zeta}^{(n-1)}$) bilden dann ein Fundamentalsystem für alle Punkte, in denen keiner der Zähler $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ zu Null wird. Durch eine leichte Transformation lässt sich erreichen, dass an die Stelle von $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ die Constante Eins tritt, und die so zu erhaltenden algebraisch ganzen Functionen von x:

$$\zeta^{(i)} = \frac{1}{N_i} y^i + u_{i-1}^{(i)} y^{i-1} + \cdots + u_0^{(i)} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1;\ \zeta^{(0)} = 1)$$

sind dann ein „absolutes Fundamentalsystem" für alle Punkte im Endlichen.

Von den Nennern $N_{n-1}, N_{n-2}, \ldots, N_0 = 1$ weist *Kronecker* nach, dass jeder von ihnen durch alle folgenden theilbar ist. Stellt man nämlich die Grösse $y\zeta^{(i-1)}$ ($i \leqq n-2$) linear und homogen durch das Fundamentalsystem ($\zeta^{(h)}$) dar, so erhält man einen Ausdruck von der Form:

$$(2.) \qquad y\zeta^{(i-1)} = \frac{N_i}{N_{i-1}} \zeta^{(i)} + u_{i-1}\zeta^{(i-1)} + \cdots + u_0\zeta^{(0)};$$

da $y\zeta^{(i-1)}$ zu den algebraisch ganzen Functionen von x gehört, muss jeder Coefficient hierbei eine *ganze* rationale Function von x, also N_i ein Vielfaches von N_{i-1} sein.

Aus (2.) folgt ausserdem noch, dass N_i nicht nur der Nenner des *ersten* Coefficienten in

$$\zeta^{(i)} = \frac{1}{N_i} y^i + u_{i-1}^{(i)} y^{i-1} + \cdots + u_0^{(i)}$$

ist, sondern auch der kleinste gemeinsame Nenner *aller* Coefficienten. Es ist nämlich:

$$(3.) \qquad N_i \zeta^{(i)} = N_{i-1}[y\zeta^{(i-1)} - u_{i-1}\zeta^{(i-1)} - \cdots - u_0\zeta^{(0)}].$$

Es sei nun bereits bekannt, dass $N_0, N_1, \ldots, N_{i-1}$ die Generalnenner der Coefficienten bezw. von $\zeta^{(0)}, \zeta^{(1)}, \ldots, \zeta^{(i-1)}$ sind; dann besitzen $N_0\zeta^{(0)}$, $N_1\zeta^{(1)}, \ldots, N_{i-1}\zeta^{(i-1)}$ als lineare homogene Functionen von $1, y, \ldots, y^{i-1}$ *ganze* rationale Functionen von x zu Coefficienten, und bei $N_{i-1}\zeta^{(0)}, \ldots, N_{i-1}\zeta^{(i-1)}$ ist dies folglich auch der Fall. Nach (3.) müssen mithin auch die Coefficienten von $\zeta^{(i)}$ durch Multiplication mit N_i zu ganzen Functionen werden.

Was die Frage betrifft, wie man ein Fundamentalsystem *herleiten* kann, so hat *Kronecker* in seinen „Grundzügen einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen“ nachgewiesen, dass diese Aufgabe — auch für algebraische Functionen beliebig vieler Veränderlichen — auf die Auflösung linearer Gleichungen zurückführbar ist, die er aber nur charakterisirt, ohne sie anzugeben. Für algebraische Functionen einer Veränderlichen hat dann Herr *Hensel* die zur Ermittelung eines Fundamentalsystems nothwendigen und hinreichenden Gleichungen wirklich aufgestellt; *eine* Form derselben findet man unter dem Titel: „Ueber die Darstellung der ganzen algebraischen Functionen einer Variablen durch ein Fundamentalsystem“ in Bd. 111 des Journals für Mathematik, eine zweite, noch einfachere, in der Abhandlung: „Théorie des fonctions algébriques d'une variable“, Acta math. Bd. 18. Die Coefficienten der aufzulösenden Gleichungen sind dabei rationale Functionen von x, und wenn man nur *eine* bestimmte Stelle $x = a$ betrachten will, so findet man für diese das Fundamentalsystem auch gleich in seiner kanonischen Form, während *Kronecker* die Wurzelgrössen, die in den einzelnen Elementen eines Fundamentalsystems noch enthalten sein können, ganz ausser Betracht lässt.

Wenn die Discriminante D der Gleichung (1.) im Punkte $x = a$ von Null verschieden ist, so bilden bereits $1, y, \ldots, y^{n-1}$ ein kanonisches, wie auch ein Fundamentalsystem mod. $(x-a)$. Nur eine endliche Anzahl relativer Fundamentalsysteme ist also aufzustellen. Herr *Hensel* verfährt in der Weise, dass er aus einem Fundamentalsystem für ϱ Nullstellen von D

ein solches für $\varrho+1$ und schliesslich ein absolutes Fundamentalsystem herleitet. Man kann aber auch erst zu jeder Nullstelle von D ein besonderes Fundamentalsystem aufsuchen und diese dann auf folgende Art zu einem Fundamentalsystem für alle Stellen im Endlichen zusammensetzen:

Es seien $x-a_\varrho$ $(\varrho = 0, 1, \ldots, z)$ die verschiedenen Linearfactoren von D und $\zeta^{(\varrho,0)}$, $\zeta^{(\varrho,1)}$, $\ldots$, $\zeta^{(\varrho,n-1)}$ die Elemente eines Fundamentalsystems mod.$(x-a_\varrho)$. Durch eine bekannte Transformation lässt sich bewirken, dass $\zeta^{(\varrho,i)}$ in Bezug auf y eine Function vom Grade i, also ein Ausdruck von der Form

$$\zeta^{(\varrho,i)} = u_i^{(\varrho,i)} y^i + u_{i-1}^{(\varrho,i)} y^{i-1} + \cdots + u_0^{(\varrho,i)} \qquad (i=0,1,\ldots,n-1)$$

wird. Nach dem, was oben über absolute Fundamentalsysteme gesagt wurde, bilden n Grössen $\zeta^{(\varrho,0)}$, $\zeta^{(\varrho,1)}$, $\ldots$, $\zeta^{(\varrho,n-1)}$ von der angegebenen Form ein Fundamentalsystem mod.$(x-a_\varrho)$ dann und nur dann, wenn sie im Punkte $x=a_\varrho$ ***selbst*** endlich bleiben, während ihre ersten Coefficienten $u_i^{(\varrho,i)}$ dort von möglichst hoher Ordnung unendlich werden. Ich kann also annehmen, dass die Coefficienten von $\zeta^{(\varrho,i)}$ an keiner Stelle unendlich werden, die von $x=a_\varrho$ verschieden ist und im Endlichen liegt; denn man braucht ja, um dies zu erreichen, aus dem gemeinsamen Nenner der Coefficienten von $\zeta^{(\varrho,i)}$ nur alle Factoren fortzulassen, die von $x-a_\varrho$ verschieden, also mod.$(x-a_\varrho)$ blosse Einheiten sind. Werden die Coefficienten von $\zeta^{(\varrho,i)}$ auch bei $x=a_\varrho$ nicht unendlich, so kann man $\zeta^{(\varrho,i)}$ durch y^i ersetzen, und falls sich in *jedem* der Systeme $\zeta^{(\varrho,0)}$, $\zeta^{(\varrho,1)}$, $\ldots$, $\zeta^{(\varrho,n-1)}$ das Element $i$ten Grades auf y^i reduciren lässt, kann man die Grössen $(1, y, \ldots, y^i)$ als die ersten $i+1$ Elemente des zu ermittelnden absoluten Fundamentalsystems $\zeta^{(0)}$, $\zeta^{(1)}$, $\ldots$, $\zeta^{(n-1)}$ ansehen.

Anderenfalls seien $\zeta^{(0,i)}$, $\zeta^{(1,i)}$, $\ldots$, $\zeta^{(t,i)}$ diejenigen Elemente vom $i$ten Grade, die gebrochene Coefficienten behalten haben; dann bilde man aus diesen zunächst den Ausdruck

$$\zeta^{(i)} = \zeta^{(0,i)} + \zeta^{(1,i)} + \cdots + \zeta^{(t,i)}.$$

Derselbe stellt eine algebraisch ganze Function von x dar, die in Bezug auf y wiederum vom Grade i ist; in ihr ist aber der Coefficient von y^i in *jedem* der Punkte $x=a_0, a_1, \ldots, a_t$ von möglichst hoher Ordnung unendlich. So bleiben z. B. im Punkte $x=a_0$ die Coefficienten der Elemente $\zeta^{(1,i)}$, $\zeta^{(2,i)}$, $\ldots$, $\zeta^{(t,i)}$ sämmtlich endlich; diejenigen von $\zeta^{(i)}$ müssen also dort von gleich hoher Ordnung unendlich werden, wie die von $\zeta^{(0,i)}$; ist

also $(\zeta^{(0,i)})$ ein Fundamentalsystem für den Punkt $x = a_0$, so ist $(\zeta^{(i)})$ ebenfalls eins. Macht man nun noch in jedem der Elemente $\zeta^{(i)}$ den Zähler des Coefficienten der höchsten Potenz von y zu Eins, so erhält man ein Fundamentalsystem für alle Stellen im Endlichen.

Die Aufgabe, ein Fundamentalsystem ganzer Grössen in $\mathfrak{G}$ anzugeben, ist somit auf die umfassendere zurückgeführt, die Basis $(1, y, \ldots, y^{n-1})$ in ihre kanonischen Typen zu transformiren. Ich werde den Factor, in Bezug auf den das neue System kanonisch sein soll, von nun an mit x bezeichnen. x^{δ_i} sei die höchste Potenz von x, die in allen aus (y_k^h) zu bildenden Determinanten $(i+1)$-ter Ordnung enthalten ist, und $\delta_i - \delta_{i-1}$ gleich ε_i. Hierbei ist $\delta_0 = \varepsilon_0 = 0$, mithin $\varepsilon_1 = \delta_1$. Auch den kanonischen Systemen lässt sich die Form geben, dass ihre Elemente, die ich $\mathfrak{v}^{(0)}$, $\mathfrak{v}^{(1)}$, $\mathfrak{v}^{(n-1)}$ nennen will, in Bezug auf y bezw. den Grad $0, 1, \ldots, n-1$ besitzen, dass also

$$\mathfrak{v}^{(i)} = y^i + u_{i-1}^{(i)} y^{i-1} + \cdots + u_0^{(i)}$$

ist, und zwar ist ein System von diesem Typus dann und nur dann mod. x dem System $(1, y, \ldots, y^{n-1})$ äquivalent und gleichzeitig kanonisch, wenn sämmtliche Coefficienten im Punkte $x = 0$ endlich und die conjugirten Werthe von $\mathfrak{v}^{(i)}$ sämmtlich durch x^{ε_i} theilbar sind. Ich erwähnte bereits, dass die Coefficienten rationale Functionen von $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sein werden.

§ 1.

Zwei specielle Fälle von kanonischen Systemen in Gattungsbereichen $n$ter Ordnung.

Ich stütze mich bei den nächsten Ausführungen auf einen Satz aus der Theorie der Determinanten, den ich, so elementar und bekannt er auch ist, doch zuvor nochmals angeben möchte.

Aus zwei quadratischen Systemen beliebiger Grössen

$$a_\beta^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} a_0^{(0)}, & \ldots, & a_{n-1}^{(0)} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ a_0^{(n-1)}, & \ldots, & a_{n-1}^{(n-1)} \end{pmatrix} \text{ und } b_\beta^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} b_0^{(0)}, & \ldots, & b_{n-1}^{(0)} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ b_0^{(n-1)}, & \ldots, & b_{n-1}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

sei das dritte gebildet:

$$c_\beta^{(\alpha)} = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} a_\mu^{(\alpha)} b_\mu^{(\beta)}. \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n-1)$$

Ich denke mir also die Systeme (a) und (b) in der Art componirt, dass Zeile mit Zeile verbunden ist. Ferner mögen

$$\left| a_{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}}^{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_i - 1} \right|, \quad \left| b_{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}}^{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_i - 1} \right|, \quad \left| c_{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}}^{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_i - 1} \right|$$

diejenigen Determinanten aus den angegebenen Systemen bedeuten, in denen die Horizontalen die oberen Indices $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}$, die Verticalen die unteren Indices $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}$ haben. Alsdann bestehen die Identitäten:

$$\left| c_{\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{i-1}}^{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}} \right| = \sum_{(\mu)} \left| a_{\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_{i-1}}^{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}} \right| \cdot \left| b_{\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_{i-1}}^{\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{i-1}} \right|.$$

Die Summation erstreckt sich hierbei, während $\alpha_0, \ldots, \alpha_{i-1}, \beta_0, \ldots, \beta_{i-1}$ feste Werthe besitzen, auf alle Combinationen $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{i-1}$ innerhalb $0, 1, \ldots, n-1$. Es werde jetzt $a_\beta^{(\alpha)} = b_\beta^{(\alpha)} = y_\beta^\alpha$, mithin $c_\beta^{(\alpha)} = y_0^{\alpha+\beta} + y_1^{\alpha+\beta} + \cdots + y_{n-1}^{\alpha+\beta} = s_{\alpha+\beta}$ gesetzt; an die Stelle der Systeme (a) und (b) trete also

$$(y_0^\alpha, \; y_1^\alpha, \; \ldots, \; y_{n-1}^\alpha), \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n-1)$$

an die Stelle von (c) das „einreihige" System der Potenzsummen

$$\begin{pmatrix} s_0, & s_1, & \ldots, & s_{n-1} \\ s_1, & s_2, & \ldots, & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1}, & s_n, & \ldots, & s_{2n-2} \end{pmatrix},$$

und an die Stelle von $\left| c_{\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{i-1}}^{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}} \right|$ mithin diejenige Determinante $\left| s_{\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{i-1}}^{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}} \right|$, in welcher die Elemente der ersten Horizontalen die Indices $\alpha_0+\beta_0$, $\alpha_0+\beta_1, \ldots, \alpha_0+\beta_{i-1}$, die der zweiten die Indices $\alpha_1+\beta_0, \alpha_1+\beta_1, \ldots, \alpha_1+\beta_{i-1}$ tragen u. s. f. Die obige Gleichung geht hierdurch in folgende über:

$$(1.) \qquad \left| s_{\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{i-1}}^{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}} \right| = \sum_{(\mu)} \left| y_{\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_{i-1}}^{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}} \right| \cdot \left| y_{\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_{i-1}}^{\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{i-1}} \right|.$$

Sämmtliche Determinanten $i$ter Ordnung aus dem System $(s_{\alpha+\beta})$ sind also indentisch durch $x^{2\delta_{i-1}}$ theilbar. Ich will nun die Hauptdeterminanten

$$D_0 = s_0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} s_0, & s_1 \\ s_1, & s_2 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2 \\ s_1, & s_2, & s_3 \\ s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad D_h = \left| s_{0,1,\ldots,h}^{0,1,\ldots,h} \right|$$

„mod. x regulär" nennen, wenn D_h auch nur durch $x^{2\delta_h}$ und keine höhere Potenz von x theilbar ist, und ich gebe jetzt ein Verfahren an, nach welchem sich ausser $\mathfrak{v}^{(0)} = 1$ noch so viele Elemente des kanonischen Systems bestimmen lassen, wie unter den Hauptdeterminanten $D_0, D_1, \ldots, D_{n-2}$ reguläre sind. Die nächste Hauptdeterminante:

$$D_{n-1} = D = \left| s_{0,1,\ldots,n-1}^{0,1,\ldots,n-1} \right| = \left| y_{0,1,\ldots,n-1}^{0,1,\ldots,n-1} \right|^2$$

ist die Discriminante der Gleichung für y; sie ist stets regulär, kommt aber für die ins Auge gefasste Herleitung kanonischer Elemente nicht mit in Betracht.

Es giebt nämlich $n-1$ Grössen

$$w^{(i)} = u_i^{(i)} y^i + u_{i-1}^{(i)} y^{i-1} + \cdots + u_0^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

von der Eigenschaft, dass jeder der conjugirten Werthe von $w^{(i)}$ durch $x^{\delta_i + \delta_{i-1}}$ theilbar und der Coefficient von y^i in $w^{(i)}$ gleich D_{i-1}, jeder folgende aber ebenfalls eine Determinante $i$ter Ordnung aus $(s_{\alpha+\beta})$ ist. Bildet man dann den Quotienten

$$v^{(i)} = \frac{w^{(i)}}{D_{i-1}},$$

so ist dieser, wenn D_{i-1} regulär ist, ein kanonisches Element; denn er ist noch durch $x^{\delta_i - \delta_{i-1}} = x^{\varepsilon_i}$ theilbar und beginnt dabei mit dem Gliede y^i, dessen Coefficient zu Eins gemacht ist, während jeder folgende Coefficient eine bei $x = 0$ endliche rationale Function von $s_1, s_2, \ldots, s_n$ und mithin auch von x ist.

Um eine algebraische Form $w^{(i)}$ von der geforderten Beschaffenheit zu erhalten, bilde man für ihre conjugirten Werthe die Ausdrücke:

$$(2.) \quad \begin{cases} w_k^{(i)} = (-1)^i \sum\limits_{(\mu)} \left| y_{k,\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_{i-1}}^{0,1,2,\ldots,i} \right| \cdot \left| y_{\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_{i-1}}^{0,1,\ldots,i-1} \right| \\ \\ = (-1)^i \sum\limits_{(\mu)} \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ y_k, & y_{\mu_0}, & y_{\mu_1}, & \ldots, & y_{\mu_{i-1}} \\ y_k^2, & y_{\mu_0}^2, & y_{\mu_1}^2, & \ldots, & y_{\mu_{i-1}}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_k^{i-1}, & y_{\mu_0}^{i-1}, & y_{\mu_1}^{i-1}, & \ldots, & y_{\mu_{i-1}}^{i-1} \\ y_k^i, & y_{\mu_0}^i, & y_{\mu_1}^i, & \ldots, & y_{\mu_{i-1}}^i \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ y_{\mu_0}, & y_{\mu_1}, & \ldots, & y_{\mu_{i-1}} \\ y_{\mu_0}^2, & y_{\mu_1}^2, & \ldots, & y_{\mu_{i-1}}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{\mu_0}^{i-1}, & y_{\mu_1}^{i-1}, & \ldots, & y_{\mu_{i-1}}^{i-1} \end{vmatrix} . \end{cases}$$

Hierbei sollen, während k einen festen Werth hat, die Indices $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{i-1}$ alle Combinationen der Zahlen $0, 1, \ldots, n-1$ zur $i$ten Klasse durchlaufen; die Glieder, in denen eine der Zahlen μ gleich k ist, verschwinden identisch; ich denke mir jedoch die Summation, was für das Folgende wesentlich ist, auch auf sie erstreckt.

Durch $x^{\delta_i + \delta_{i-1}}$ ist $w_k^{(i)}$ theilbar, weil jedes einzelne Glied es ist.

Die Grössen $w_k^{(i)}$ sind also nur noch in die Form

$$w_k^{(i)} = u_i^{(i)} y_k^i + u_{i-1}^{(i)} y_k^{i-1} + \cdots + u_0^{(i)}$$

zu setzen, wo die Coefficienten $u_i^{(i)}, \ldots, u_0^{(i)}$ rationale, und zwar bei jeder der n Grössen $w_0^{(i)}, \ldots, w_{n-1}^{(i)}$ dieselben rationalen Functionen von $s_1, s_2, \ldots, s_n$ und mithin auch von x sind. Daraus geht dann von selbst hervor, dass die Grössen $w_0^{(i)}, \ldots, w_{n-1}^{(i)}$ einander conjugirt sind, was übrigens an ihrer ursprünglichen Form ja ebenfalls ersichtlich ist.

Man entwickele zu dem angegebenen Zwecke die Determinanten, die den ersten Factor der einzelnen Glieder von $w_k^{(i)}$ bilden, nach den Elementen in ihrer ersten, bei allen Gliedern wiederkehrenden Spalte: $1, y_k, y_k^2, \ldots, y_k^i$. Fasst man dann zunächst alle mit dem letzten Element y_k^i multiplicirten Grössen zusammen, so erhält man den Ausdruck:

$$\sum_{(\mu)} \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ y_{\mu_0}, & y_{\mu_1}, & \ldots, & y_{\mu_{i-1}} \\ y_{\mu_0}^2, & y_{\mu_1}^2, & \ldots, & y_{\mu_{i-1}}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{\mu_0}^{i-1}, & y_{\mu_1}^{i-1}, & \ldots, & y_{\mu_{i-1}}^{i-1} \end{vmatrix}^2 = \sum_{(\mu)} \left| y^{0,\ 1,\ \ldots, i-1}_{\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_{i-1}} \right|^2,$$

der nach (1.) mit der Hauptdeterminante $D_{i-1} = \left| s^{0,1,\ldots,i-1}_{0,1,\ldots,i-1} \right|$ identisch ist. In ähnlicher Weise ergiebt sich allgemein der Coefficient von y_k^h $(h \leqq i)$ in Form der folgenden symmetrischen Function aller Wurzeln:

$$(-1)^{i-h} \sum_{(\mu)} \left| y^{0,\ 1,\ \ldots,h-1,h+1,\ldots,i}_{\mu_0,\mu_1,\ldots\qquad\qquad\mu_{i-1}} \right| . \left| y^{0,\ 1,\ \ldots,i-1}_{\mu_0,\mu_1,\ldots\mu_{i-1}} \right| = (-1)^{i-h} . \left| s^{0,1,\ldots,\qquad i-1}_{0,1,\ldots,h-1,h+1,\ldots,i} \right| .$$

Der Coefficient von y^h in $w^{(i)}$ (womit ich jetzt wieder die Grössen $w_0^{(i)}, \ldots, w_{n-1}^{(i)}$ promiscue bezeichne) stimmt also, und zwar auch dem Vorzeichen nach, mit derjenigen Determinante überein, die in

$$D_i = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & \ldots, & s_i \\ s_1, & s_2, & \ldots, & s_{i+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{i-1}, & s_i, & \ldots, & s_{2i-1} \\ s_i, & s_{i+1}, & \ldots, & s_{2i} \end{vmatrix}$$

dem in der letzten Horizontalen stehenden Element s_{i+h} adjungirt ist; ich will dieselbe in dieser Eigenschaft mit $adj s_{i+h}$ bezeichnen und daran die folgende beiläufige Bemerkung knüpfen: Bildet man, ausgehend von

$$w^{(i)} = adj s_i + y\, adj s_{i+1} + y^2 adj s_{i+2} + \cdots + y^i adj s_{2i}$$

die Spur, d. h. die Summe der conjugirten Werthe von $y^h . w^{(i)}$, so erhält

man dieselbe in Form der Determinante:

$$s_h adj s_i + s_{h+1} adj s_{i+1} + s_{h+2} adj s_{i+2} + \cdots + s_{h+i} adj s_{2i} = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & \cdots, & s_i \\ s_1, & s_2, & \cdots, & s_{i+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{i-1}, & s_i, & \cdots, & s_{2i-1} \\ s_h, & s_{h+1}, & \cdots, & s_{h+i} \end{vmatrix}.$$

Die Spur von $w^{(i)}$, $yw^{(i)}$, ..., $y^{i-1}w^{(i)}$ ist also gleich Null, diejenige von $y^i w^{(i)}$ aber gleich D_i, und die Coefficienten von $w^{(i)}$ sind auch durch diese $(i+1)$ linearen Gleichungen eindeutig bestimmt.

Falls die Hauptdeterminante D_{i-1} (mod. x) regulär, d. h. nur durch $x^{2\delta_{i-1}}$ theilbar ist, kann also, wie nunmehr gezeigt ist, in dem System $(1, \mathfrak{v}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{v}^{(n-1)})$, das (mod. x) der Basis $(1, y, \ldots, y^{n-1})$ äquivalent und zugleich kanonisch sein soll, das Element $\mathfrak{v}^{(i)}$ gleich dem Quotienten

$$v^{(i)} = \frac{w^{(i)}}{D_{i-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

gesetzt werden, und wenn die Determinanten $D_0, D_1, \ldots, D_{n-2}$ *sämmtlich* regulär sind, erhält man auf diese Weise ein ***vollständiges kanonisches System.***

Die Determinante $D_0 = s_0 = n$ ist eine Constante, also stets regulär; die Function $w^{(1)}$ bildet also immer ein kanonisches Element. Für die conjugirten Werthe derselben ergeben sich nach (2.), wenn man dort $i = 1$ setzt, folgende Ausdrücke:

$$w_k^{(1)} = -\sum_{h=0}^{h=n-1} \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ y_k, & y_h \end{vmatrix} = n y_k - (y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}) = s_0 y_k - s_1.$$

Macht man den Factor von y zu 1, so erhält man hierfür

$$v^{(1)} = y - \frac{1}{n} s_1 = y - \frac{1}{n} f_1,$$

und ich will jetzt die Bedingung angeben, unter der das System

$$(3.) \qquad \left(1, \left(y - \frac{1}{n} f_1\right), \left(y - \frac{1}{n} f_1\right)^2, \ldots, \left(y - \frac{1}{n} f_1\right)^{n-1}\right)$$

mod. x kanonisch ist.

x^{δ_i} bezeichnet die höchste Potenz von x, die in allen Determinanten $(i+1)$-ter Ordnung aus der Matrix

$$(y_0^h, y_1^h, \ldots, y_{n-1}^h) \qquad (h = 0, 1, \ldots, n-1)$$

enthalten ist. Eine beliebige dieser Determinanten: $\left|y_{k_0,k_1,\ldots,k_i}^{h_0,h_1,\ldots,h_i}\right|$ ist aber durch die Differenz je zweier der Wurzeln $y_{k_0}, \ldots, y_{k_i}$, also auch durch die Determinante $\left|y_{k_0,k_1,\ldots,k_i}^{0,\,1,\,\ldots,i}\right|$ theilbar, die ja dem Producte dieser Differenzen gleich ist; x^{δ_i} reducirt sich also auf die höchste Potenz von x, die in allen Determinanten aus den *ersten* $i+1$ Zeilen von (y_k^h) enthalten ist, und x^{δ_1} ist z. B. grösster gemeinsamer Theiler — mod.x — aller Wurzeldifferenzen.

Die Theilbarkeit der Grössen $v_k^{(1)} = y_k - \frac{1}{n} f_1$ durch x^{δ_1} ist aus ihrer Herleitung ersichtlich; aus der Gleichung

$$\left(y_h - \frac{1}{n} f_1\right) - \left(y_k - \frac{1}{n} f_1\right) = y_h - y_k$$

folgt, dass sie nicht sämmtlich eine höhere Potenz von x enthalten können; die conjugirten Werthe von $\left(y_k - \frac{1}{n} f_1\right)^i$ sind also sämmtlich durch $x^{i\delta_1}$, durch eine höhere Potenz aber nicht theilbar, und die Function $\left(y - \frac{1}{n} f_1\right)^i$ bildet somit dann und nur dann ein kanonisches Element, wenn $i\delta_1 = \varepsilon_i$ ist.

Die Identität

$$\left|y_{k_0,k_1,\ldots,k_i}^{0,\,1,\,\ldots,i}\right| = \pm(y_{k_i} - y_{k_0})(y_{k_i} - y_{k_1}) \ldots (y_{k_i} - y_{k_{i-1}}) \cdot \left|y_{k_0,k_1,\ldots,k_{i-1}}^{0,\,1,\,\ldots,i-1}\right|$$

zeigt, dass

$$\delta_i \geqq i\delta_1 + \delta_{i-1}, \quad \text{also} \quad \varepsilon_i \geqq i\delta_1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

ist, und durch Addition dieser Relationen ergiebt sich:

$$\delta_{n-1} \geqq \tfrac{1}{2} n(n-1)\delta_1.$$

Dann und nur dann, wenn für jeden Werth von i

$$\delta_i = i\delta_1 + \delta_{i-1}, \quad \text{also} \quad \varepsilon_i = i\delta_1$$

ist, wird

$$\delta_{n-1} = \tfrac{1}{2} n(n-1)\delta_1.$$

Letztere Gleichung ist also eine nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Grössen (3.) ein kanonisches System bilden.

Diese Bedingung ist, wie ich jetzt zeigen will, z. B. dann erfüllt, wenn $\delta_1 = \varepsilon_1$ ein Bruch mit dem Nenner n ist. (Die Brüche $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ ergeben dann das Restsystem $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$).

Es stelle

$$\{a_0, a_1, \ldots, a_\varrho\}$$

den Exponenten der höchsten Potenz von x dar, die in jeder der Grössen $a_0, a_1, \ldots, a_\varrho$ enthalten ist. Sind $a_0, a_1, \ldots$ ganze rationale Functionen von x oder Wurzeln aus solchen, so bedarf diese Festsetzung keiner weiteren Erläuterung. In allen sonstigen Fällen werden $a_0, a_1, \ldots, a_\varrho$ conjugirte ganze rationale Functionen von $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ sein. Genügen dieselben der Gleichung

$$a^\varrho - A_1 . a^{\varrho-1} + A_2 . a^{\varrho-2} \ldots \pm A_\varrho = 0,$$

so ist

$$\{a_0, a_1, \ldots, a_\varrho\} = \{A_1, A_2^{\frac{1}{2}}, \ldots, A_\varrho^{\frac{1}{\varrho}}\}.$$

Wo es nicht zweifelhaft sein kann, welche conjugirten Grössen gemeint sind, werde ich für $\{a_0, a_1, \ldots, a_\varrho\}$ kurz $\{a\}$, so z. B. $\{y\}$ für $\{y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ schreiben.

Wie oben gezeigt wurde, ist

$$\delta_1 = \left\{y - \frac{1}{n} f_1\right\}.$$

Ich will von nun an voraussetzen, dass f_1 gleich Null ist. Anderenfalls genügt ja $y - \frac{1}{n} f_1$ einer Gleichung, in welcher das zweithöchste Glied verschwindet; die Elementartheiler von $\left(\left(y_k - \frac{1}{n} f_1\right)^h\right)$ sind aber die gleichen, wie die von (y_k^h); diese beiden Systeme sind also äquivalent.

δ_1 hat höchstens den Nenner n, und zwar, da

$$\delta_1 = \varepsilon_1 = \{y\} = \{f_2^{\frac{1}{2}}, f_3^{\frac{1}{3}}, \ldots, f_n^{\frac{1}{n}}\}$$

ist, diesen dann und nur dann, wenn der kleinste der Brüche $\frac{1}{2}\{f_2\}$, $\frac{1}{3}\{f_3\}, \ldots, \frac{1}{n}\{f_n\}$ den Nenner n besitzt. Da $\{f_2\}, \ldots, \{f_n\}$ ganze Zahlen sind, so ist dies allein möglich, indem

$$(4.) \qquad \delta_1 = \frac{1}{n}\{f_n\} < \{f_2^{\frac{1}{2}}, f_3^{\frac{1}{3}}, \ldots, f_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}\}$$

und $\{f_n\}$ zu n relativ prim ist. Von letzterer Bedingung sei jedoch für das Folgende abgesehen. Die Discriminante der zu Grunde gelegten Gleichung ist bekanntlich ein Ausdruck von der Form

$$D = \Sigma\gamma . f_2^{\alpha_2} f_3^{\alpha_3} \ldots f_n^{\alpha_n},$$

wo mit γ gewisse Constanten und mit $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ positive ganze Zahlen bezeichnet sind, die der Gleichung

$$2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots + n\alpha_n = n(n-1)$$

genügen. Sobald f_n nicht identisch verschwindet — und in einer irreducibelen Gleichung kann f_n nicht identisch gleich Null sein — tritt in D ein Glied $\gamma . f_n^{n-1}$ auf, das, wenn x der Bedingung (4.) genügt, eine niedrigere Potenz von x enthält, als alle übrigen. Folglich reducirt sich dann $\{D\}$ auf $(n-1)\ \{f_n\}$, und da $\{D\}$ identisch gleich $2\delta_{n-1}$ ist, wird

$$\delta_{n-1} = \tfrac{1}{2} n(n-1)\delta_1.$$

Dies ist aber die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass

$$\varepsilon_i = i\delta_1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

und bei verschwindendem f_1 das System $(1, y, \ldots, y^{n-1})$ mod. x kanonisch ist.

Ist z. B. y Wurzel einer binomischen Gleichung:

$$y^n \pm f_n(x) = 0,$$

so ist die Bedingung (4.) für alle Factoren der Discriminante erfüllt, mithin — worauf auch Herr *Hensel* in seiner Abhandlung hinweist — das System $(1, y, \ldots, y^{n-1})$ für alle Punkte im Endlichen kanonisch.

§ 2.

Die kanonischen Systeme in Gattungsbereichen dritter oder vierter Ordnung.

Genügt y der cubischen*) Gleichung

$$y^3 + f_2(x)y - f_3(x) = 0,$$

so ist

$$\delta_1 = \{y\} = \{f_2^{\frac{1}{2}},\ f_3^{\frac{1}{3}}\}$$
$$\delta_2 = \tfrac{1}{2}\{D\} = \tfrac{1}{2}\{4f_2^3 + 27f_3^2\}.$$

Die Grössen 1 und y sind bereits zwei Elemente des kanonischen Systems. Für den Fall, dass die Determinante $D_1 = \begin{vmatrix} s_0, & s_1 \\ s_1, & s_2 \end{vmatrix}$ regulär ist, kann das dritte gleich der Grösse

$$\frac{w^{(2)}}{D_1}$$

gesetzt werden, und hierbei ist $w^{(2)}$ die identisch durch $x^{\delta_2+\delta_1}$ theilbare Function

$$w^{(2)} = \begin{vmatrix} s_0, & s_1 \\ s_1, & s_2 \end{vmatrix} y^2 - \begin{vmatrix} s_0, & s_2 \\ s_1, & s_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} s_1, & s_2 \\ s_2, & s_3 \end{vmatrix}$$
$$= -6f_2y^2 - 9f_3y - 4f_2^2.$$

Ist aber $\begin{vmatrix} s_0, & s_1 \\ s_1, & s_2 \end{vmatrix}$ nicht regulär, ist also in dieser Determinante oder, was das-

*) Man vergl. *Ludwig Baur:* Zur Theorie der Functionen eines cubischen Körpers. Math. Annal. 43, S. 505—520.

selbe ist, in f_2 eine höhere Potenz von x enthalten, als $x^{2\delta_1}$, so ist

$$\delta_1 = \tfrac{1}{3}\{f_3\} < \tfrac{1}{2}\{f_2\}.$$

Unter dieser Bedingung ist aber, wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, das System $(1, y, y^2)$ kanonisch; denn dann ist

$$\delta_2 = 3\delta_1, \quad \text{folglich} \quad \varepsilon_2 = 2\varepsilon_1.$$

Unter Voraussetzung der biquadratischen Gleichung

$$f(y) = y^4 + f_2(x)y^2 - f_3(x)y + f_4 = 0$$

ist

$$\delta_1 = \left\{f_2^{\frac{1}{2}}, f_3^{\frac{1}{3}}, f^{\frac{1}{4}}\right\}. \tag{1.}$$

x^{δ_2} ist mod.x grösster gemeinsamer Theiler der vier Determinanten η_k, welche in dem System

$$(y_0^h, y_1^h, y_2^h, y_3^h) \qquad (h = 0, 1, 2, 3)$$

den Elementen y_k^3 adjungirt sind; so ist z. B.

$$\eta_0 = -|y_{1,2,3}^{0,1,2}| = (y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3),$$

und η_1, η_2, η_3 erhält man hieraus nach der bekannten Regel, dass, wenn man etwa y_0 mit y_1 vertauscht, η_0, η_1, η_2, η_3 in $-\eta_1$, $-\eta_0$, $-\eta_2$, $-\eta_3$ übergehen. Die Grössen η_k genügen einer Gleichung

$$\eta^4 - A_1\eta^3 + A_2\eta^2 - A_3\eta + A_4 = 0,$$

deren Coefficienten dem Rationalitätsbereich $(1, f_2, f_3, f_4, \sqrt{D})$ angehören und sich in folgender Weise bestimmen lassen:

$$A_1 = \eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$$

ist eine alternirende Function von $y_0, \ldots, y_3$, also durch $\sqrt{D}$ theilbar; die Dimension von $\sqrt{D}$ ist aber gleich 6, die von A_1 nur gleich 3; folglich muss A_1 verschwinden. Für A_2 gilt die *Newton*sche Formel:

$$A_1^2 - 2A_2 = \sum_{k=0}^{k=3} \eta_k^2;$$

letztere Summe ist aber, wie auf Seite 9 näher ausgeführt ist, mit D_2 identisch, und somit folgt:

$$-2A_2 = D_2.$$

A_3 ist, wie A_1, eine alternirende Function der Wurzeln, also durch $\sqrt{D^1}$ theilbar; der noch hinzutretende Factor ist eine symmetrische Function dritter

Dimension und ergiebt sich als der Ausdruck

$$\Sigma(y_{k_0}-y_{k_1})(y_{k_0}-y_{k_2})(y_{k_0}-y_{k_3}) = \Sigma f'(y_{k_0}) = 4s_3-4f_3 = 8f_3.$$

Hierbei ist k_0 nach einander gleich 0, 1, 2, 3 zu setzen und k_1, k_2, k_3 sind immer die übrigen dieser Zahlen. A_4 ist die Gleichungsdiscriminante D oder D_3. Ueberträgt man diese Resultate in die Gleichung

$$\delta_2 = \left\{A_1,\ A_2^{\frac{1}{2}},\ A_3^{\frac{1}{3}},\ A_4^{\frac{1}{4}}\right\},$$

so ergiebt sich

$$\delta_2 = \left\{D_2^{\frac{1}{2}},\ D_3^{\frac{1}{6}} f_3^{\frac{1}{3}},\ D_3^{\frac{1}{4}}\right\}. \tag{2.}$$

Unmittelbar nach der Definition ist

$$\delta_3 = \left|D_3^{\frac{1}{4}}\right| = \tfrac{1}{2}\cdot\left|D_3\right|. \tag{3.}$$

Für die Determinanten D_1 und D_2 findet man mittels der Gleichungen

$$s_1 = f_1 = 0, \quad s_2 = -2f_2, \quad s_3 = 3f_3, \quad s_4 = 2f_2^2-4f_4 \tag{4.}$$

folgende Ausdrücke:

$$D_1 = -8f_2, \quad D_2 = -4(2f_2^3-8f_2f_4+9f_3^2). \tag{5.}$$

Für die Punkte, in denen die Discriminante D_3 von Null verschieden ist, reduciren sich alle Elementartheiler auf Eins und ist das System $(1, y, y^2, y^3)$ kanonisch.

Ich will nun zunächst den Fall betrachten, dass D_3, nicht aber zugleich auch die Subdeterminante D_2 im Punkte $x = 0$ verschwindet. Dann ist nach (2.) $\delta_2 = 0$, folglich auch $\delta_1 = 0$ und die Grössen $\mathfrak{v}^{(0)} = 1$, $\mathfrak{v}^{(1)} = y$, $\mathfrak{v}^{(2)} = y^2$ sind bereits drei Elemente eines kanonischen Systems. Ausserdem ist aber D_2 regulär, also auch das vierte bekannt.

Der Factor x sei jetzt in D_3 und D_2, nicht aber zugleich auch noch in D_1 enthalten. Letztere Determinante ist dann regulär und ausser $\mathfrak{v}^{(0)} = 1$, $\mathfrak{v}^{(1)} = y$ ist also noch $\mathfrak{v}^{(2)}$ bekannt. Zur Ermittelung von $\mathfrak{v}^{(3)}$ will ich zunächst annehmen, dass f_3 nicht durch x theilbar ist. In der Gleichung (2.) reducirt sich dann das mittlere Glied rechts auf $D_3^{\frac{1}{6}}$; das Glied $D_3^{\frac{1}{4}}$ fällt infolge dessen ganz fort, da es eine höhere Potenz von x enthält und x^{δ_2} wird entweder gleich derjenigen Potenz von x, die in $D_2^{\frac{1}{2}}$, oder gleich der, die in $D^{\frac{1}{6}}$ enthalten ist. Im ersten Falle ist D_2 regulär, also $\mathfrak{v}^{(3)}$ ge-

funden; im zweiten Falle ist $\delta_2 = \frac{1}{6}|D_3|$, mithin nach (3.):

$$\delta_2 = \tfrac{1}{3}\delta_3, \quad \delta_3 = 3\delta_2, \quad \varepsilon_3 = 2\delta_2 = 2\varepsilon_2.$$

Alsdann braucht man also nur das kanonische Element $\mathfrak{v}^{(2)}$, das durch x^{ε_2} theilbar ist, ins Quadrat zu erheben, um eine durch x^{ε_3} theilbare Function zu erhalten; nur ist noch festzustellen, ob, wenn man dieselbe in die Form $u_3y^3+u_2y^2+u_1y+u_0$ bringt, u_3 an der Stelle $x=0$ nicht verschwindet. Nun ist folgende Grösse identisch durch $x^{\delta_2+\delta_1}$ theilbar:

$$w^{(2)} = \begin{vmatrix} s_0, & s_1 \\ s_1, & s_2 \end{vmatrix} y^2 - \begin{vmatrix} s_0, & s_2 \\ s_1, & s_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} s_1, & s_2 \\ s_2, & s_3 \end{vmatrix} = -8f_2y^2 - 12f_3y - 4f_2^2.$$

Da f_1 verschwindet, so bleibt in $(w^{(2)})^2$, wenn man y^4 auf niedrigere Potenzen reducirt, der Coefficient von y^3 gleich dem doppelten Producte derer von y^2 und y in $w^{(2)}$. Diese sind aber unter der zu Grunde liegenden Voraussetzung: $D_1 \not\equiv 0$, $f_3 \not\equiv 0 \pmod{x}$ beide nicht durch x theilbar, und so kann das kanonische Element $\mathfrak{v}^{(3)}$ in der That auf diese Weise erhalten werden. Der Coefficient von y^3 möge in demselben wieder zu 1 gemacht und demgemäss $\mathfrak{v}^{(3)} = \text{const.} f_2^{-1}f_3^{-1}(w^{(2)})^2$ bezw. $\text{const.} f_2f_3^{-1}(v^{(2)})^2$ gesetzt werden.

[Hebt man die Einschränkung: $f_1 = 0$ auf, so tritt für f_3 der Ausdruck

$$F = \sum_{k=0}^{k=3} f'(y_k) = 4s_3 - 3f_1s_2 + 2f_2s_1 - s_0f_3$$

ein, der ja auch ursprünglich in (2.) an der Stelle von f_3 steht. In $(w^{(2)})^2$ bildet dann das Product const. $D_1.F$ den Factor von y^3.]

Unter den Linearfactoren, die der Bedingung

$$D_3 \equiv 0, \quad D_2 \equiv 0, \quad D_1 \not\equiv 0 \pmod{x}$$

genügen, bleiben noch diejenigen zu betrachten, die auch in f_3 enthalten sind. Aus den Gleichungen

$$D_1 = -8f_2, \quad -\tfrac{1}{4}D_2 = 2f_2(f_2^2 - 4f_4) + 9f_3^2$$

folgt, dass dieselben auch in $f_2^2 - 4f_4$ aufgehen. Zu den Determinanten, die identisch durch $x^{2\delta_2}$ theilbar sind, gehört nun auch

$$\begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_3 \\ s_1, & s_2, & s_4 \\ s_2, & s_3, & s_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4, & 0, & 3f_3 \\ 0, & -2f_2, & 2f_2^2 - 4f_4 \\ -2f_2, & 3f_3, & -5f_2f_3 \end{vmatrix} = 4f_3(f_2^2 + 12f_4).$$

Da $f_2^2 - 4f_4$ durch x theilbar ist, kann $f_2^2 + 12f_4$ dies nicht auch sein; denn sonst müssten f_2 und f_4 den Factor x besitzen, und $D_1 = -8f_2$ ist als nicht durch x theilbar vorausgesetzt. Somit muss f_3 durch $x^{2\delta_2}$ theilbar,

also $|f_3| \geqq 2\delta_2$ sein; nach (3.) ist ferner $|D_3| \geqq 4\delta_2$, folglich

$$\left\{D_3^{\frac{1}{6}} f_3^{\frac{1}{3}}\right\} \geqq \tfrac{4}{3}\delta_2,$$

und hierbei ist $\delta_2 > 0$. Wie Gleichung (2.) besagt, ist x^{δ_2} aber die höchste Potenz von x, die gleichzeitig in

$$D_2^{\frac{1}{2}}, \quad D_3^{\frac{1}{6}} f_3^{\frac{1}{3}}, \quad D_3^{\frac{1}{4}}$$

enthalten ist. Besitzt also die zweite dieser Grössen eine höhere Potenz von x zum Theiler, als x^{δ_2}, so muss δ_2 einen der beiden Werthe $\frac{1}{2}|D_2|$ oder $\frac{1}{4}|D_3|$ annehmen. Im ersten Falle ist D_2 regulär, also $\mathfrak{v}^{(3)}$ bekannt; im zweiten ist

$$\delta_3 = 2\delta_2, \quad \text{mithin} \quad \delta_3 - \delta_2 = \varepsilon_3 = \delta_2 = \varepsilon_2;$$

$\mathfrak{v}^{(3)}$ kann also x nur in gleicher Potenz enthalten, wie $\mathfrak{v}^{(2)}$, lässt sich mithin gleich $y.\mathfrak{v}^{(2)}$ setzen.

Bezeichnet, wie bereits an früherer Stelle, $v^{(i)}$ diejenige Function, die man erhält, indem man die identisch durch $x^{\delta_i+\delta_{i-1}}$ theilbare Function $w^{(i)}$ durch ihren ersten Coefficienten D_{i-1} dividirt, so sind bisher die folgenden kanonischen Systeme aufgetreten: $(1, y, y^2, y^3)$, $(1, y, y^2, v^{(3)})$, $(1, y, v^{(2)}, v^{(3)})$, $(1, y, v^{(2)}, \text{const.} f_2 f_3^{-1} (v^{(2)})^2)$, $(1, y, v^{(2)}, y.v^{(2)})$.

Diese fünf Typen reichen nun auch für die allein noch zu betrachtenden Punkte aus, wo D_3, D_2, D_1 eine gemeinsame Nullstelle besitzen. In diesen Punkten verschwinden alle*) Determinanten zweiter Ordnung des Systems $(s_{\alpha+\beta})$. Auf Grund der Annahme $f_1 = 0$ erhält man aber

$$\begin{vmatrix} s_0, & s_1 \\ s_1, & s_2 \end{vmatrix} = -8f_2, \quad \begin{vmatrix} s_0, & s_2 \\ s_1, & s_3 \end{vmatrix} = 12f_3, \quad \begin{vmatrix} s_0, & s_3 \\ s_1, & s_4 \end{vmatrix} = 8(f_2^2 - 2f_4).$$

Somit wird jeder der Coefficienten f_2, f_3, f_4, also auch jede der Wurzeln y_0, y_1, y_2, y_3 in jenen Punkten zu Null. Die höchste Potenz von x, durch welche alle vier Wurzeln theilbar sind, ist, wie oben gezeigt wurde $x^{\delta_1} = x^{\varepsilon_1}$. Folglich genügt

$$\bar{y} = \frac{y}{x^{\varepsilon_1}}$$

*) Wenn $D_{n-1}, D_{n-2}, \ldots, D_i \pmod{x}$ verschwinden, sind alle Determinanten $(i+1)$-ter Ordnung aus $(s_{\alpha+\beta})$ durch x theilbar. Es ist dies ein leicht herzuleitender Satz; in allgemeinerer Form ist er im Journal für Mathematik, Bd. 99, S. 358 von *Kronecker* bewiesen.

einer Gleichung

$$\bar{y}^4+\bar{f}_2\bar{y}^2-\bar{f}_3\bar{y}+\bar{f}_4 = 0,$$

in welcher kein Coefficient bei $x=0$ unendlich gross und mindestens einer von Null verschieden ist. Die Elementartheiler $x^{\bar{\varepsilon}_i}$ des Systems $(\bar{y}_k^h)$ stehen zu denen von (y_k^h) in der folgenden einfachen Beziehung: die Determinanten $|y^{0,\ 1,\ \ldots,i}_{\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_i}|$, deren grösster gemeinsamer Theiler, (mod.x) reducirt, x^{δ_i} ist, sind homogene Functionen $\frac{1}{2}i(i+1)$-ter Dimension von $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$; folglich ist

$$|y^{0,\ 1,\ \ldots,i}_{\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_i}| = x^{\frac{1}{2}i(i+1)\varepsilon_1}.|\bar{y}^{0,\ 1,\ \ldots,i}_{\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_i}|,$$

mithin

$$\delta_i = \tfrac{1}{2}i(i+1)\varepsilon_1+\bar{\delta}_i$$

und

$$\varepsilon_i = \delta_i-\delta_{i-1} = i.\varepsilon_1+\bar{\varepsilon}_i.$$

Da unter den Functionen $\bar{f}_2, \bar{f}_3, \bar{f}_4$ nicht jede durch x theilbar und mithin $\bar{\varepsilon}_1 = 0$ ist, kann das System $(1, \bar{y}, \bar{y}^2, \bar{y}^3)$ nach einer der oben angegebenen Methoden in ein (mod.x) ihm äquivalentes und zugleich kanonisches transformirt werden, das mit $(1, \bar{\mathfrak{v}}^{(1)}, \bar{\mathfrak{v}}^{(2)}, \bar{\mathfrak{v}}^{(3)})$ bezeichnet sei. Man kann sich nun leicht überzeugen, dass $\bar{\mathfrak{v}}^{(i)}$ eine homogene Function $i$ter Dimension von $\bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_3$ ist; denn das erste Glied ist $\bar{y}^i$ selbst; $\bar{y}^{i-1}$ hat aber eine rationale Function von $\bar{f}_2, \bar{f}_2, \bar{f}_4$, zum Coefficienten, in welcher die Dimension des Zählers, wenn man denselben als symmetrische Function von $\bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_3$ betrachtet, um 1 höher ist als die des Nenners; beim nächsten Glied ist die Dimension des Zählers um 2 höher u. s. f.; bedeutet also $\mathfrak{v}^{(i)}$ dieselbe Function von y, f_2, f_3, f_4, wie $\bar{\mathfrak{v}}^{(i)}$ von $\bar{y}, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \bar{f}_4$, so besteht zwischen den conjugirten Werthen von $\mathfrak{v}^{(i)}$ und $\bar{\mathfrak{v}}^{(i)}$ die Gleichung

$$\mathfrak{v}^{(i)} = x^{i.\varepsilon_1}\bar{\mathfrak{v}}^{(i)}.$$

Da die conjugirten Werthe von $\bar{\mathfrak{v}}^{(i)}$ durch $x^{\bar{\varepsilon}_i}$ theilbar sind, so enthalten diejenigen von $\mathfrak{v}^{(i)}$ hiernach den Theiler x^{ε_i}; der erste Coefficient ist in $\mathfrak{v}^{(i)}$, wie in $\bar{\mathfrak{v}}^{(i)}$, gleich 1; die übrigen sind rationale Functionen von f_2, f_3, f_4, und da ihre Zähler von höherer Dimension sind, als die Nenner, so enthalten sie x in höherer Potenz, als die Coefficienten von $\bar{\mathfrak{v}}^{(i)}$, sind also, wie diese, im Punkte $x=0$ endlich. Das so zu erhaltende System $(\mathfrak{v}^{(i)})$, das eine der oben angegebenen Formen besitzt, ist also (mod.x) dem System (y^i) äquivalent und kanonisch. —

Nachdem nunmehr alle Punkte im Endlichen berücksichtigt sind, möchte ich die verschiedenen kanonischen Formen, in welche die Basis des allgemeinen biquadratischen Körpers gesetzt ist, nochmals zusammenstellen.

Ich gehe dabei von dem System $(\bar{y}_k^h)$ aus, in welchen $\bar{y}_k = x^{-\varepsilon_1} y_k$ und $\bar{\varepsilon}_1 = 0$ ist, so dass mindestens eine der Hauptdeterminanten $\bar{D}_3$, $\bar{D}_2$, $\bar{D}_1$ bei $x = 0$ nicht verschwindet. Um zu dem ursprünglichen System (y_k^h) zurückzugehen, hat man nur zu berücksichtigen, dass

$$\delta_i = \tfrac{1}{2} i(i+1) + \bar{\delta}_i, \quad \varepsilon_i = i\varepsilon_1 + \bar{\varepsilon}_i$$

und eine homogene Function $i$ter Dimension von $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ um den Factor $x^{i\varepsilon_1}$ von der gleichen Function von $\bar{y}_0, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{n-1}$ verschieden ist. Ist z. B. $\bar{D}_i$ regulär, d. h. nur durch $x^{2\bar{\delta}_i}$ theilbar, so ist auch D_i regulär, d. h. nur durch $x^{2\delta_i}$ theibar; denn D_i hat die Dimension $i(i+1)$, folglich ist

$$D_i = x^{i(i+1)\delta_1} \bar{D}_i = x^{2(\delta_i - \bar{\delta}_i)} \bar{D}_i.$$

Ist für $x = 0$ schon $\bar{D}_3 \neq 0$, so ist $\bar{\varepsilon}_3 = \bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}_1 = 0$, folglich $\varepsilon_3 = 3\varepsilon_1$, $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$ und das System $(1, y, y^2, y^3)$ selbst kanonisch. Denn bei identisch verschwindendem $f_1 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3$ ist x^{ε_1} mit derjenigen Potenz von x identisch, die in allen vier Wurzeln y_k enthalten ist.

Ist $\bar{D}_3 = 0$, $\bar{D}_2 \neq 0$, so ist $\bar{D}_2$, also auch D_2 regulär; ausserdem ist $\varepsilon_2 = \bar{\varepsilon}_1 = 0$, also $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$. Ein kanonisches System bilden in diesem Falle die Grössen: $(1, y, y^2, v^{(3)})$.

Verschwinden $\bar{D}_3$ und $\bar{D}_2$ bei $x = 0$, so ist $\bar{D}_1$ dort von Null verschieden. Mithin ist auch D_1 (mod.x) regulär und $(1, y, v^{(2)})$ sind zunächst drei kanonische Elemente. Ist $\bar{D}_2$, also auch D_2 regulär, so ist auch das vierte bekannt. Sonst sind zwei Fälle zu unterscheiden, unter denen ich besonders den ersten hervorheben möchte: a) Wie $\bar{f}_2$, sei auch $\bar{f}_3$ bei $x = 0$ von Null verschieden; es enthalte also, was dasselbe besagt, f_2 nur die Potenz $x^{2\varepsilon_1}$ und f_3 nur $x^{3\varepsilon_1}$. Dann besteht — wenn D_2 nicht regulär ist —, wie oben gezeigt wurde, die Relation: $\bar{\varepsilon}_3 = 2\bar{\varepsilon}_2$, welche für die ursprünglichen Elementartheiler lautet: $\varepsilon_3 = 2\varepsilon_2 - \varepsilon_1$. Nun ist

$$w^{(2)} = \begin{vmatrix} s_0, & s_1 \\ s_1, & s_2 \end{vmatrix} y^2 - \begin{vmatrix} s_0, & s_2 \\ s_1, & s_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} s_1, & s_2 \\ s_2, & s_3 \end{vmatrix} = -8 f_2 y^2 - 12 f_3 y - 4 f_2^2$$

identisch durch $x^{\delta_2 + \delta_1}$ theilbar, also $(w^{(2)})^2$ durch $x^{2(\delta_2 + \delta_1)}$. Jeder Coefficient

in $(w^{(2)})^2$ enthält aber den Factor $x^{5\delta_1}$, und zwar der von y^3 auch nur diesen. Dividirt man durch denselben, so erhält man einen Quotienten der gerade, noch durch $x^{2\varepsilon_2-\varepsilon_1}=x^{\varepsilon_3}$ theilbar ist. (Ich will beiläufig bemerken, dass in diesem Falle δ_1 immer eine ganze Zahl ist, die man von vornherein auf 0 reducirt, wenn man voraussetzt, dass y keinen rationalen Theiler besitzt.) b) Sonst ist allein noch der Fall zu betrachten, dass $\bar{D}_3$, $\bar{D}_2$, $\bar{f}_3$ im Punkte $x=0$ verschwinden, und zwar $\bar{D}_2$ von höherer Ordnung als $x^{2\bar{\delta}_2}$. Dann ist $\bar{\varepsilon}_3=\bar{\varepsilon}_2$, mithin $\varepsilon_3=\varepsilon_2+\varepsilon_1$ und $y.\mathfrak{v}^{(2)}$ das noch fehlende kanonische Element.

Bei diesen Betrachtungen hat sich ein ausserordentlich einfaches System von Relationen ergeben, durch welches die Elementartheiler x^{ε_i} mit den Hauptdeterminanten D_i bezw. unter einander verbunden sind. Betrachtet man zunächst ε_1 als gegeben, so ist entweder D_1 regulär, d. h. nur durch $x^{2\varepsilon_1}$ theilbar, oder $\varepsilon_2=2\varepsilon_1$.

Betrachtet man auch ε_2 als gegeben, so ist entweder D_2 regulär, d. h. nur durch $x^{2(\varepsilon_2+\varepsilon_1)}$ theilbar, oder es besteht eine der Gleichungen:

$$\varepsilon_3=2\varepsilon_2-\varepsilon_1, \quad \varepsilon_3=\varepsilon_2+\varepsilon_1.$$

Die angegebenen Relationen schliessen einander nicht aus; es geht aus ihnen hervor, dass sich ε_2 nur dann beliebig weit von ε_1 und sich ε_3 nur dann beliebig weit von ε_2 und ε_1 entfernen kann, wenn D_1 bezw. D_2 regulär sind. — An die Voraussetzung, dass $f_1=y_0+y_1+y_2+y_3$ identisch verschwindet, sind diese Beziehungen nicht gebunden; denn die Elementartheiler, wie die Determinanten D_i hängen nur von den Differenzen der Wurzeln ab.

Nach einem von Herrn *Hensel* hergeleiteten Satze*) wird durch die Nenner der Brüche ε_i unmittelbar die Zahl der Blätter der dem Körper $\mathfrak{G}(x, y)$ zugehörenden *Riemann*schen Fläche gegeben, die in dem betreffenden Punkte mit einander zusammenhängen. Ich habe deshalb auch die Grösse dieser Nenner für alle verschiedenen Fälle mit festgestellt, und da ich hierbei mehr auf die Einzelheiten eingegangen bin, als Herr *Hensel* in der Abhandlung: „Ueber die Verzweigung der drei- und vierblättrigen *Riemann*schen Flächen“**), so gedenke ich diesen Theil meiner Arbeit gelegent-

---

*) Ueber die Ordnungen der Verzweigungspunkte einer *Riemann*schen Fläche. Sitzungsbericht d. Berl. Akademie vom 17. Okt. 1895.

**) Sitzungsbericht d. Berl. Akademie vom 28. Nov. 1895.

lich auch zu veröffentlichen. Bei der Herleitung der kanonischen Systeme gleichzeitig auf die Verzweigungen in der *Riemann*schen Fläche Bezug zu nehmen, schien sich mir nicht zu empfehlen. Denn nur um ein Beispiel anzuführen: das System $(1, y, y^2, y^3)$ ist sowohl für unendlich viele von den Punkten kanonisch, wo alle vier Blätter der *Riemann*schen Fläche von einander getrennt bleiben, wie für einen Theil derer, wo alle vier mit einander zusammenhängen, und so kann allgemein derselbe Typus des kanonischen Systems Windungspunkten verschiedenster Ordnung entsprechen. —

Es sei noch darauf hingewiesen, dass, wie Herr *Hensel* im Journal für Mathematik, Bd. 115 näher ausgeführt hat, die Einführung homogener algebraischer Formen ein Mittel bietet, durch das sich alle Betrachtungen obiger Art von vornherein auch auf den unendlich fernen Punkt ausdehnen lassen.

Zum Schluss möchte ich auch an dieser Stelle dem Danke Ausdruck geben, den ich Herrn *Hensel* sowohl für die Anregung zu dieser Arbeit, wie für sein warmes Interesse an ihrer Durchführung schuldig bin.

Ueber den *Pohlke*schen Satz.

(Von Herrn *Friedrich Schur* in Aachen.)

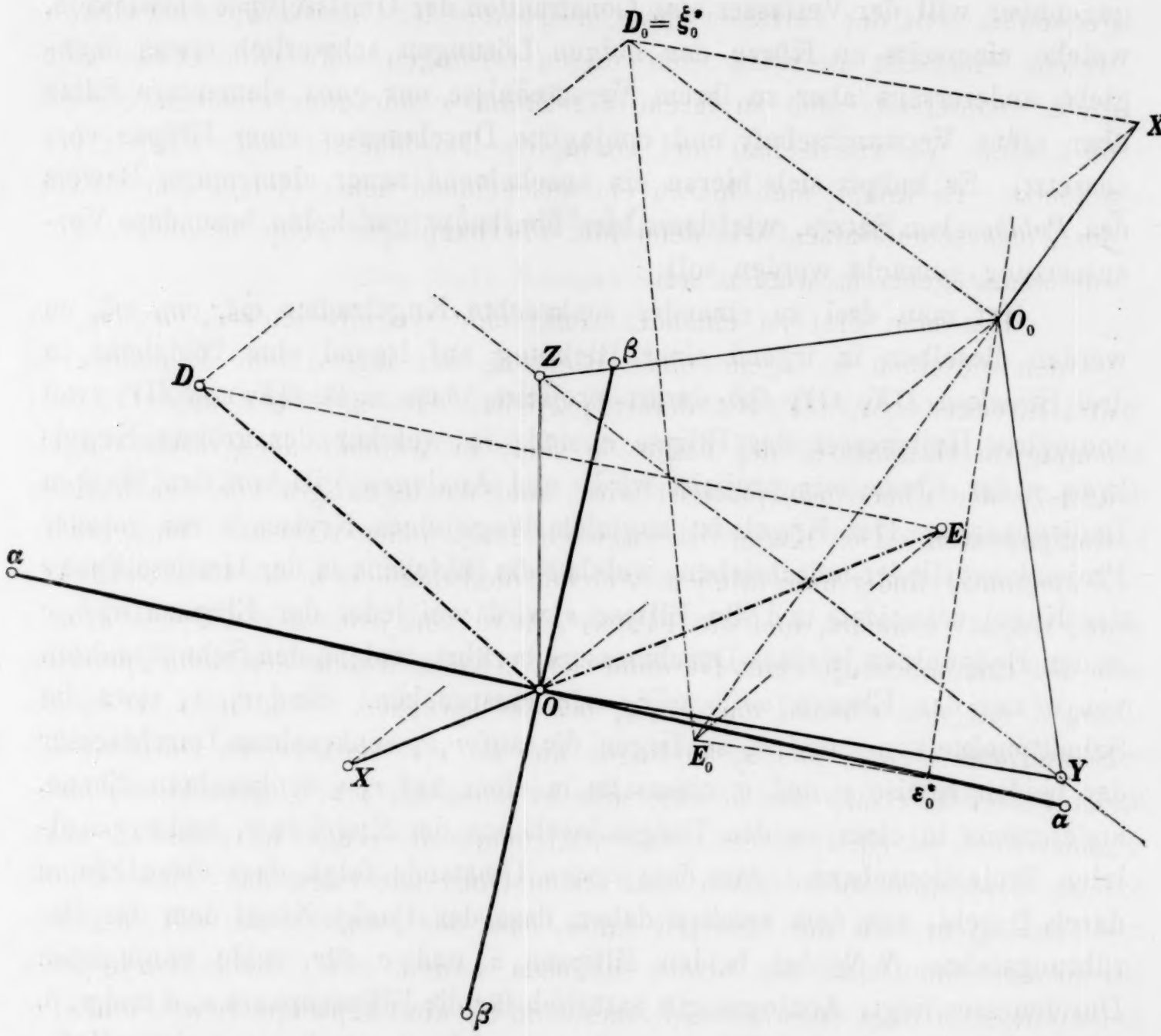
Der sogenannte *Pohlke*sche Fundamentalsatz der Axonometrie sagt bekanntlich aus, dass irgend drei von einem Punkte ausgehende Strecken OX, OY, OZ einer Ebene stets als schiefe Parallelprojectionen dreier gleich langer auf einander senkrechter Strecken $\omega\xi$, $\omega\eta$, $\omega\zeta$ des Raumes angesehen werden können. Der Beweis dieses Satzes kann schwerlich einfacher dargestellt werden als auf dem Wege, den Herr *H. A. Schwarz* im 63. Bande dieses Journals angegeben hat. Aus dieser Darstellung fliesst zugleich eine einfache Lösung der Aufgabe, aus den gegebenen Bildstrecken das Original-Axenkreuz zu construiren. In den Anwendungen kommt es aber weniger auf die Lösung dieser Aufgabe an als vielmehr darauf, direct die Länge der gleichen Strecken $\omega\xi$, $\omega\eta$, $\omega\zeta$ zu finden, wodurch ja die Verkürzungsverhältnisse bekannt sind. Zudem ist diese Aufgabe im Gegensatze zu der obigen eine eindeutige. Da jene Länge diejenige der kleinen Halbaxe der Ellipsenfläche ist, als welche sich die um ω als Mittelpunkt mit $\omega\xi$ als Radius beschriebene Kugel projicirt, so kommt alles auf die Bestimmung dieser Umrissellipse an. Für diese Aufgabe sind durch *Beck* und *Pelz**) Lösungen gegeben worden, welche schliesslich das Ziehen einer so geringen Zahl von Linien erfordern, dass eine Reduction, also eine noch grössere Genauigkeit kaum wird erreicht werden können. Aber diese Constructionen beruhen auf einer Reihe nicht ganz elementarer und jedenfalls rein geometrisch schwer zugänglicher Sätze, so dass einmal ihr Verständniss dem jungen Studirenden nicht ganz leicht sein mag, dann aber der Praktiker Mühe haben wird, die betreffenden Regeln dem Gedächtnisse einzuprägen. Dem

*) S. *Pelz*, Ueber einen neuen Beweis des Fundamentalsatzes von *Pohlke*, Ber. der Wiener Akademie d. Wiss. 1877. *Beck*, Ueber die Fundamentalaufgabe der Axonometrie, dieses Journal, Bd. 106, S. 121 ff. *Pelz*, Zur klinogonalen Darstellung der Rotationsflächen, Ber. d. böhm. Ges. d. Wiss. vom 22. Febr. 1895.

gegenüber will der Verfasser eine Construction der Umrissellipse entwickeln, welche einerseits an Kürze den obigen Lösungen schwerlich etwas nachgiebt, andererseits aber zu ihrem Verständnisse nur ganz elementare Sätze über affine Verwandtschaft und conjugirte Durchmesser einer Ellipse voraussetzt. Es knüpft sich hieran ein anscheinend neuer elementarer Beweis des *Pohlke*schen Satzes, wie denn hier überhaupt gar keine besondere Voraussetzung gemacht werden soll.

Hat man drei zu einander senkrechte Kugelradien $\omega\xi$, $\omega\eta$, $\omega\zeta$, so werden dieselben in irgend einer Richtung auf irgend eine Bildebene in drei Strecken OX, OY, OZ derart projicirt, dass z. B. OX und OY zwei conjugirte Halbmesser der Ellipse c sind, in welcher der grösste Kugelkreis γ der Ebene $\omega\xi\eta$ projicirt wird, und Analoges gilt von den übrigen Radienpaaren. Der Kugel ist zugleich längs eines Kreises σ ein gerader Projectionscylinder umschrieben, welcher die Bildebene in der Umrissellipse s der Kugel schneidet, und die Ellipse s wird von jeder der Ellipsen a, b, c in den Endpunkten je eines Durchmessers berührt, welche den Schnittpunkten von σ mit den Ebenen $\omega\eta\zeta$, $\omega\zeta\xi$, $\omega\xi\eta$ entsprechen. Sind ν_1, ν_2 etwa die Schnittpunkte von γ und σ, so liegen die auf $\nu_1\nu_2$ senkrechten Durchmesser der beiden Kreise γ und σ einerseits in einer auf $\nu_1\nu_2$ senkrechten Ebene, andererseits in einer zu den Tangentialebenen der Kugel in ν_1 und ν_2 parallelen Projectionsebene. Aus dem ersten Umstande folgt, dass diese Ebene durch ζ geht, aus dem zweiten daher, dass der Punkt Z auf dem der Berührungssehne N_1N_2 der beiden Ellipsen s und c für beide conjugirten Durchmesser liegt; Analoges gilt natürlich für die Ellipsenpaare s, a und s, b. ***Wir haben also die drei Ellipsen a, b, c, welche durch die conjugirten Halbmesserpaare OY, OZ; OZ, OX; OX, OY resp. bestimmt sind, und diese drei Ellipsen werden von einer vierten Ellipse s in den Endpunkten der den Halbmessern OX, OY, OZ resp. conjugirten Durchmesser doppelt berührt.*** Es ist klar, dass diese Beziehungen der vier Ellipsen nicht verändert werden, wenn die ganze Figur irgend einer affinen Transformation unterworfen wird. Diese Bemerkung ist wichtig für die Zurückführung unserer Aufgabe auf einen unmittelbar zu erledigenden Fall.

Sind nämlich umgekehrt irgend drei von einem Punkte O ausgehende Strecken OX, OY, OZ einer Ebene gegeben (s. Fig.), und wird angenommen, sie stellten die schiefe Parallelprojection eines noch unbekannten Axendreikants $\omega\xi\eta\zeta$ dar, so können wir uns zunächst die drei Ellipsen a, b, c construirt



denken, und die Ellipse s wäre dann vollkommen bestimmt durch diejenigen drei Durchmesser dieser drei Ellipsen, welche den drei nach OX, OY, OZ fallenden Durchmessern für die jedesmal durch die beiden anderen Halbmesser bestimmte Ellipse conjugirt sind. Es frägt sich nur, ob bei beliebiger Annahme von OX, OY, OZ auch die so bestimmte Ellipse s immer in den Endpunkten jener drei Durchmesser doppelt berührt wird. Um dies einzusehen und zugleich eine einfache Construction dieser Ellipse zu finden, verwandeln wir die Figur $OXYZ$ in eine solche ihr perspectiv-affine Figur O_0X_0YZ, das $O_0Y \perp O_0Z$ ist. Hierzu braucht man ja nur das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck O_0YZ über YZ als Hypotenuse zu construiren und X_0 zu bestimmen als Schnittpunkt der Parallelen durch X zu OO_0 und der Verbindungslinie von O_0 mit dem Schnittpunkte von OX und YZ.

Für die neue Figur O_0X_0YZ ist ja unmittelbar das Axenkreuz $O_0\xi_0YZ$ bekannt, dessen schiefe Parallelprojection sie darstellt; man braucht nur ξ_0 auf dem in O_0 auf der Bildebene errichteten Lothe so zu wählen, dass $O_0\xi_0 = O_0Y = O_0Z$ ist. Für die neue Figur existirt sicher eine Ellipse von den oben (S. 25) angegebenen Eigenschaften, es gilt daher auch dasselbe für die ursprüngliche Figur $OXYZ$. Was nun die Construction von s_0 betrifft, so ist zuerst zu bemerken, dass die auf O_0X_0 senkrechte und O_0Y gleiche Strecke O_0D_0 die eine Halbaxe dieser Ellipse ist, weil ja die Ellipse c_0, welche durch die beiden conjugirten Halbmesser $O_0Y \perp O_0Z$ bestimmt ist, in einen Kreis übergeht. Die darauf senkrechte Halbaxe O_0E_0 ist offenbar die schiefe Projection des auf O_0D_0 und $X_0\xi_0$ senkrechten Kugelhalbmessers $O_0\varepsilon_0 = O_0Y$ so zwar, dass $E_0\varepsilon_0 \parallel X_0\xi_0$ ist (in der Figur ist die Ebene $O_0\xi_0\varepsilon_0$ um O_0X_0 in die Bildebene geklappt). Es ist demnach $\triangle O_0E_0\varepsilon_0 \cong \triangle \xi_0X_0O_0 \cong \triangle D_0X_0O_0$, so dass $O_0E_0 = X_0D_0$, also unmittelbar bekannt ist. Es entspricht das ja dem bekannten Satze, dass X_0 ein Brennpunkt der Umrissellipse s_0 ist; wir wollten diesen Satz hier nicht voraussetzen.

Nachdem auf diese Weise die beiden Halbaxen O_0D_0 und O_0E_0 von s_0 gefunden sind, ergeben sich die beiden conjugirten Halbmesser OD und OE von s daraus, dass $DD_0 \parallel EE_0 \parallel OO_0$ und DE sich mit D_0E_0 auf YZ schneidet. Hieraus kann man die grosse und die kleine Halbaxe $O\alpha$ und $O\beta$ der Umrissellipse in bekannter Weise construiren, so dass $O\beta$ den gesuchten Radius der Kugel um das Axenkreuz darstellt.

Soll dieses Axenkreuz $\omega\xi\eta\zeta$ selbst construirt und damit zugleich seine Existenz, also der *Pohlke*sche Satz bewiesen werden, so werden wir zuerst die Axe $O\omega$ des geraden Cylinders zu bestimmen haben, welche aus der Bildebene die Umrissellipse s ausschneidet. Sie liegt in einer zur Bildebene senkrechten Ebene durch $O\alpha$ und bildet mit $O\alpha$ einen Winkel, dessen Sinus $O\beta : O\alpha$ ist; es giebt natürlich zwei Lagen für diese Axe, welche symmetrisch zur Bildebene sind. Da die Ellipsen a_0, b_0, c_0 ganz innerhalb der Ellipse s_0 liegen, so liegen auch die Ellipsen a, b, c ganz innerhalb der Ellipse s, die $O\omega$ parallelen Projectionsstrahlen der Punkte XYZ also innerhalb des s projicirenden geraden Cylinders, so dass diese Projectionsstrahlen die dem Cylinder eingeschriebene Kugel um ω in dreimal zwei Punkten ξ, ξ'; η, η'; ζ, ζ' schneiden werden. Ist wieder N_1N_2 der Berührungsdurchmesser der Ellipsen c und s und OM ein dazu conjugirter Halbmesser von s, so schneiden die Projectionsebenen von ON_1 und OM die

auf ihnen senkrechte Ebene des Berührungskreises σ des geraden Cylinders mit der Kugel in zwei auf einander senkrechten Halbmessern $\omega\nu_1$ und ωu, so dass diese Ebenen selbst auf einander senkrecht stehen. Ist daher OL ein zu ON_1 conjugirter Halbmesser von c, so schneidet der Projectionsstrahl durch L die Kugel in zwei solchen Punkten λ und λ', dass $\omega\nu_1$ und $\omega\lambda$ resp. $\omega\lambda'$ conjugirte Halbmesser der Ellipse γ resp. γ' sein werden, in welcher der Projectionscylinder von c die Ebene $\omega\nu_1\lambda$ resp. $\omega\nu_1\lambda'$ schneidet; diese Ellipsen γ und γ' sind folglich grösste Kreise unserer Kugel. Ebenso projiciren sich natürlich die Ellipsen a und b auf die Kugel in je zwei grösste Kreise α, α' und β, β'.

Enthalten nun γ resp. β die Punkte ξ und η resp. ξ und ζ, was ja nur Sache der Bezeichnung ist, so ist sicher $\omega\xi \perp \omega\eta$ und $\omega\xi \perp \omega\zeta$. Da die Axe $\omega\zeta$ aber auch in der Projectionsebene von OM liegt, so steht sie auch senkrecht auf der ebenfalls in der Ebene $\omega\xi\eta$ gelegenen Geraden $\omega\nu_1$. Da $\omega\nu_1$ niemals mit $\omega\xi$ zusammenfallen kann, es müssten denn die Punkte O, Y, Z in einer Geraden liegen, so steht $\omega\zeta$ auf der Ebene $\omega\xi\eta$ senkrecht, die Figur $\omega\xi\eta\zeta$ ist also winklich ein rechtwinkliges Axenkreuz; ebenso natürlich die Figur $\omega\xi'\eta'\zeta'$. Es ist nicht schwer, nachdem man etwa die orthogonale Projection O' von ω auf $O\alpha$ beliebig angenommen hat, die orthogonalen Projectionen von ξ, η, ζ durch Constructionen in der Bildebene zu ermitteln. Doch glaubten wir die Ausführung des geringen praktischen Interesses wegen fortlassen zu müssen. Hingegen wird es vielleicht nützlich sein, unsere Construction der Umrissellipse zu wiederholen, indem wir derselben eine solche Fassung geben, dass der Rücksicht auf schleifende Schnitte oder unzugängliche Schnittpunkte ein geeigneter Spielraum gewahrt bleibt:

Sind drei beliebige Strecken OX, OY, OZ einer Ebene gegeben, so findet man die Umrissellipse der dem rechtwinkligen Axenkreuze, dessen Parallelprojection jene Strecken darstellen, umschriebene Kugel folgendermaassen: Entspricht in der affinen Verwandtschaft, bei welcher dem Dreiecke OYZ das bei O_0 rechtwinklige und gleichschenklige Dreieck $O_0Y_0Z_0$ zugeordnet ist, dem Punkte X der Punkt X_0, so mache man $O_0D_0 \perp O_0X_0$ und $= O_0Y = O_0Z$, nehme ferner E_0 auf der Geraden O_0X_0 so an, dass $O_0E_0 = D_0X_0$ ist; entsprechen dann in jener affinen Verwandtschaft den Punkten D_0 und E_0 umgekehrt die Punkte D und E, so sind OD und OE zwei conjugirte Halbmesser der gesuchten Umrissellipse.

Ueber die Darstellung der Integrale erster Gattung durch ein Fundamentalsystem.

(Von Herrn *K. Hensel.*)

Als eine Anwendung und Erweiterung der in meiner Abhandlung „Ueber einen neuen Fundamentalsatz in der Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen“ (dieses Journal Bd. 115 S. 254) gefundenen Resultate soll in dieser Arbeit eine vollständige Darstellung aller Integranden erster Gattung eines Gattungsbereiches oder Körpers durch ein Fundamentalsystem gegeben, und hierauf die charakteristische Eigenschaft eines solchen Fundamentalsystemes hergeleitet werden; ich benutze hier die Bezeichnungen jener Arbeit, ohne sie noch einmal zu erklären.

§ 1.

Die Integranden und die algebraischen Formen erster Gattung.

Zunächst sollen die Bedingungen kurz angegeben werden, denen eine algebraische Function Y eines beliebigen Bereiches $\mathfrak{G}(x)$ genügen muss, damit das algebraische Integral $\int Y dx$ allenthalben endlich, also ein Integral der ersten Gattung ist. Bekanntlich ist dies dann und nur dann der Fall, wenn für jeden Werth

$$x = \frac{a_1}{a_2}$$

der unabhängigen Variablen, also auch für $x = \infty$, d. h. für $a_2 = 0$ das Differential Ydx sich auf Null reducirt.

Setzt man wie in der vorigen Arbeit $x = \frac{x_1}{x_2}$ also

$$dx = \frac{x_2 dx_1 - x_1 dx_2}{x_2^2}$$

und setzt die homogene algebraische Form der -2ten Dimension:

$$\frac{Y}{x_2^2} = \overline{\eta}$$

so geht das zu untersuchende Differential über in:

$$(1.) \qquad Y dx = \bar{\eta}(x_2 dx_1 - x_1 dx_2).$$

Es sei nun $\xi = a_2 x_1 - a_1 x_2$ derjenige homogene Linearfactor, dessen Nullstelle $x = \frac{a_1}{a_2}$ ist und ferner sei $\xi' = b_2 x_1 - b_1 x_2$ irgend ein anderer Linearfactor, dessen Nullstelle $\frac{b_1}{b_2}$ nicht mit $\frac{a_1}{a_2}$ zusammenfällt. Aus der bekannten Identität:

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)(x_1 dx_2 - x_2 dx_1) = \xi' d\xi - \xi d\xi'$$

ergiebt sich dann, dass sich die beiden Functionaldeterminanten $(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$ und $(\xi' d\xi - \xi d\xi')$ nur um eine nicht verschwindende Constante unterscheiden. Hiernach kann also die Bedingung dafür, dass das zu untersuchende Integral von der ersten Gattung ist, so ausgesprochen werden, dass für jeden Linearfactor ξ

$$\lim_{\xi=0}(\bar{\eta}(\xi' d\xi - \xi d\xi')) = \lim\left(\xi'^2 . \bar{\eta} . d\left(\frac{\xi}{\xi'}\right)\right) = 0$$

ist. Da nun an der Stelle $\xi = 0$

$$d\left(\frac{\xi}{\xi'}\right) = \lim_{\xi=0}\left(\frac{\xi}{\xi'} - \left(\frac{\xi}{\xi'}\right)_{\xi=0}\right) = \lim \frac{\xi}{\xi'}$$

ist, so geht jene Bedingung über in $\lim(\xi \xi' \bar{\eta}) = 0$, oder weil ξ' für $\xi = 0$ nicht verschwindet in die einfachere:

$$\lim(\xi \bar{\eta}) = 0.$$

Das Integral $\int Y dx$ ist also dann und nur dann von der ersten Gattung, wenn $Y = x_2^2 \bar{\eta}$ und $\bar{\eta}$ eine solche homogene Form der -2ten Dimension ist, dass für jeden Linearfactor ξ das Product $(\xi \bar{\eta})$ an der Nullstelle von ξ verschwindet.

Ist nun $\bar{\eta}$ irgend eine algebraische Form des Bereiches $\mathfrak{G}(x_1 x_2)$ von beliebiger Dimension, so verschwindet das Product $(\xi \bar{\eta})$ nebst seinen n Conjugirten dann und nur dann an der Stelle $\xi = 0$, wenn in der Gleichung $n$ten Grades, für $(\xi \bar{\eta})$ alle Coefficienten mindestens durch die erste Potenz von ξ theilbar sind, wenn also der grösste gemeinsame Theiler der n conjugirten Formen $(\xi \bar{\eta}_1, \ldots, \xi \bar{\eta}_n)$ eine positive Potenz von ξ als Factor enthält. Also muss der grösste gemeinsame Theiler von $(\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n)$ selbst eine Potenz von ξ enthalten, deren Exponent grösser ist als -1. Eine homogene Form $\bar{\eta}$, für welche das Product $(\xi \bar{\eta})$ stets für $\xi = 0$ verschwindet,

wie auch der Linearfactor ξ gewählt sein möge, soll im Folgenden eine *algebraische Form der ersten Gattung* genannt werden. Genügt nun $\bar{\eta}$ der Gleichung $n$ten Grades:

$$\bar{\eta}^n + A_1(x_1 x_2)\bar{\eta}^{n-1} + \cdots + A_n(x_1 x_2) = 0,$$

so ist der grösste gemeinsame Theiler von $(\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n)$ durch die Gleichung

$$d(x_1, x_2) = \left(A_1, A_2^{\frac{1}{2}}, A_3^{\frac{1}{3}}, \ldots, A_n^{\frac{1}{n}}\right)$$

bestimmt; also ist $\bar{\eta}$ dann und nur dann eine Form der ersten Gattung, wenn diese rational bestimmbare Wurzelform $d(x_1, x_2)$ jeden Linearfactor ξ erhoben zu einer Potenz enthält, deren Exponent grösser ist als -1. Das bis jetzt gefundene Resultat kann hiernach in dem folgenden Satze ausgesprochen werden:

> Das algebraische Integral $\int Y dx$ ist dann und nur dann ein Integral erster Gattung, wenn die homogene Form der -2ten Dimension $\bar{\eta} = \frac{Y}{x_2^2}$ eine Form der ersten Gattung ist.

Hierdurch ist also die Aufsuchung der Integrale erster Gattung vollständig auf die Darstellung aller homogenen Formen der ersten Gattung zurückgeführt, denn man braucht ja aus ihnen nur alle Formen der -2ten Dimension auszusuchen, um alle jene Integranden zu erhalten.

Die Formen erster Gattung stehen den ganzen algebraischen Formen am nächsten, denn während jene vollständig dadurch charakterisirt sind, dass ihr Theiler eine *ganze* Wurzelfunction ist, kann er für diese zwar gebrochen sein, jedoch müssen seine negativen Exponenten sämmtlich echte Brüche sein; jene Theiler müssen also an jeder Stelle $\xi = 0$ von niedrigerer Ordnung unendlich klein werden, also $\frac{1}{\xi}$ oder als irgend eine *rationale* Form von (x_1, x_2), welche an derselben Stelle unendlich wird. Die Formen erster Gattung bilden hiernach einen Bereich, welcher den der ganzen algebraischen Formen als Theilbereich umfasst.

Für die Formen erster Gattung gelten nun die folgenden leicht zu beweisenden Sätze:

1) Die Summe zweier (oder mehrerer) Formen erster Gattung von derselben Dimension ist wieder eine Form erster Gattung. Denn sind für jeden Linearfactor ξ die Producte $(\xi\bar{\eta})$ und $(\xi\bar{\eta}')$ nebst ihren conjugirten

für $\xi = 0$ ebenfalls gleich Null, so gilt dasselbe auch von ihrer Summe, d. h. von $\xi(\bar{\eta}+\bar{\eta}')$.

2) Das Product einer beliebigen Form erster Gattung $\bar{\eta}$ und einer anderen *ganzen* algebraischen Form η ist wiederum eine Form erster Gattung. Denn ist für jeden Linearfactor ξ $(\xi\bar{\eta}) = 0$ an der Nullstelle von ξ, so gilt dasselbe auch von dem Producte $\xi(\eta\bar{\eta})$, wenn η algebraisch ganz also allenthalben endlich ist.

Hieraus ergiebt sich als Corollar, dass auch das Product $u\bar{\eta}$ der ersten Gattung angehört, wenn u eine beliebige ganze *rationale* Form von (x_1, x_2) ist.

3) Eine rationale Form u von x_1, x_2 ist dann und nur dann von der ersten Gattung, wenn sie ganz ist, denn besässe sie einen Nenner ξ, so könnte ξu an der Stelle $\xi = 0$ nicht verschwinden.

Endlich ergiebt sich aus den beiden ersten Sätzen noch der folgende:

4) Sind $(\bar{\eta}^{(1)}, \ldots, \bar{\eta}^{(n)})$ irgendwelche Formen erster Gattung, so ist jede homogene Form:

$$\bar{\eta} = u_1\bar{\eta}^{(1)} + \cdots + u_n\bar{\eta}^{(n)}$$

ebenfalls eine solche Form, wenn $u_1, \ldots, u_n$ beliebige ganze rationale Formen von x_1, x_2 sind.

§ 2.

Die Beziehung zwischen den Fundamentalsystemen für die ganzen algebraischen Formen und für die Formen erster Gattung.

In der bereits erwähnten früheren Arbeit habe ich nachgewiesen, dass alle ganzen homogenen Formen η und nur sie durch ein sogenanntes Fundamentalsystem $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ in der Form:

$$\eta = u_1\eta^{(1)} + \cdots + u_n\eta^{(n)}$$

dargestellt werden können, deren Coefficienten ganze homogene Formen von (x_1, x_2) sind.

Ich will jetzt zeigen, dass man ganz ebenso die Formen erster Gattung $\bar{\eta}$ und nur sie eindeutig durch ein „Fundamentalsystem für die Formen erster Gattung“ $(\bar{\eta}^{(1)}, \ldots, \bar{\eta}^{(n)})$ in der Form:

$$\bar{\eta} = u_1\bar{\eta}^{(1)} + \cdots + u_n\bar{\eta}^{(n)}$$

mit ganzen Coefficienten $u_1, \ldots, u_n$ darstellen kann.

Hierzu führen die folgenden Bemerkungen über algebraische Systeme und ihre reciproken Systeme. Es seien

$$\eta^{(1)},\ \eta^{(2)},\ \ldots,\ \eta^{(n)}$$

n beliebige aber unabhängige homogene Formen, es soll also die Determinante des algebraischen Systemes

$$(\eta_k^{(i)}) = \begin{pmatrix} \eta_1^{(1)} & \ldots & \eta_1^{(n)} \\ \vdots & & \\ \eta_n^{(1)} & \ldots & \eta_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

von Null verschieden sein; dann giebt es ein und nur ein zu diesem reciprokes System:

$$(\bar{\eta}_k^{(i)}) = \begin{pmatrix} \bar{\eta}_1^{(1)} & \ldots & \bar{\eta}_1^{(n)} \\ \vdots & & \\ \bar{\eta}_n^{(1)} & \ldots & \bar{\eta}_n^{(n)} \end{pmatrix},$$

welches mit ihm componirt das Einheitssystem ergiebt. Die Elemente desselben ergeben sich aus den Gleichungen:

$$\text{(1.)} \qquad \bar{\eta}_k^{(i)} = \frac{H_k^{(i)}}{H},$$

wo $H = |\eta_k^{(i)}|$ und $H_k^{(i)}$ die zu dem Elemente $\eta_k^{(i)}$ gehörige Unterdeterminante $(n-1)$-ter Ordnung von H bedeutet. Also sind die Elemente $\bar{\eta}$ rationale Functionen von (x_1, x_2) und den n conjugirten Grössen $y_1, \ldots, y_n$, jedoch folgt aus der obigen Darstellung (1.) der Elemente $\bar{\eta}_k^{(i)}$ leicht, dass allgemein die Elemente der $k$ten Zeile des reciproken Systemes nur von y_k und (x_1, x_2) explicite abhängen. Vertauscht man nämlich in (1.) irgend zwei conjugirte Grössen y_r und y_s mit einander, so bleibt, falls beide von y_k verschieden sind, $\bar{\eta}_k^{(i)}$ ungeändert, weil auf der rechten Seite, sowohl der Zähler als der Nenner sein Zeichen ändert; vertauscht man dagegen y_k selbst mit einem conjugirten Elemente y_l, so gehen $H_k^{(i)}$ und H bezw. in $-H_l^{(i)}$ und $-H$ über, d. h. $\bar{\eta}_k^{(i)}$ wird hierdurch in $\bar{\eta}_l^{(i)}$ verwandelt. Die Elemente $\bar{\eta}_k^{(i)}$ der $k$ten Zeile von $(\bar{\eta}_k^{(i)})$ sind also symmetrische Functionen von $y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n$ können also als rationale Functionen von y_k, x_1, x_2 dargestellt werden, und die n Elemente $\bar{\eta}_1^{(i)}, \ldots, \bar{\eta}_n^{(i)}$ einer Verticalreihe sind ebenso wie $\eta_1^{(i)}, \ldots, \eta_n^{(i)}$ conjugirte algebraische Functionen.

Sind ferner $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ die Dimensionen der homogenen Formen $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)}$, so sind auch $\bar{\eta}^{(1)}, \ldots, \bar{\eta}^{(n)}$ homogen und ihre Dimensionen

sind bezw. $-\mu_1, -\mu_2, \ldots, -\mu_n$, denn in der Darstellung (1.) eines jeden Elementes $\bar{\eta}_k^{(i)}$ des reciproken Systemes hat der Nenner die Dimension $(\mu_1+\cdots+\mu_n)$, der Zähler die Dimension $(\mu_1+\cdots+\mu_n)-\mu_i$, weil in ihm die $i$te Colonne von H fortgelassen ist, also besitzt $\bar{\eta}_k^{(i)}$ in der That die Dimension $-\mu_i$.

Sind die Elementartheiler der beiden Systeme $(\eta_k^{(i)})$ und $(\bar{\eta}_k^{(i)})$ beziehlich

$$e_1, \quad e_2, \quad \ldots, \quad e_n \quad \text{und} \quad \bar{e}_1, \quad \bar{e}_2 \quad \ldots, \quad \bar{e}_n$$

so sind nach einer bekannten Eigenschaft der reciproken Systeme die einen abgesehen von ihrer Reihenfolge die reciproken Werthe der anderen, es ist nämlich allgemein:

$$\bar{e}_i = \frac{1}{e_{n-i+1}},$$

denn bei dieser Anordnung ist ja jede der Grössen $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ ein Vielfaches der vorhergehenden.

Es sei nun speciell $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ ein Fundamentalsystem für die ganzen algebraischen Formen des Bereiches, so soll bewiesen werden, dass das reciproke System $(\bar{\eta}^{(1)}, \ldots, \bar{\eta}^{(n)})$ ein Fundamentalsystem für die Formen erster Gattung ist.

Ist zunächst $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ ein Fundamentalsystem, so sind die Elementartheiler $e_1, \ldots, e_n$ des Systemes $(\eta_k^{(i)})$ ganze reducirte Wurzelformen. Hieraus folgt zunächst, dass die Elemente $\bar{\eta}_k^{(i)}$ selbst sämmtlich Formen erster Gattung sind. In der That ist ihr grösster gemeinsamer Theiler gleich dem ersten Elementartheiler $\bar{e}_1 = \frac{1}{e_n}$ des Systemes $(\bar{\eta}_k^{(i)})$; alle diese Elemente können also in der Form

$$\bar{\eta}_k^{(i)} = \frac{\gamma_k^{(i)}}{e_n} \tag{2.}$$

geschrieben werden, wo die Zähler $\gamma_k^{(i)}$ sämmtlich algebraisch ganz sind, während der gemeinsame Nenner nach der Voraussetzung nur Linearfactoren mit positiven echt gebrochenen Exponenten enthält. Also sind $\bar{\eta}^{(1)}, \ldots, \bar{\eta}^{(n)}$ in der That sämmtlich Formen erster Gattung. Dasselbe gilt auch von jeder Form:

$$\bar{\eta} = u_1\bar{\eta}^{(1)}+\cdots+u_n\bar{\eta}^{(n)}, \tag{3.}$$

wenn $u_1, \ldots, u_n$ beliebige ganze rationale Formen von x_1, x_2 sind, denn auch diese stellen ja wegen (2.) ebenfalls nur algebraische Formen dar, deren Nenner höchstens gleich e_n ist. Ist aber umgekehrt $\bar{\eta}$ in jener Glei-

chung (3.) eine Form erster Gattung, so müssen $u_1, \ldots, u_n$ nothwendig ganz sein. Multiplicirt man nämlich die n aus (3.) sich ergebenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_1 &= u_1\eta_1^{(1)} + \cdots + u_n\eta_1^{(n)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{\eta}_n &= u_1\eta_n^{(1)} + \cdots + u_n\eta_n^{(n)} \end{aligned}$$

der Reihe nach mit $\eta_1^{(h)}, \ldots, \eta_n^{(h)}$ und addirt sie, so erhält man für jeden der Coefficienten u_h die Darstellung:

$$u_h = \bar{\eta}_1\eta_1^{(h)} + \bar{\eta}_2\eta_2^{(h)} + \cdots + \bar{\eta}_n\eta_n^{(h)},$$

und da hier die n Formen $\eta_1^{(h)}, \ldots, \eta_n^{(h)}$ algebraisch ganz, aber $\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n$ Formen erster Gattung sind, so müssen $u_1, \ldots, u_n$ selbst Formen erster Gattung sein, und da sie rational sind, so müssen sie nach dem Satze (3.) am Ende des vorigen Abschnittes nothwendig *ganze* rationale Formen von (x_1, x_2) sein.

Also ist das System $(\bar{\eta}^{(1)}, \ldots, \bar{\eta}^{(n)})$ in der That stets ein Fundamentalsystem für die Formen erster Gattung, wenn sein reciprokes $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ ein solches für die ganzen algebraischen Formen ist. Da nun in der vorigen Arbeit nachgewiesen war, dass ein solches Fundamentalsystem $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ für die ganzen algebraischen Formen stets gefunden werden kann, so ist damit auch die Existenz mindestens eines Fundamentalsystemes für die Formen erster Gattung dargethan. Hat man nun ausser $(\bar{\eta}^{(1)}, \ldots, \bar{\eta}^{(n)})$ noch irgend ein anderes Fundamentalsystem $(\bar{\eta}^{(1)}, \ldots, \bar{\eta}^{(n)})$ für jene Formen erster Gattung, so ist jedes Element des einen durch das andere mit *ganzen* Coefficienten darstellbar; da somit die beiden Systeme $(\bar{\eta}_k^{(i)})$ und $(\bar{\eta}_k^{(i)})$ einander äquivalent sind, so besitzen sie gleiche Elementartheiler. Demnach besitzt auch das reciproke System zu $(\bar{\eta}^{(1)}, \ldots, \bar{\eta}^{(n)})$ dieselben Elementartheiler wie $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ und da diese sämmtlich ganze reducirte Wurzelformen sind, so ist auch das zu $(\bar{\eta}^{(1)}, \ldots, \bar{\eta}^{(n)})$ reciproke System ein Fundamentalsystem für die ganzen homogenen Formen des Bereiches, man erhält somit den folgenden wichtigen Satz:

> Ein System ist dann und nur dann ein Fundamentalsystem für die Formen erster Gattung eines Bereiches, wenn sein reciprokes ein Fundamentalsystem für die ganzen Formen desselben Bereiches ist.

Ich möchte an dieser Stelle auf die schöne Arbeit von *Dedekind* und *Weber*, Theorie der algebraischen Function einer Veränderlichen (dieses Journal Bd. 92) hinweisen, in welcher die Beziehungen reciproker Systeme allerdings in anderer Bezeichnungsweise und ohne die Benutzung der algebraischen Elementartheiler, behandelt werden. Jedoch wird a. a. O. die im folgenden Abschnitte dieser Arbeit gefundene charakteristische Eigenschaft der Fundamentalsysteme der Formen erster Gattung nicht hergeleitet; dies war schon deshalb nicht möglich, weil die Herren Verfasser überhaupt die Elementartheiler algebraischer Systeme nicht in Betracht gezogen haben, und weil sie von vornherein nur die algebraischen *Functionen* und nicht die homogenen algebraischen *Formen* betrachten, deren Hinzuziehung für die ausnahmslose Gültigkeit jenes Satzes unerlässlich ist. Ebenso ergiebt sich nicht die Beziehung, welche zwischen den Elementartheilern eines beliebigen Systems und den Theilern der beiden Fundamentalsysteme $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ und $(\overline{\eta}^{(1)}, \ldots, \overline{\eta}^{(n)})$ besteht, und deren Herleitung den wichtigsten Theil der vorliegenden beiden Arbeiten bildet.

§ 3.

Die charakteristischen Eigenschaften eines Fundamentalsystems für die Formen erster Gattung.

Die im letzten Abschnitte gefundene Beziehung zwischen einem Fundamentalsysteme $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ für die ganzen Formen und einem solchen $(\overline{\eta}^{(1)}, \ldots, \overline{\eta}^{(n)})$ für die Formen erster Gattung will ich jetzt benutzen, um die charakteristische Eigenschaft dieses Systems $(\overline{\eta}^{(1)}, \ldots, \overline{\eta}^{(n)})$ anzugeben, und um ein Verfahren zu entwickeln, durch welches man von einem beliebigen algebraischen Systeme $(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})$ ausgehend direct zu einem Fundamentalsysteme für die Formen erster Gattung und damit auch zu einem vollständigen Systeme von Integralen erster Gattung gelangen kann.

Ein Fundamentalsystem $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ für die ganzen Formen war als solches dadurch vollständig charakterisirt, dass seine Elementartheiler sämmtlich *ganze* reducirte Wurzelformen sind, d. h. solche, deren Linearfactoren nur positive echte Brüche als Exponenten haben. Da nun das Fundamentalsystem $(\overline{\eta}^{(1)}, \ldots, \overline{\eta}^{(n)})$ reciprok zu $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ ist, so müssen seine Elementartheiler die reciproken Werthe von ganzen reducirten Wurzelformen sein, d. h. solche deren Linearfactoren lauter negative echte Brüche als Exponenten haben.

Ebenso nun wie eine Wurzelform eine *ganze* reducirte Form genannt wurde, wenn alle ihre Exponenten *positive echte* Brüche sind, so soll eine Wurzelform, deren Exponenten sämmtlich *negative echte* Brüche sind, welche also die Form hat:

$$d(x_1, x_2) = \xi_1^{-\delta_1} \ldots \xi_h^{-\delta_h} \qquad (0 < \delta_i < 1)$$

eine *gebrochene reducirte Wurzelform* genannt werden. Dann ist der reciproke Werth jeder ganzen reducirten Wurzelform eine gebrochene reducirte Wurzelform und umgekehrt.

Hieraus folgt zunächst, dass die Elementartheiler eines Fundamentalsystemes $(\overline{\eta}^{(1)}, \ldots, \overline{\eta}^{(n)})$ für die Formen erster Gattung sämmtlich gebrochene reducirte Wurzelformen sind. Ist umgekehrt $(\overline{\eta}^{(1)}, \ldots, \overline{\eta}^{(n)})$ ein System, dessen Elementartheiler gebrochene reducirte Wurzelformen sind, so ist es ein Fundamentalsystem für die Formen erster Gattung, denn unter dieser Voraussetzung sind die Elementartheiler seines reciproken Systemes ganze reducirte Wurzelformen, dieses ist also ein Fundamentalsystem für die ganzen Formen, mithin $(\overline{\eta}^{(1)}, \ldots, \overline{\eta}^{(n)})$ ein solches für die Formen erster Gattung. Es ergiebt sich also der wichtige Satz:

> Ein System $(\overline{\eta}^{(1)}, \ldots, \overline{\eta}^{(n)})$ ist dann und nur dann ein Fundamentalsystem für die algebraischen Formen erster Gattung, wenn seine Elementartheiler reducirte gebrochene Wurzelformen sind.

Jedes algebraische System $(Y_k^{(i)})$ ist äquivalent einem Diagonalsysteme $(D_1(x_1, x_2), D_2(x_1, x_2), \ldots, D_n(x_1, x_2))$, dessen Elemente lauter Wurzelformen sind. Sind:

$$(1.) \qquad \begin{cases} \xi^{\delta_1}, & \xi^{\delta_2}, & \ldots, & \xi^{\delta_n}, \\ \xi'^{\delta'_1}, & \xi'^{\delta'_2}, & \ldots, & \xi'^{\delta'_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{cases}$$

die bezw. in $D_1, \ldots, D_n$ enthaltenen gebrochenen Potenzen der einzelnen Linearfactoren $\xi, \xi', \ldots$ so wird jenes Diagonalsystem $(D_1, \ldots, D_n)$ im Sinne der Aequivalenz nicht geändert, wenn man jene Potenzen in den einzelnen Zeilen von (1.) beliebig unter einander permutirt, und alsdann die unter einander stehenden Potenzen mit einander multiplicirt. Speciell erhält man das System $(E_1, \ldots, E_n)$ der Elementartheiler von $(Y_k^{(i)})$, wenn man die Anordnung in (1.) so gemacht voraussetzt, dass die Exponenten $(\delta_1, \delta_2, \ldots; \delta'_1, \delta'_2, \ldots; \ldots)$ ihrer Grösse nach auf einander folgen. Ist nun speciell das System $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$ ein Fundamentalsystem für die ganzen

algebraischen Formen, so müssen *alle* Exponenten δ_i, δ_i', ... positive echte Brüche sein, ist es dagegen ein Fundamentalsystem für die Formen erster Gattung, so müssen jene Exponenten negative echte Brüche sein; im ersten Falle sind also die Wurzelformen $(D_i(x_1, x_2))$ bei *jeder* Anordnung reducirte ganze, im zweiten Falle reducirte gebrochene Wurzelformen, und auch diese allgemeinere Bedingung ist charakteristisch dafür, dass ein gegebenes System eine jener beiden Eigenschaften besitze.

Ist aber ein beliebiges algebraisches System $(Y_k^{(i)})$ einem Diagonalsystem $(D_i(x_1, x_2))$ äquivalent, so ist wie in der vorigen Abhandlung bewiesen wurde, jedes andere System $(y_k^{(i)})$ einem Diagonalsysteme $d_i(x_1, x_2)$ äquivalent, welches so angeordnet vorausgesetzt werden kann, dass je zwei entsprechende Wurzelformen $D_i(x_1, x_2)$ und $d_i(x_1, x_2)$ in einem rationalen Verhältniss stehen, dass also die n Quotienten $\frac{D_i(x_1, x_2)}{d_i(x_1, x_2)}$ *rationale* homogene Formen von (x_1, x_2) sind. Man findet daher alle Diagonalsysteme $(d_i(x_1, x_2))$, wenn man die Exponenten $(\delta_i, \delta_i', \ldots)$ der in den Wurzelfunctionen $D_i(x_1, x_2)$ enthaltenen Potenzen ξ^{δ_i}, $\xi'^{\delta_i'}$, ... um beliebige *ganze* Zahlen vermehrt oder vermindert. Unter den so sich ergebenden Systemen $(d_i(x_1, x_2))$ giebt es nun eines und nur eines, dessen Exponenten δ, δ' sämmtlich *positive* echte Brüche und ebenso auch nur ein einziges, wo alle jene Exponenten *negative* echte Brüche sind, und zwar erhält man diese, wenn man die ursprünglichen Exponenten δ_i, δ_i', ..., das eine Mal durch ihre kleinsten positiven, das andere Mal durch ihre kleinsten negativen Reste ersetzt, und die so sich ergebenden Diagonalsysteme $(d_i(x_1, x_2))$ und $(\bar{d}_i(x_1, x_2))$ sind es daher, denen die beiden Arten von Fundamentalsystemen beziehlich äquivalent sein müssen. Offenbar erhält man aber jene Systeme (d_i) und $(\bar{d}_i)$ auch dadurch aus dem gegebenen Systeme (D_i), wenn man jedes seiner einzelnen Elemente $D_i(x_1, x_2)$ das eine Mal durch den grössten in ihm enthaltenen *rationalen* Theiler $[D_i(x_1, x_2)]$ das andere Mal durch sein kleinstes *rationales* Vielfaches $\{D_i(x_1, x_2)\}$ dividirt, und hierdurch hat man ein directes und sehr elegantes Verfahren, um aus den Elementartheilern eines ganz beliebig gegebenen algebraischen Systemes $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$ z. B. von $(1, y, y^2, \ldots, y^{n-1})$ die Elementartheiler des Fundamentalsystemes für die ganzen Grössen, sowie für die algebraischen Grössen erster Gattung abzuleiten. Ersetzt man jetzt nämlich das System $(D_i(x_1, x_2))$ durch das ihm äquivalente rational bestimmbare System $(E_i(x_1, x_2))$ der Elementartheiler von $(Y_k^{(i)})$ so kann jenes Resultat in dem folgenden einfachen Satze ausgesprochen werden:

Es sei $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$ irgend ein unabhängiges System von n algebraischen Functionen oder Formen des Körpers $\mathfrak{G}(x)$ und

$$E_1, \quad E_2, \quad \ldots, \quad E_n$$

die Elementartheiler des Systemes $(Y_k^{(i)})$; sind dann

$$[E_1], \quad [E_2], \quad \ldots, \quad [E_n]$$

die grössten rationalen Theiler und

$$\{E_1\}, \quad \{E_2\}, \quad \ldots, \quad \{E_n\}$$

die kleinsten rationalen Vielfachen derselben, so ist das Fundamentalsystem $(\eta_k^{(i)})$ für die ganzen algebraischen Formen dem System

$$\left(\frac{E_1}{[E_1]}, \ldots, \frac{E_n}{[E_n]}\right) = (R(E_i))$$

von reducirten ganzen Wurzelformen, dagegen das Fundamentalsystem $(\bar{\eta}_k^{(i)})$ für die Formen erster Gattung dem Systeme:

$$\left(\frac{E_1}{\{E_1\}}, \ldots, \frac{E_n}{\{E_n\}}\right) = (\bar{R}(E_i))$$

von reducirten gebrochenen Wurzelformen äquivalent und aus ihnen werden die Elementartheiler jenes Systems einfach dadurch erhalten, dass man die in ihnen enthaltenen Potenzen derselben Linearfactoren nach der Grösse ihrer Exponenten ordnet.

Mit Hülfe des so gefundenen Fundamentalsystemes kann man nunmehr alle unabhängigen Integranden erster Gattung vollständig aufstellen und ihre Anzahl bestimmen. Nach den im ersten Paragraphen dieser Arbeit gefundenen Resultaten sind alle diese und nur sie in dem folgenden Ausdruck enthalten:

$$Y = x_2^2 \bar{\eta} = x_2^2 (u_1 \bar{\eta}^{(1)} + \cdots + u_n \bar{\eta}^{(n)}),$$

wo $\bar{\eta}$ eine Form der (-2)-ten Dimension ist, wo also $u_1, u_2, \ldots, u_n$ beliebige ganze homogene Formen der Dimensionen $\mu_1 - 2$, $\mu_2 - 2$, $\ldots$, $\mu_n - 2$ sind, da diese ja die Dimensionen von $\bar{\eta}^{(1)}, \ldots, \bar{\eta}^{(n)}$ zu -2 ergänzen; jedoch sind alle diejenigen Coefficienten u_i gleich Null anzunehmen, für welche $\mu_i - 2$ negativ also u_i nicht ganz sein würde. Da nun jede ganze Form u_i der Dimension $\mu_i - 2$ genau $\mu_i - 1$ Glieder enthält, so erkennt man leicht, (vgl. auch meine Arbeit „Theorie der algebraischen Functionen und der algebraischen Integrale“, dieses Journal Bd. 109), dass die Anzahl p der unab-

hängigen Integrale erster Gattung, oder das Geschlecht des Bereiches $\mathfrak{G}(x)$ durch die Gleichung

$$p = N-n+1$$

gegeben ist, wenn $N=(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n)$ die Gesammtdimension des Fundamentalsystemes $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ für die ganzen Formen bedeutet.

Als eine ganz einfache Anwendung möge in dieser Arbeit noch das Geschlecht der allgemeinen reinen Gleichung des $n$ten Grades bestimmt und ihre Integrale erster Gattung angegeben werden. Sei also, wie in der vorigen Arbeit:

$$y^n = a(x) = \Pi \xi_i^{n_i},$$

wo die ξ_i die homogenen Linearfactoren von $a(x)$ bedeuten, wo also die Summe der positiven und negativen Exponenten n_i gleich Null ist. Wie a. a. O. ausgeführt wurde ist in diesem Falle das System:

$$1, \quad y, \quad y^2, \quad \ldots, \quad y^{n-1}$$

bereits ein kanonisches für jeden Linearfactor ξ, weil allgemein $y^i = a^{\frac{i}{n}}$ ist. Also ist das hieraus abgeleitete System $(\overline{\eta}^{(1)}, \ldots, \overline{\eta}^{(n)})$

$$1, \quad \frac{y}{\left\{a^{\frac{1}{n}}\right\}}, \quad \ldots, \quad \frac{y^{n-1}}{\left\{a^{\frac{n-1}{n}}\right\}}$$

ein Fundamentalsystem für die homogenen Formen erster Gattung. Also sind alle Integranden erster Gattung und nur sie als homogene lineare Functionen mit constanten Coefficienten der folgenden homogenen Formen der nullten Dimension darstellbar:

$$\frac{x_1^{h_i} x_2^{\varrho_i - h_i} y^i}{\left\{a^{\frac{1}{i}}\right\}}, \qquad (h_i = 0, 1, \ldots, \varrho_i - 2)$$

wo allgemein ϱ_i die Dimension der rationalen homogenen Form $\left\{a^{\frac{1}{i}}\right\}$ bedeutet, und wo h_i nur die Werthe bis zu $\varrho_i - 2$ annehmen darf, weil jeder Integrand ein Vielfaches von x_2^2 ist; hier sind jedoch alle die Functionen fortzulassen, für welche ϱ_i einen der Werthe 0 oder 1 hat, weil für sie h_i negativ sein würde. Ersetzt man hier x_2 durch 1 und x_1 durch x, wobei jene Formen ungeändert bleiben, so ergiebt sich die folgende einfache Darstellung aller Integrale erster Gattung:

$$J = \sum_{i,h_i} c_{ih_i} \int \frac{x^{h_i} y^i}{\left\{a^{\frac{i}{n}}\right\}} dx, \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, n-1 \\ h_i = 0, 1, \ldots, \varrho_i - 2 \end{pmatrix}$$

wo die Coefficienten c_{ih_i} beliebige Constanten bedeuten.

Das Geschlecht der durch die reine Gleichung constituirten Klasse ist gleich der Gesammtdimension N des Fundamentalsystemes, vermindert um $n-1$. Nach den Ergebnissen der vorigen Arbeit war aber:

$$N = \tfrac{1}{2}\sum_{a}(n-(n,\ n_a)),$$

wo (n, n_a) den grössten gemeinsamen Theiler von n und n_a bedeutet, und sich die Summation auf alle Exponenten n_a bezieht. Also ist für die reine Gleichung

$$p = \tfrac{1}{2}\Sigma(n-(n,\ n_a))-n+1.$$

In dem einfachsten Falle, in welchem $a = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ und $f(x)$ und $g(x)$ beide von gleichem Grade sind, kann jene reine Gleichung folgendermassen geschrieben werden:

$$y^n = \frac{\xi_1 \dots \xi_r}{\xi'_1 \dots \xi'_r},$$

wo $\xi_1, \dots, \xi_r$; $\xi'_1, \dots, \xi'_r$ sämmtlich von einander verschiedene Linearfactoren sind. Hier ist für jeden Linearfactor $(n, n_a) = 1$, es ergiebt sich also für p der Werth:

$$p = \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{2r}(n-1)-n+1 = (r-1)(n-1).$$

Berlin, den 16. Juli 1895.

Biegung mit Erhaltung der Hauptkrümmungsradien.

(Von Herrn *J. N. Hazzidakis* in Athen.)

Im 42. Cahier de l'École Polytechnique (p. 73—92) hat *Ossian Bennet* die interessante Aufgabe „alle Flächen zu bestimmen, welche mit Erhaltung der beiden Krümmungsradien gebogen werden können" behandelt und gezeigt, dass es ausser den Minimalflächen und den Flächen mit constanter mittlerer Krümmung, noch eine andere Familie von Flächen giebt, welche die genannte Eigenschaft haben und über die er sich so ausspricht: „Les surfaces précédentes ont un grand degré de généralité, le même degré de généralité que les surfaces à courbure moyenne constante, car nos resultats contiennent deux fonctions arbitraires". Diese letztere Familie von Flächen hat er aber nicht näher bestimmt, weil es ihm nicht gelang, nachdem er die charakteristischen Grössen P, Q, R, S der Flächen bestimmt hatte, die Differentialgleichungen zu integriren, von denen die Bestimmung der Coordinaten der Flächen abhängt.

In dieser Arbeit werden die in Rede stehenden Flächen vollständig bestimmt. Die dazu erforderliche Integration ermöglichte mir eine Eigenschaft der Differentialgleichung, von der die Bestimmung der Coordinaten einer beliebigen Fläche abhängt, wenn ihre Hauptgrössen, in Bezug auf ihre Nulllinien, bekannt sind, welche darin besteht, dass, *wenn irgend eine particuläre Lösung dieser Gleichung bekannt ist, ein integrirender Factor derselben gefunden und die vollständige Integration jener Gleichung auf Quadraturen zurückgeführt wird.*

Die Gleichungen der Flächen, von denen die Rede ist, sind folgende

$$\begin{aligned} x &= \omega\{C_1 + C_2\varphi + C_3\varphi^2\} + C_3 f, \\ y &= \omega\{C_1' + C_2'\varphi + C_3'\varphi^2\} + C_3' f, \\ z &= \omega\{C_1'' + C_2''\varphi + C_3''\varphi^2\} + C_3'' f, \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\omega = \frac{(v+t)(u-t)}{u+v},$$

$$\varphi = \int \frac{V\,dv}{(v+t)^2} - \int \frac{U\,du}{(u-t)^2},$$

$$f = \int \frac{V^2\,dv}{(v+t)^2} + \int \frac{U^2\,du}{(u-t)^2}.$$

U und V sind willkürliche Functionen resp. von u und v, t ist der Biegungsparameter.

Die neun Constanten C müssen folgenden sechs Gleichungen genügen:

$$\Sigma C_1^2 = 0, \quad \Sigma C_2^2 = -1, \quad \Sigma C_3^2 = 0,$$

$$\Sigma C_2 C_3 = 0, \quad \Sigma C_3 C_1 = \tfrac{1}{2}, \quad \Sigma C_1 C_2 = 0.$$

Ich bemerke noch, dass alle Flächen, die mit Erhaltung ihrer Hauptkrümmungsradien gebogen werden können, isometrische Krümmungslinien haben.

Die abwickelbaren Flächen sind in dieser Betrachtung gänzlich ausgeschlossen.

Seien $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ die Nulllinien irgend einer Fläche, also sei $E = 0$ und $G = 0$, dann haben wir für die Hauptgrössen F, δ, δ', δ'' dieser Fläche folgende Gleichungen (siehe Bd. 88, S. 68 dieses Journals)

$$(\alpha.) \qquad \frac{\partial^2 lF}{\partial u\,\partial v} + k.F = 0,$$

$$(\beta.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(F\delta)}{\partial v} = F\dfrac{\partial \delta'}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial(F\delta'')}{\partial u} = F\dfrac{\partial \delta'}{\partial v}, \end{cases}$$

wo $k = \delta\delta'' - \delta'^2$ ist.

Sollen nun die Hauptkrümmungsradien ϱ_1, ϱ_2 bei der Biegung invariant bleiben, so soll auch die mittlere Krümmung (welche den Werth $-i\delta'$ hat) invariant bleiben, d. i. unabhängig von dem Biegungsparameter t sein; und umgekehrt, bleibt die mittlere Krümmung $-i\delta'$ bei der Biegung invariant, so bleiben auch beide Radien ϱ_1, ϱ_2 invariant. Wir haben also diejenige Biegung der Fläche zu untersuchen, bei der die Hauptgrösse δ' unabhängig von dem Biegungsparameter t ist.

Aus der Gleichung

$$\delta\delta'' - \delta'^2 = k$$

sehen wir (da k die Krümmung der Fläche ist), dass auch das Product

$\delta\delta''$ invariant sein muss. Wenn wir also setzen

$$\delta = f.e^{\omega}, \quad \delta'' = -f.e^{-\omega},$$

so muss f invariant bleiben, dagegen muss sich ω bei der Biegung ändern.

Setzen wir diese Werthe von δ, δ'' in die Gleichungen (β.) ein, so finden wir

$$(\beta'.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial u} = e^{\omega}\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial\delta'}{\partial v} + \dfrac{\partial l(Ff)}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial v} = e^{-\omega}\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial\delta'}{\partial u} - \dfrac{\partial l(Ff)}{\partial v}. \end{cases}$$

Differentiiren wir jetzt die erste dieser Gleichungen nach v, die zweite nach u, und subtrahiren, so erhalten wir die Gleichung

$$e^{\omega}\left\{\frac{\partial\left(\frac{1}{f}\frac{\partial\delta'}{\partial v}\right)}{\partial v} - \frac{1}{f}\frac{\partial\delta'}{\partial v}\cdot\frac{\partial l(Ff)}{\partial v}\right\} - e^{-\omega}\left\{\frac{\partial\left(\frac{1}{f}\frac{\partial\delta'}{\partial u}\right)}{\partial u} - \frac{1}{f}\frac{\partial\delta'}{\partial u}\cdot\frac{\partial l(Ff)}{\partial u}\right\}$$
$$+2\frac{\partial^2 l(Ff)}{\partial u\partial v} + \frac{2}{f^2}\frac{\partial\delta'}{\partial u}\cdot\frac{\partial\delta'}{\partial v} = 0.$$

Diese Gleichung darf aber kein ω enthalten, sonst wäre ω, also auch die Hauptgrössen δ, δ'', ganz bestimmte Functionen von u, v und die Fläche würde keine continuirliche Biegung gestatten, (bekanntlich ist die Fläche der Form nach ganz bestimmt, wenn ihre Hauptgrössen bestimmt sind). Es muss also sein

$$(1.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\left(\frac{1}{f}\frac{\partial\delta'}{\partial u}\right)}{\partial u} - \dfrac{1}{f}\dfrac{\partial\delta'}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial l(Ff)}{\partial u} = 0, \\ \dfrac{\partial\left(\frac{1}{f}\frac{\partial\delta'}{\partial v}\right)}{\partial v} - \dfrac{1}{f}\dfrac{\partial\delta'}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial l(Ff)}{\partial v} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 l(Ff)}{\partial u\partial v} + \dfrac{1}{f^2}\dfrac{\partial\delta'}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial\delta'}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

Die Fälle $\delta' = 0$ und $\delta' = \text{const.}$ übergehe ich, weil es bekannt ist, dass die Minimalflächen und die Flächen mit constanter mittlerer Krümmung alle die betrachtete Eigenschaft haben.

Die zwei ersten Gleichungen (1.) geben nun

$$(2.) \qquad \begin{cases} V'\dfrac{\partial\delta'}{\partial u} = Ff^2, \\ U'\dfrac{\partial\delta'}{\partial v} = Ff^2, \end{cases}$$

wo U', V' beliebige Functionen resp. von u, v sind.

Die Voraussetzung $\frac{1}{V'} = 0$ und $\frac{1}{U'} = 0$ führt zu den Flächen mit constanter mittlerer Krümmung, die wir schon ausgeschlossen haben.

Die Voraussetzung $\frac{1}{V'} = 0$ und $\frac{1}{U'} \gtrless 0$ führt zu abwickelbaren Flächen.

In der That, wenn $\frac{1}{V'} = 0$ ist, so folgt aus (2.)

$$\delta' = \sigma(v) \quad \text{und} \quad Ff^2 = U'.\sigma'(v).$$

Nun finden wir aber aus (1.)

$$Ff = \lambda(u).\mu(v),$$

folglich ist $f = \frac{U'.\sigma'(v)}{\lambda(u).\mu(v)}$ und $F = \frac{\lambda(u)^2.\mu(v)^2}{U'.\sigma'(v)}$, und da F von der Form $\bar{U}.\bar{V}$ ist, so folgt aus der Gleichung (α.) $K = 0$, d. h. die Fläche ist auf der Ebene abwickelbar.

Da wir aber von unserer Betrachtung die abwickelbaren Flächen ausgeschlossen haben, so nehmen wir im Folgenden beide Functionen $\frac{1}{U'}$, $\frac{1}{V'}$ als verschieden von Null an.

Aus den Gleichungen (2.) finden wir jetzt

$$\frac{1}{U'} \cdot \frac{\partial \delta'}{\partial u} = \frac{1}{V'} \cdot \frac{\partial \delta'}{\partial v}, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \delta'}{\partial U} = \frac{\partial \delta'}{\partial V},$$

folglich ist $\delta' = \varphi(U+V)$, wo φ eine willkürliche Function bedeutet, und die Gleichungen (2.) gehen über in

(3.) $$Ff^2 = \varphi'(U+V).U'V',$$

nun giebt aber die dritte der Gleichungen (1.) mit Hülfe der Gleichungen (2.)

$$\frac{\partial^2 l(Ff)^2}{\partial u \partial v} + \frac{2}{U'.V'}(Ff)^2 = 0,$$

also ist

$$(Ff)^2 = -\frac{U_1'V_1'}{(U_1+V_1)^2} U'.V',$$

wo U_1, V_1 zwei neue willkürliche Functionen von u und v bedeuten. Da wir aber statt u irgend eine Function desselben als unabhängige Variable einführen können, so können wir, unbeschadet der Allgemeinheit, $U_1 = u$ setzen. Aus demselben Grunde machen wir $V_1 = v$, folglich ist

(4.) $$(Ff)^2 = -\frac{U'.V'}{(u+v)^2}.$$

Aus den Formeln (3.) und (4.) folgt nun

$$(5.)\qquad \begin{cases} f^2 = -(u+v)^2 . U'V'\varphi'(U+V)^2, \\ F = -\dfrac{1}{(u+v)^2}\cdot\dfrac{1}{\varphi'(U+V)}. \end{cases}$$

Um δ und δ'' zu finden, haben wir aus den Gleichungen (β.):

$$\frac{\partial(F\delta)}{\partial v} = -\frac{U'}{(u+v)^2}, \quad \frac{\partial(F\delta'')}{\partial u} = -\frac{V'}{(u+v)^2},$$

also

$$(6.)\qquad F\delta = \frac{U'}{u+v} + U_2, \quad F\delta'' = \frac{V'}{u+v} + V_2.$$

Es soll aber $\delta\delta'' = -f^2$ sein, folglich muss

$$U_2(vV_2+V') + V_2(uU_2+U') = 0$$

sein, woraus folgt

$$uU_2+U' = U_2 t,$$
$$vV_2+V' = -V_2 t,$$

wo t eine beliebige Constante ist. Die Functionen U_2, V_2 haben also folgende Werthe

$$U_2 = \frac{U'}{t-u}, \quad V_2 = -\frac{V'}{t+v}.$$

Setzen wir diese Werthe von U_2, V_2 in die Formeln (6.) ein, so erhalten wir

$$(6'.)\qquad F\delta = \frac{U'}{u+v}\cdot\frac{t+v}{t-u}, \quad F\delta'' = \frac{V'}{u+v}\cdot\frac{t-u}{t+v}.$$

Aus diesen Werthen von $F\delta$, $F\delta''$ geht nun hervor, dass die gesuchten Flächen isometrische Krümmungslinien haben.

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien ist bekanntlich

$$\delta . du^2 = \delta'' . dv^2$$

und diese wird jetzt

$$\frac{\sqrt{U'}}{t-u}du = \pm\frac{\sqrt{V'}}{t+v}dv,$$

das Integral dieser Gleichung ist von der Form

$$\bar{U} \pm \bar{V} = \text{const.},$$

was die isometrischen Krümmungslinien charakterisirt. (Dass auch die Minimalflächen und die Flächen von constanter mittlerer Krümmung isometrische Krümmungslinien haben, ist bekannt.)

Wir haben noch die Fundamentalgleichung ($\alpha.$) zu berücksichtigen, da wir F, $F\delta$, $F\delta''$ und δ' gefunden haben, so können wir das Krümmungsmaass K berechnen, wir finden auf diese Weise

$$(7.) \qquad K = (u+v)^2 . U'V'\varphi'^2 - \varphi^2 .$$

Setzen wir diesen Werth von K und den Werth von F (5.) in die Gleichung ($\alpha.$) ein, so erhalten wir folgende Bedingungsgleichung für die Functionen φ, U, V:

$$(8.) \qquad \left(2+\frac{\varphi^2}{\varphi'}\right) = U'.V'(u+v)^2 \cdot \left[\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)' + \varphi'\right].$$

Diese Bedingungsgleichung kann auf zwei Arten erfüllt werden; erstens kann man beide Seiten als verschieden von Null annehmen, und zweitens kann man beide Seiten gleich Null voraussetzen.

Erste Lösung.

Ist $\varphi' + \left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)'$ verschieden von Null, so lässt sich die Gleichung (8.) in die Form bringen

$$U'.V'(u+v)^2 = \Phi(\omega), \quad \text{wo} \quad \omega = U+V$$

ist. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass der Ausdruck $U'V'(u+v)^2$ eine Function von ω sei, ist folgende:

$$\frac{U''}{U'^2} + \frac{2}{u+v}\cdot\frac{1}{U'} = \frac{V''}{V'^2} + \frac{2}{u+v}\cdot\frac{1}{V'},$$

und diese wird nur durch folgende Werthe der Functionen U', V' erfüllt

$$U' = \frac{1}{au^2+2bu+c}, \quad V' = \frac{1}{av^2-2bv+c},$$

wo a, b, c beliebige Constanten sind. Folglich ist in diesem Falle

$$(9.) \qquad \omega = \int \frac{du}{au^2+2bu+c} + \int \frac{dv}{av^2-2bv+c}.$$

Der Ausdruck $U'V'(u+v)^2$ muss jetzt eine Function von ω sein, und das ist er auch wirklich. Man findet leicht

$$U'.V'(u+v)^2 = \frac{(u+v)^2}{(au^2+2bu+c)(av^2-2bv+c)} = \left(\frac{e^{R\omega}-e^{-R\omega}}{2R}\right)^2,$$

wo $R^2 = b^2-ac$ ist.

Setzen wir diesen Werth von $U'V'(u+v)^2$ in die Bedingungsgleichung (8.) ein, so erhalten wir für die Function $\varphi(\omega)$ die gewöhnliche Differential-

gleichung

$$(10.)\qquad \left(2+\frac{\varphi^2}{\varphi'}\right) = \left[\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)'+\varphi'\right]\left(\frac{e^{R\omega}-e^{-R\omega}}{2R}\right)^2.$$

Ist die unbekannte Function $\varphi(\omega)$ aus dieser Gleichung gefunden, so werden die Hauptgrössen der Fläche aus den vorhergehenden Formeln leicht abgeleitet. Man findet

$$(11.)\qquad \begin{cases} F = -\dfrac{1}{(u+v)^2}\cdot\dfrac{1}{\varphi'(\omega)}, \\ \delta = -\dfrac{u+v}{au^2+2bu+c}\cdot\varphi'(\omega)\dfrac{t+v}{t-u}, \\ \delta' = \varphi(\omega), \\ \delta'' = -\dfrac{u+v}{av^2-2bv+c}\cdot\varphi'(\omega)\dfrac{t-u}{t+v}. \end{cases}$$

Die Integration der Differentialgleichung (10.) scheint nicht leicht zu sein, nur ein Integral von der ersten Ordnung konnte ich finden. Es ist folgendes:

$$\left[\frac{\varphi''}{\varphi'}-2\sigma_1(\omega)\right]^2-4\varphi.\sigma_1(\omega)+2\sigma(\omega)\frac{\varphi^2}{\varphi'}+2\varphi' = C,$$

wo

$$\sigma(\omega)=\left(\frac{2R}{e^{R\omega}-e^{-R\omega}}\right)^2 \quad \text{und} \quad \sigma_1(\omega)=-R\frac{e^{R\omega}+e^{-R\omega}}{e^{R\omega}-e^{-R\omega}}.$$

Zweite Lösung.

Wenn die unbekannte Function $\varphi(\omega)$ beiden Gleichungen

$$2+\frac{\varphi^2}{\varphi'}=0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)'+\varphi'=0$$

genügt, so wird die Bedingungsgleichung (8.) befriedigt und die Functionen U, V bleiben ganz willkürlich. Dies kann wirklich eintreten, denn die erste dieser Gleichungen giebt

$$(12.)\qquad \varphi(\omega) = \frac{2}{\omega+C},$$

und dieser Werth genügt auch der zweiten Gleichung. Setzt man nun diesen Werth der Function φ in die Formeln (5.) und (6′.) ein, so bekommt man für die Hauptgrössen der gesuchten Fläche folgende Werthe:

$$(13.)\qquad F = \tfrac{1}{2}\frac{(U+V)^2}{(u+v)^2}.$$

$$\delta = 2U'\cdot\frac{t+v}{t-u}\cdot\frac{u+v}{(U+V)^2}, \quad \delta' = \frac{2}{U+V}, \quad \delta'' = 2V'\cdot\frac{t-u}{t+v}\cdot\frac{u+v}{(U+V)^2}.$$

Um die Coordinaten x, y, z der Fläche als Functionen von u, v darzustellen, gehen wir aus von den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial u} &= ae+a'g+A.\delta,\\
\frac{\partial a}{\partial v} &= \frac{\partial a'}{\partial u} = ae'+a'.g'+A.\delta',\\
\frac{\partial a'}{\partial v} &= ae''+a'.g''+A.\delta'',\\
\frac{\partial A}{\partial u} &= A\cdot\frac{\partial l\sqrt{N}}{\partial u}+a(F\delta'-G\delta)+a'(F\delta-E\delta'),\\
\frac{\partial A}{\partial v} &= A\cdot\frac{\partial l\sqrt{N}}{\partial v}+a(F\delta''-G\delta')+a'(F\delta'-E\delta''),
\end{aligned}$$

denen die partiellen Ableitungen der Coordinaten jeder Fläche genügen. Sie werden jetzt, da $E=0$ und $G=0$ ist:

$$(14.)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial u} &= a\frac{\partial lF}{\partial u}+A.\delta,\\
\frac{\partial a}{\partial v} &= \frac{\partial a'}{\partial u} = A.\delta',\\
\frac{\partial a'}{\partial v} &= a'\frac{\partial lF}{\partial v}+A.\delta'',\\
\frac{\partial A}{\partial u} &= A\frac{\partial lF}{\partial u}+aF\delta'+a'F\delta,\\
\frac{\partial A}{\partial v} &= A\frac{\partial lF}{\partial v}+aF\delta''+a'F\delta'.
\end{aligned}\right.$$

Die drei Gleichungen, welche die Ableitungen nach u (d. h. die $\frac{\partial a}{\partial u}$, $\frac{\partial a'}{\partial u}$, $\frac{\partial A}{\partial u}$) geben, bilden ein System von linearen Differentialgleichungen, welches die a, a', A als Functionen von u bestimmt. Ebenfalls bilden die drei übrigen, welche die Ableitungen $\frac{\partial a}{\partial v}$, $\frac{\partial a'}{\partial v}$, $\frac{\partial A}{\partial v}$ enthalten, ein System, das dieselben Variablen a, a', A als Functionen von v bestimmt. Hieraus schliessen wir, dass die allgemeinsten Werthe von a, a', A, wenn F, δ, δ', δ'' gegeben sind, drei willkürliche Constanten enthalten müssen und jeder von ihnen folgende Form haben wird

$$C_1\sigma(u,\ v)+C_2\varphi(u,\ v)+C_3f(u,\ v),$$

wo C_1, C_2, C_3 die willkürlichen Constanten sind, und $\sigma(u, v)$, $\varphi(u, v)$, $f(u, v)$ drei particuläre Werthe desselben.

Eliminiren wir A aus den zwei ersten Gleichungen (14.), so erhalten wir für a die partielle Differentialgleichung

$$(15.) \qquad \frac{\partial la}{\partial u} = \frac{\partial lF}{\partial u} + \frac{\delta}{\delta'} \cdot \frac{\partial la}{\partial v}.$$

Ebenso finden wir für a' die Gleichung

$$(16.) \qquad \frac{\partial la'}{\partial v} = \frac{\partial lF}{\partial v} + \frac{\delta''}{\delta'} \cdot \frac{\partial la'}{\partial u},$$

oder, wenn wir die gefundenen Werthe (13.) von F, δ, δ', δ'' einsetzen

$$(15'.) \qquad \frac{\partial la}{\partial u} = \frac{2U'}{U+V} - \frac{2}{u+v} + U' \cdot \frac{u+v}{U+V} \frac{t+v}{t-u} \frac{\partial la}{\partial v},$$

$$(16'.) \qquad \frac{\partial la'}{\partial v} = \frac{2V'}{U+V} - \frac{2}{u+v} + V' \cdot \frac{u+v}{U+V} \frac{t-u}{t+v} \frac{\partial la'}{\partial u}.$$

Wir versuchen zuerst particuläre Lösungen dieser Gleichungen zu finden. Wenn die erste eine Lösung hat, die von den willkürlichen Functionen U, V unabhängig ist, so enthalten die Ableitungen $\frac{\partial la}{\partial u}$, $\frac{\partial la}{\partial v}$ weder U noch V. Folglich muss für eine solche Lösung sein:

$$\frac{\partial la}{\partial u} = -\frac{2}{u+v} \quad \text{und} \quad 2+(u+v)\frac{t+v}{t-u} \cdot \frac{\partial la}{\partial v} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen findet man leicht, dass

$$a = \left(\frac{t+v}{u+v}\right)^2$$

eine Lösung der Gleichung (15'.) ist. Ebenfalls finden wir, dass

$$a' = \left(\frac{t-u}{u+v}\right)^2$$

eine Lösung der Gleichung (16'.) ist.

Setzt man nun

$$a = a_1\left(\frac{t+v}{u+v}\right)^2 \quad \text{und} \quad a' = a_1'\left(\frac{t-u}{u+v}\right)^2,$$

wo a_1, a_1' zwei neue unbekannte Functionen sind, so erhält man aus (15'.) und (16'.) folgende Gleichungen für a_1 und a_1':

$$(15''.) \qquad \frac{\partial la_1}{\partial u} = U' \frac{u+v}{U+V} \frac{t+v}{t-u} \cdot \frac{\partial la_1}{\partial v},$$

$$(16''.) \qquad \frac{\partial la_1'}{\partial v} = V' \frac{u+v}{U+V} \frac{t-u}{t+v} \cdot \frac{\partial la_1'}{\partial u}.$$

Die Integration der ersten dieser Gleichungen lässt sich bekanntlich auf

die Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{U'du}{t-u}+\frac{U+V}{u+v}\frac{dv}{t+v}=0$$

zurückführen, welche sich auch so schreiben lässt:

$$\frac{U'du}{t-u}+\frac{V'dv}{t+v}-d\left[\frac{U+V}{t+v}\right]=0,$$

folglich ist das Integral derselben

$$\int\frac{U'du}{t-u}+\int\frac{V'dv}{t+v}-\frac{U+V}{t+v}=\theta=\text{const.}, \tag{17.}$$

und das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung (15″.) ist folgendes $a_1=f(\theta)$, wo f eine willkürliche Function bedeutet.

Daraus finden wir das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung (15′.):

$$a=\left(\frac{t+v}{u+v}\right)^2\cdot f(\theta).$$

Auf ähnliche Weise finden wir das allgemeine Integral der Gleichung (16′.):

$$a'=\left(\frac{t-u}{u+v}\right)^2\varphi(\eta),$$

wo

$$\eta=\int\frac{U'du}{t-u}+\int\frac{V'dv}{t+v}-\frac{U+V}{t-u} \tag{18.}$$

ist. Nun muss aber $\frac{\partial a}{\partial v}=\frac{\partial a'}{\partial u}$ sein, folglich müssen die willkürlichen Functionen f und φ die Gleichung erfüllen

$$(t-u)(t+v)[\varphi(\eta)-f(\theta)]+\tfrac{1}{2}(u+v)(U+V)[\varphi'(\eta)+f'(\theta)]=0,$$

und da aus (17.) und (18.)

$$\eta-\theta=-\frac{(U+V)(u+v)}{(t+v)(t-u)}$$

folgt, so wird die Bedingungsgleichung zwischen $\varphi(\eta)$ und $f(\theta)$

$$2(\varphi(\eta)-f(\theta))=(\eta-\theta)(\varphi'(\eta)+f'(\theta)). \tag{19.}$$

Zwischen η und θ kann aber keine Gleichung bestehen, weil die Functionen U, V ganz willkürlich bleiben müssen. Folglich muss die Gleichung (19.) identisch für jedes θ und η erfüllt werden. Differentiiren wir dieselbe nach θ und η, so bekommen wir

$$\varphi''(\eta)-f''(\theta)=0,$$

also ist

$$\varphi''(\eta)=f''(\theta)=\text{const.}=2C_3,$$

folglich ist

$$f(\theta) = C_1 + C_2\theta + C_3\theta^2$$

und

$$\varphi(\eta) = C_1' + C_2'\eta + C_3\eta^2.$$

Setzt man ferner diese Werthe in die Bedingungsgleichung (19.) ein, so findet man, dass $C_1' = C_1$ und $C_2' = C_2$ sein muss.

Die allgemeinste Lösung der Gleichungen (15'.) und (16'.) ist also folgende:

$$(20.)\qquad \begin{cases} a = \left(\frac{t+v}{u+v}\right)^2 \cdot [C_1 + C_2\theta + C_3\theta^2], \\ a' = \left(\frac{t-u}{u+v}\right)^2 \cdot [C_1 + C_2\eta + C_3\eta^2], \end{cases}$$

wo C_1, C_2, C_3 beliebige Constanten sind und θ und η die Werthe (17.) und (18.) haben.

Auch b, b' und c, c' (nämlich die partiellen Ableitungen $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$ und $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$) genügen denselben Differentialgleichungen (15'.) und (16'.) und haben also dieselben Werthe (20.), nur die Constanten werden verschieden sein.

Die Bestimmung der Coordinaten x, y, z aus ihren partiellen Ableitungen a, a', b, b', c, c' hat jetzt keine Schwierigkeit mehr. Wenn man setzt

$$\omega = \frac{(t+v)(u-t)}{u+v},$$

also

$$\frac{\partial\omega}{\partial v} = \left(\frac{u-t}{u+v}\right)^2, \quad \frac{\partial\omega}{\partial u} = \left(\frac{t+v}{u+v}\right)^2,$$

so ist

$$a = \frac{\partial x}{\partial u} = (C_1 + C_2\theta + C_3\theta^2)\frac{\partial\omega}{\partial u},$$

$$a' = \frac{\partial x}{\partial v} = (C_1 + C_2\eta + C_3\eta^2)\frac{\partial\omega}{\partial v},$$

und durch Integration erhält man folgende Werthe der Coordinaten x, y, z der gesuchten Fläche

$$(21.)\qquad \begin{cases} x = \omega\{C_1 + C_2\varphi + C_3\varphi^2\} + C_3 f, \\ y = \omega\{C_1' + C_2'\varphi + C_3'\varphi^2\} + C_3' f, \\ z = \omega\{C_1'' + C_2''\varphi + C_3''\varphi^2\} + C_3'' f, \end{cases}$$

wobei

$$\varphi = \int \frac{V dv}{(v+t)^2} - \int \frac{U du}{(t-u)^2}$$

und

$$f = \int \frac{V^2 dv}{(v+t)^2} + \int \frac{U^2 du}{(t-u)^2}$$

gesetzt ist.

Die neun Constanten C_1, C_2, C_3, C_1', C_2', C_3', C_1'', C_2'', C_3'' können nicht alle willkürlich sein. In der That muss

$$E = 0, \quad F = \frac{1}{2}\left(\frac{U+V}{u+v}\right)^2, \quad G = 0$$

sein, und dies geschieht identisch, wenn die neun Constanten C folgenden sechs Gleichungen genügen:

$$(22.) \qquad \begin{cases} \Sigma C_1^2 = 0, & \Sigma C_2^2 = -1, & \Sigma C_3^2 = 0, \\ \Sigma C_1 C_2 = 0, & \Sigma C_2 C_3 = 0, & \Sigma C_3 C_1 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Auch die Determinante

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ C_1' & C_2' & C_3' \\ C_1'' & C_2'' & C_3'' \end{vmatrix},$$

deren Quadrat, vermöge der Gleichungen (22.) gleich $\frac{1}{4}$ ist, muss den Werth $+\frac{1}{2}$ (nicht $-\frac{1}{2}$) haben, damit die Functionen δ, δ', δ'' die Werthe (13.) (und nicht die entgegengesetzten) haben.

Setzt man endlich

$$\begin{aligned} C_1 &= \tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma i), & C_1' &= \tfrac{1}{2}(\alpha'+\gamma' i), & C_1'' &= \tfrac{1}{2}(\alpha''+\gamma'' i), \\ C_2 &= \beta i, & C_2' &= \beta' i, & C_2'' &= \beta'' i, \\ C_3 &= \tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma i), & C_3' &= \tfrac{1}{2}(\alpha'-\gamma' i), & C_3'' &= \tfrac{1}{2}(\alpha''-\gamma'' i), \end{aligned}$$

so genügen die neun Constanten α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' folgenden sechs Gleichungen

$$\begin{aligned} \Sigma\alpha^2 = 1, \quad \Sigma\beta^2 = 1, \quad \Sigma\gamma^2 = 1, \\ \Sigma\alpha\beta = 0, \quad \Sigma\beta\gamma = 0, \quad \Sigma\gamma\alpha = 0, \end{aligned}$$

sie sind also die Coefficienten einer beliebigen orthogonalen Substitution.

Anmerkung. Von den neun Constanten C bleiben drei willkürlich, weil die Fläche durch die Hauptgrössen E, F, G, δ, δ', δ'' der

Form nach ganz bestimmt wird, ihre Lage aber kann im Raume jede Aenderung erleiden.

Ich will noch bemerken, dass die Integration der beiden partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial la}{\partial u} = \frac{\partial lF}{\partial u} + \frac{\delta}{\delta'}\frac{\partial la}{\partial v}, \tag{15.}$$

$$\frac{\partial la'}{\partial v} = \frac{\partial lF}{\partial v} + \frac{\delta''}{\delta'}\frac{\partial la'}{\partial u}, \tag{16.}$$

wo $\frac{\partial a}{\partial v} = \frac{\partial a'}{\partial u}$ ist, welche die Coordinaten jeder Fläche bestimmen, wenn $E = 0$, $G = 0$ und die F, δ, δ', δ'' bekannt sind, ***immer auf Quadraturen zurückgeführt wird, wenn nur irgend eine Lösung einer dieser Gleichungen bekannt ist.***

Sei in der That a_0 irgend eine Lösung der ersten Gleichung. Sei nämlich

$$\frac{\partial la_0}{\partial u} = \frac{\partial lF}{\partial u} + \frac{\delta}{\delta'}\frac{\partial la_0}{\partial v}, \tag{23.}$$

wenn man alsdann $a = a_0 a_1$ setzt (wo a_1 eine neue Unbekannte ist), so wird die erste Gleichung

$$\frac{\partial la_1}{\partial u} = \frac{\delta}{\delta'} \cdot \frac{\partial la_1}{\partial v}. \tag{24.}$$

Die Integration dieser partiellen Differentialgleichung wird, wie bekannt, auf die Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\delta . du + \delta' . dv = 0 \tag{25.}$$

zurückgeführt und, wenn man mit $\frac{F}{\varpi}$ einen Multiplicator dieser Gleichung bezeichnet, so muss sein

$$\frac{\partial\left(\frac{F\delta}{\varpi}\right)}{\partial v} = \frac{\partial\left(\frac{F\delta'}{\varpi}\right)}{\partial u}$$

oder

$$\frac{1}{\varpi}\frac{\partial(F\delta)}{\partial v} + F\delta\frac{\partial\left(\frac{1}{\varpi}\right)}{\partial v} = \frac{1}{\varpi}\frac{\partial(F\delta')}{\partial u} + F\delta'\frac{\partial\left(\frac{1}{\varpi}\right)}{\partial u},$$

es ist aber

$$\frac{\partial(F\delta)}{\partial v} = F\cdot\frac{\partial\delta'}{\partial u},$$

folglich

$$-\frac{1}{\varpi}\cdot\delta'\cdot\frac{\partial F}{\partial u}+F\delta\frac{\partial\frac{1}{\varpi}}{\partial v} = F\delta'\frac{\partial\frac{1}{\varpi}}{\partial u},$$

d. h.

$$\frac{\partial l\varpi}{\partial u} = \frac{\partial lF}{\partial u}+\frac{\delta}{\delta'}\frac{\partial l\varpi}{\partial v}.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung (23.), so sieht man unmittelbar, dass man $\varpi = a_0$ nehmen kann, dass also $\frac{F}{a_0}$ ein Multiplicator der Gleichung (25.) ist. Das allgemeine Integral derselben ist also

$$\int\frac{F}{a_0}(\delta du+\delta' dv) = \text{Constante} = \theta,$$

und das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung (24.) ist

$$a_1 = \varphi(\theta),$$

wo φ eine willkürliche Function bedeutet, folglich ist

$$a = a_0\varphi(\theta)$$

das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung (15.).

Auf ähnliche Weise findet man, dass das allgemeine Integral der Gleichung (16.) von der Formel

$$a' = a'_0 f(\eta)$$

gegeben wird, wo a'_0 irgend eine Lösung derselben, f eine willkürliche Function und η das Integral

$$\int\frac{F}{a'_0}(\delta' du+\delta'' dv)$$

bedeuten.

Nun kann man aber aus der Lösung a der Gleichung (15.) die entsprechende Lösung a' der Gleichung (16.) leicht finden. In der That ist

$$\frac{\partial a'}{\partial u} = \frac{\partial a}{\partial v}$$

und

$$\frac{\partial a'}{\partial v} = a'\frac{\partial lF}{\partial v}+\frac{\delta''}{\delta'}\frac{\partial a}{\partial v}.$$

Differentiirt man die zweite dieser Gleichungen nach u und beachtet die erste, so findet man

$$\frac{\partial^2 a}{\partial v^2} = \frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial lF}{\partial v} + a'\frac{\partial^2 lF}{\partial u \partial v} + \frac{\partial\left\{\frac{\delta''}{\delta'}\frac{\partial a}{\partial v}\right\}}{\partial u},$$

wodurch a' gegeben wird.

Es genügt also, irgend eine Lösung einer von den Gleichungen (15.) oder (16.) zu haben, um sie vollständig zu integriren. Die Function φ muss nachher so bestimmt werden, dass

$$\frac{\partial a}{\partial v} = \frac{\partial a'}{\partial u}$$

identisch wird, was im allgemeinen keine Schwierigkeit bietet.

Zur Theorie der Resultanten.

(Nachtrag zu der Abhandlung aus Bd. 116 S. 33—49.)

(Von Herrn *Eugen Netto* in Giessen.)

Wir haben jetzt noch eine Frage zu erledigen, die sich an die bisherigen Untersuchungen anschliesst. Die Functionen Ψ_{k+1}, welche bei der Bildung des gemeinsamen Theilers zweier Functionen die bedeutendste Rolle spielen, sind durch

$$\Psi_{k+1} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_k & 1 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{k+1} & z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k+1} & c_{k+2} & \dots & c_{2k+1} & z^{k+1} \end{vmatrix}$$

definirt worden. Dabei wissen wir aber, dass nur diejenigen Ψ_{k+1} in Frage kommen, deren Index $(k+1)$ die Ordnung einer der nicht verschwindenden Determinanten der Reihe

$$|c_0|, \quad \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}, \quad \dots$$

ist. Wenn nun, nach steigender Grösse geordnet, $n_1, n_2, n_3, \dots$ diese Ordnungen sind, also nur $\Psi_{n_1}, \Psi_{n_2}, \Psi_{n_3}, \dots$ bei den früher besprochenen Bildungen auftreten, dann ist die Beantwortung der Frage von Interesse: was wird aus den nach gleichem Gesetze gebildeten Ψ_λ, wobei λ einen Zwischenwerth zwischen n_α und $n_{\alpha+1}$ besitzt $(n_\alpha < \lambda < n_{\alpha+1})$? Wir wollen die Antwort durch den Satz geben: *Ist* $n_{\alpha+1} > n_\alpha + 1$, *so verschwinden sämmtliche Glieder der Reihe*

$$\Psi_{n_\alpha+1}, \quad \Psi_{n_\alpha+2}, \quad \dots, \quad \Psi_{n_{\alpha+1}-2}$$

identisch, während sich $\Psi_{n_{\alpha+1}-1}$ *bis auf einen constanten Factor auf* Ψ_{n_α} *reducirt.*

Der einfacheren Schreibweise wegen wollen wir die Determinante

$$\begin{vmatrix} c_\alpha & c_\beta & c_\gamma & \cdots & c_\delta \\ c_{\alpha+1} & c_{\beta+1} & c_{\gamma+1} & \cdots & c_{\delta+1} \\ c_{\alpha+2} & c_{\beta+2} & c_{\gamma+2} & \cdots & c_{\delta+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \quad \text{mit} \quad |\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta|$$

bezeichnen und wir werden ferner den Beweis an besonders charakteristischen Fällen darlegen, welche die Richtigkeit des allgemeinen Satzes klarstellen.

Es reicht aus, dass wir die Beziehungen der als Coefficienten der $\varPsi$ auftretenden Determinanten zu einander untersuchen. Man hat

$$\varPsi_{k+1} = z^{k+1}|0, 1, \ldots, k| - z^k|0, \ldots, k-1, k+1| + z^{k-1}|0, \ldots, k-2, k, k+1| - \cdots \\ \cdots \pm z^1|0, 2, 3, \ldots, k+1| \mp |1, 2, \ldots, k+1|.$$

Nun wählen wir gleich als besonderen Fall $k = 5$ und weisen folgenden Satz nach:

Ist $|0, 1, 2, 3, 4, 5, 6| \neq 0$, *dann können nicht alle Determinanten*

$$|0, 1, 2, 3, 4, 5|, \quad |0, 1, 2, 3, 4, 6|, \quad |0, 1, 2, 3, 5, 6|,$$
$$|0, 1, 2, 4, 5, 6|, \quad |0, 1, 3, 4, 5, 6|, \quad |0, 2, 3, 4, 5, 6|,$$
$$|1, 2, 3, 4, 5, 6|$$

gleichzeitig verschwinden. Dies folgt aus der Entwickelung der in der Voraussetzung gegebenen Determinante nach den Elementen der letzten Spalte. Ist also $\varPsi_7$ eine der in der Theorie des gemeinsamen Theilers wirklich auftretende Determinante, dann kann $\varPsi_6$ nicht identisch Null werden. —

Wir setzen nun voraus, um zu weiteren Sätzen zu gelangen, dass

$$(\alpha.) \quad \begin{cases} |0, 1, 2, 3, 4, 5| = 0, & |0, 1, 2, 3, 4, 6| = 0, \\ |0, 1, 2, 3, 5, 6| = 0, & |0, 1, 2, 4, 5, 6| \neq 0 \end{cases}$$

sei, so dass sich $\varPsi_6$ auf die Form einer Function dritten Grades:

$$|0, 1, 2, 4, 5, 6|z^3 - |0, 1, 3, 4, 5, 6|z^2 + |0, 2, 3, 4, 5, 6|z - |1, 2, 3, 4, 5, 6|$$

reducirt. Zu beachten ist, dass die verschwindenden Determinanten in $(\alpha.)$ die Spaltenanfänge c_0, c_1, c_2, c_3 gemeinsam haben. Daher kann kürzer gesetzt werden

$$|0, 1, 2, 3, a, \alpha| = 0, \qquad (a = 4, 5, 6;\ \alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

Entwickelt man dies nach den Elementen der letzten Spalte, so entsteht

$$(\beta.)\quad 0 = c_a|1,2,3,4,a+1| - c_{a+1}\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_a \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_{a+2} \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_{a+3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_{a+5} \end{vmatrix} + \cdots - c_{a+5}|0,1,2,3,a|.$$

Wären auch nur in einer der drei Gleichungen ($\beta.$) für $a = 4, 5, 6$ nicht alle auftretenden Determinanten gleich Null, dann müssten wegen der bestehenden homogenen linearen Gleichungen zwischen den c_a, c_{a+1}, ... alle Determinanten sechster Ordnung, die aus der Matrix

$$(\gamma.)\qquad \left\{\begin{array}{llll} c_0, & c_1, & \ldots, & c_6, \\ c_1, & c_2, & \ldots, & c_7, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_5, & c_6, & \ldots, & c_{11} \end{array}\right.$$

gebildet werden können, gleich Null sein, also insbesondere auch $|0,1,2,4,5,6|$, was der Voraussetzung entgegen ist. Folglich ist jede der in den drei Gleichungen ($\beta.$) auftretenden Determinanten gleich Null, oder: *jede der Determinanten verschwindet, welche aus* ($\gamma.$) *dadurch entsteht, dass man eine ganz beliebige Zeile und zwei beliebige der drei letzten Spalten unterdrückt.* Daraus folgt insbesondere, wenn man die beiden letzten Spalten von ($\gamma.$) beseitigt, dass die fünf Determinanten

$|0,1,2,3,4|$, $|0,1,2,3,5|$, $|0,1,3,4,5|$, $|0,2,3,4,5|$, $|1,2,3,4,5|$

verschwinden. *Es ist also Ψ_5 identisch gleich Null.* —

Nehmen wir weiter irgend ein System der erhaltenen Determinanten, welche sich nur durch die letzte Spalte unterscheiden, z. B.

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_a \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_{a+2} \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_{a+3} \\ c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_{a+4} \\ c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_{a+5} \end{vmatrix}, \qquad (a = 4, 5, 6)$$

so sind nicht nur diese gleich Null, sondern natürlich auch die für $\alpha = 0, 1, 2, 3$ entstehenden. Entwickelt man wieder nach den Elementen der letzten Spalte,

$$0 = c_a|2,3,4,5| \pm c_{a+1}.0 - c_{a+2}|0,3,4,5| + c_{a+3}|0,2,4,5| - c_{a+4}|0,2,3,5| + c_{a+5}|0,2,3,4|,$$

so kann man hier genau denselben Schluss machen, der sich oben an die Gleichungen ($\beta.$) knüpfte; und es ergiebt sich: ***Jede der Determinanten verschwindet, die aus*** ($\gamma.$) ***dadurch entsteht, dass man zwei ganz beliebige Zeilen und die drei letzten Spalten unterdrückt.*** Daraus folgt insbesondere, dass die fünf Determinanten

$$|0,\ 1,\ 2,\ 3|,\quad |0,\ 1,\ 2,\ 4|,\quad |0,\ 1,\ 3,\ 4|,\quad |0,\ 2,\ 3,\ 4|,\quad |1,\ 2,\ 3,\ 4|$$

verschwinden. ***Es ist also*** Ψ_4 ***identisch gleich Null.*** — Vertauscht man im obigen Satze Zeilen und Spalten, dann kann man auch sagen: ***Alle Determinanten vierter Ordnung der Matrix***

$$(\delta.)\qquad \left\{\begin{array}{llll} c_0, & c_1, & \ldots, & c_5, \\ c_1, & c_2, & \ldots, & c_6, \\ c_2, & c_3, & \ldots, & c_7, \\ c_3, & c_4, & \ldots, & c_8 \end{array}\right.$$

verschwinden. Offenbar lässt sich eine weitere Fortsetzung der angewendeten Schlussweise nicht mehr geben. Dagegen zeigt unsere Methode unmittelbar: Hätte man als Voraussetzung hingestellt:

$$(\alpha'.)\qquad \left\{\begin{array}{l} |0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5| = 0,\quad |0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6| = 0,\quad |0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6| = 0, \\ |0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6| = 0,\quad |0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6| \neq 0, \end{array}\right.$$

dann hätte man schliessen können: ***Sämmtliche Determinanten verschwinden, die aus*** ($\gamma.$) ***dadurch entstehen, dass man eine beliebige Zeile und zwei beliebige der vier letzten Spalten, oder auch zwei ganz beliebige Zeilen und drei beliebige der vier letzten Spalten, endlich drei beliebige Zeilen und die vier letzten Spalten tilgt.***

Der Beweis müsste an die Determinanten

$$|0,\ 1,\ 2,\ a,\ b,\ \alpha| = 0, \qquad (a = 3,\ 4,\ 5;\ b = 4,\ 5,\ 6;\ a < b,\ \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$$

anknüpfen. —

An zweiter Stelle wollen wir nachweisen, dass *wenn* unter der Voraussetzung ($\alpha.$) die Determinante $|0,\ 1,\ 2| \neq 0$ ist, die Gleichung

$$(\delta.)\qquad \left\{\begin{array}{l} |0,\ 1,\ 2|:|0,\ 1,\ 3|:|0,\ 2,\ 3|:|1,\ 2,\ 3| \\ = |0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6|:|0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6|:|0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6|:|1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6| \end{array}\right.$$

gilt, dass also Ψ_6 bis auf einen constanten Factor gleich Ψ_3 wird. Hierzu brauchen wir den folgenden Satz: ***Hat man eine Matrix von*** $(\varkappa+\lambda)$ ***Spalten***

und von $(\varkappa+\lambda-1)$ ***Zeilen***

$$\begin{array}{cccccccc} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1\varkappa}; & \beta_{11} & \ldots & \beta_{1\lambda}, & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & (\mu=\varkappa+\lambda-1) \\ \alpha_{\mu 1} & \ldots & \alpha_{\mu\varkappa}; & \beta_{\mu 1} & \ldots & \beta_{\mu\lambda}, & & \end{array}$$

dann gilt die Gleichung

$$\sum_{\tau=1}^{\lambda}(-1)^{\tau-1}|\alpha_{i1}\ldots\alpha_{i\varkappa}\beta_{i\tau}|.|\alpha_{j1}\ldots\alpha_{j\varkappa}\beta_{j1}\ldots\beta_{j,\tau-1}\beta_{j,\tau+1}\ldots\beta_{j\lambda}| = 0.$$
$$(i=1,\,2,\,\ldots,\,\varkappa+1;\;\; j=1,\,2,\,\ldots,\,\mu)$$

Man erhält diesen Satz, wenn man die identisch verschwindende Determinante

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} & \ldots & \beta_{1\lambda} \\ \beta_{11} & \ldots & \beta_{1\lambda} \\ \beta_{21} & \ldots & \beta_{2\lambda} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{\lambda-1,1} & \ldots & \beta_{\lambda-1,\lambda} \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der ersten Zeile entwickelt und dann die Glieder der entstehenden Formel in der Weise, wie ich es im Bande 114 dieses Journals angegeben habe, durch die α rändert.

Dieser Satz ergiebt sofort die drei Gleichungen

$$|0,1,2|.|0,1,3,4,5,6|-|0,1,3|.|0,1,2,4,5,6|+|0,1,4|.|0,1,2,3,5,6|$$
$$-|0,1,5|.|0,1,2,3,4,6|+|0,1,6|.|0,1,2,3,4,5| = 0,$$
$$|0,1,2|.|0,2,3,4,5,6|-|0,2,3|.|0,1,2,4,5,6|+|0,2,4|.|0,1,2,3,5,6|$$
$$-|0,2,5|.|0,1,2,3,4,6|+|0,2,6|.|0,1,2,3,4,5| = 0,$$
$$|0,1,2|.|1,2,3,4,5,6|-|1,2,3|.|0,1,2,4,5,6|+|1,2,4|.|0,1,2,3,5,6|$$
$$-|1,2,5|.|0,1,2,3,4,6|+|1,2,6|.|0,1,2,3,4,5| = 0,$$

welche unter den gemachten Voraussetzungen in die einfacheren

$$|0,1,2|.|0,1,3,4,5,6| = |0,1,3|.|0,1,2,4,5,6|,$$
$$|0,1,2|.|0,2,3,4,5,6| = |0,2,3|.|0,1,2,4,5,6|,$$
$$|0,1,2|.|1,2,3,4,5,6| = |1,2,3|.|0,1,2,4,5,6|$$

übergehen und damit unsere Behauptung (δ.) beweisen.

Ebenso hätten wir unter der Voraussetzung (α'.), *wenn* mit ihr gleichzeitig $|0,1| \neq 0$ ist, die Gleichung

(δ'.) $$|0,1|:|0,2|:|1,2| = |0,1,3,4,5,6|:|0,2,3,4,5,6|:|1,2,3,4,5,6|$$

und damit nachweisen können, dass Ψ_6 und Ψ_2 sich nur durch einen von z unabhängigen Factor unterscheiden. —

Wir kommen jetzt zu dem Nachweise, dass bei ($\alpha.$) auch wirklich $|0, 1, 2| \neq 0$, und ebenso bei ($\alpha'.$) auch wirklich $|0, 1| \neq 0$ ist. Dadurch ist dann unser, zu Anfang dieses Nachtrags ausgesprochener Satz in allen Theilen dargethan.

Um den Gedankengang des Beweises deutlich hervortreten zu lassen, beginnen wir mit der Voraussetzung

$$(\alpha''.)\quad |0, 1, 2, 3, 4, 5| = 0, \quad |0, 1, 2, 3, 4, 6| = 0, \quad |0, 1, 2, 3, 5, 6| \neq 0$$

und untersuchen, was hierbei aus der Annahme

$$(\varepsilon''.)\qquad |0, 1, 2, 3| = 0$$

folgen würde. Nach dem bewiesenen Theoreme, welches an erster Stelle behandelt worden ist, verschwinden dann alle Determinanten

$$|0, 1, 2, 3, \alpha|. \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung von ($\varepsilon''.$) durch Entwickelung

$$c_\alpha|1, 2, 3, 4| - c_{\alpha+1}|0, 2, 3, 4| + c_{\alpha+2}|0, 1, 3, 4| - c_{\alpha+3}|0, 1, 2, 4| = 0;$$
$$(\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

wäre demnach auch nur eine der hier auftretenden Determinanten von Null verschieden, so müsste wegen der bestehenden linearen homogenen Gleichungen jede Determinante vierter Ordnung verschwinden, die sich aus der Matrix

$$(\zeta''.)\qquad \left|\begin{matrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \end{matrix}\right|$$

bilden lässt. Darunter sind aber gerade die in Frage stehenden Determinanten enthalten, die wir von Null verschieden annahmen. Es ist also

$$(\eta''.)\qquad |0, 1, 2, 4| = 0, \quad |0, 1, 3, 4| = 0, \quad |0, 2, 3, 4| = 0, \quad |1, 2, 3, 4| = 0.$$

Unter Verwendung dieser Resultate liefert die Gleichung

$$|1, 2, 3, 4, \alpha| = 0 \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

auf demselben Wege

$$(\eta_1''.)\qquad |1, 2, 3, 5| = 0, \quad |1, 2, 4, 5| = 0, \quad |1, 3, 4, 5| = 0, \quad |2, 3, 4, 5| = 0.$$

Jetzt entwickeln wir jede der Determinanten für $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$

$$\begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_3 & c_\alpha \\ c_1 & \dots & c_4 & c_{\alpha+1} \\ c_2 & \dots & c_5 & c_{\alpha+2} \\ c_4 & \dots & c_7 & c_{\alpha+4} \\ c_5 & \dots & c_8 & c_{\alpha+5} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_3 & c_\alpha \\ c_1 & \dots & c_4 & c_{\alpha+1} \\ c_3 & \dots & c_6 & c_{\alpha+3} \\ c_4 & \dots & c_7 & c_{\alpha+4} \\ c_5 & \dots & c_8 & c_{\alpha+5} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_3 & c_\alpha \\ c_2 & \dots & c_5 & c_{\alpha+2} \\ c_3 & \dots & c_6 & c_{\alpha+3} \\ c_4 & \dots & c_7 & c_{\alpha+4} \\ c_5 & \dots & c_8 & c_{\alpha+5} \end{vmatrix} = 0$$

unter Benutzung des bereits Bewiesenen nach den Elementen der letzten Spalte; dabei entstehen die Gleichungen

$$(\vartheta''.) \quad \begin{cases} c_{\alpha+1}|0,2,4,5| - c_{\alpha+2}|0,1,4,5| + c_{\alpha+4}|0,1,2,5| = 0, \\ c_{\alpha+1}|0,3,4,5| - c_{\alpha+3}|0,1,4,5| + c_{\alpha+4}|0,1,3,5| = 0, \\ c_{\alpha+2}|0,3,4,5| - c_{\alpha+3}|0,2,4,5| + c_{\alpha+4}|0,2,3,5| = 0. \end{cases} \quad (\alpha = 0, 1, \dots, 4)$$

Aus diesen drei Gleichungen lässt sich folgern:

$$(\eta_2''.) \quad \begin{cases} |0,1,2,5| = 0, \quad |0,1,3,5| = 0, \quad |0,1,4,5| = 0, \\ |0,2,3,5| = 0, \quad |0,2,4,5| = 0, \quad |0,3,4,5| = 0. \end{cases}$$

In der That, wäre $|0,3,4,5| \neq 0$, so würde gemäss der letzten der Gleichungen $(\vartheta''.)$ jede der Determinanten dritter Ordnung aus

$$\begin{matrix} c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_5 & c_7 \\ c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \end{matrix}$$

verschwinden müssen; also aber auch gegen die eben gemachte Annahme:

$$|0,3,4,5| = c_0|4,5,6| - c_1|3,5,6| + c_2|3,4,6| - c_3|3,4,5|.$$

Es muss also jedenfalls $|0,3,4,5| = 0$ sein. Die hierdurch reducirten beiden letzten Gleichungen $(\vartheta''.)$ liefern dann ebenso $|0,2,4,5| = 0$, $|0,1,4,5| = 0$; und hierdurch entsteht die weitere Reduction von $(\vartheta''.)$ auf die drei Gleichungen

$$c_{\alpha+4}|0,1,2,5| = 0, \quad c_{\alpha+4}|0,1,3,5| = 0, \quad c_{\alpha+4}|0,2,3,5| = 0. \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3, 4)$$

Wäre also auch nur eine der drei auftretenden Determinanten von Null verschieden, so hätte man

$$c_4 = 0, \quad c_5 = 0, \quad c_6 = 0, \quad c_7 = 0, \quad c_8 = 0.$$

Wegen $(\varepsilon''.)$ müsste dann auch $c_3 = 0$ sein. Aber nun würden gegen die Voraussetzung $(\alpha''.)$ alle Elemente der vierten Spalte von $|0,1,2,3,5,6|$ zu Null. Das geht nicht. Somit ist $(\eta_2''.)$ bewiesen.

Nimmt man nun $(\varepsilon''.)$, $(\eta''.)$, $(\eta_1''.)$, $(\eta_2''.)$ zusammen, so zeigt es sich, dass alle 15 Determinanten vierter Ordnung der Matrix

$$(\zeta''.) \qquad \begin{Vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ . & . & . & . & . & . \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \end{Vmatrix}$$

verschwinden müssen. Benutzt man aber für die Entwickelung von $|0, 1, 2, 3, 5, 6|$ den *Laplace*schen Satz hinsichtlich der vier ersten und der beiden letzten Spalten, so folgt wiederum das Verschwinden dieser Determinante. Hier sind wir zu einem Widerspruch gegen $(\alpha''.)$ gelangt. ***Folglich ist*** $|0, 1, 2, 3|$ ***von Null verschieden.*** —

Wir kommen jetzt zu der Voraussetzung

$$(\alpha.) \qquad \begin{cases} |0, 1, 2, 3, 4, 5| = 0, & |0, 1, 2, 3, 4, 6| = 0, \\ |0, 1, 2, 3, 5, 6| = 0; & |0, 1, 2, 4, 5, 6| \neq 0 \end{cases}$$

und untersuchen, was hier aus der Annahme

$$(\varepsilon.) \qquad |0, 1, 2| = 0$$

folgen würde. Wie wir wissen, verschwinden alle

$$|0, 1, 2, \alpha|. \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung von $(\varepsilon.)$

$$c_\alpha|1, 2, 3| - c_{\alpha+1}|0, 2, 3| + c_{\alpha+2}|0, 1, 3| = 0; \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

wäre demnach eine der hier auftretenden Determinanten von Null verschieden, so müsste wegen der bestehenden linearen homogenen Gleichungen jede Determinante dritter Ordnung verschwinden, die sich aus der Matrix

$$(\zeta.) \qquad \begin{Vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \end{Vmatrix}$$

bilden lässt. Darunter sind aber gerade die in Frage stehenden Determinanten enthalten. Es ist also zu setzen

$$(\eta.) \qquad |0, 1, 3| = 0, \quad |0, 2, 3| = 0, \quad |1, 2, 3| = 0.$$

Unter Verwendung dieser Resultate liefern die Gleichungen

$$|1, 2, 3, \alpha| = 0, \quad |2, 3, 4, \alpha| = 0 \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

auf demselben Wege

$$(\eta_1.) \qquad \begin{cases} |1, 2, 4| = 0, & |1, 3, 4| = 0, & |2, 3, 4| = 0, \\ |2, 3, 5| = 0, & |2, 4, 5| = 0, & |3, 4, 5| = 0. \end{cases}$$

Jetzt entwickeln wir jede der Determinanten für $\alpha = 0, 1, 2, 3$

$$(\iota.) \qquad \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_\alpha \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_{\alpha+1} \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_{\alpha+3} \\ c_4 & c_5 & c_6 & c_{\alpha+4} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_\alpha \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_{\alpha+2} \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_{\alpha+3} \\ c_4 & c_5 & c_6 & c_{\alpha+4} \end{vmatrix} = 0$$

unter Benutzung des bereits Bewiesenen nach den Elementen der letzten Spalte und erhalten dadurch

$$(\vartheta.) \qquad \begin{cases} c_{\alpha+1}|0,\ 3,\ 4| - c_{\alpha+3}|0,\ 1,\ 4| = 0, \\ c_{\alpha+2}|0,\ 3,\ 4| - c_{\alpha+3}|0,\ 2,\ 4| = 0. \end{cases} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

Aus diesen beiden Gleichungen lässt sich folgern:

$$(\eta_2.) \qquad |0,\ 1,\ 4| = 0, \quad |0,\ 2,\ 4| = 0, \quad |0,\ 3,\ 4| = 0.$$

In der That, wäre $|0, 3, 4| \neq 0$, so würde gemäss der letzten der Gleichungen $(\vartheta.)$ jede der Determinanten zweiter Ordnung aus der Matrix

$$\begin{matrix} c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{matrix}$$

verschwinden müssen; also auch gegen die Annahme

$$|0,\ 3,\ 4| = c_0|4,\ 5| - c_1|3,\ 5| + c_2|3,\ 4|.$$

Es muss also jedenfalls $|0, 3, 4| = 0$ sein. Die hierdurch reducirten beiden Gleichungen $(\vartheta.)$, nämlich

$$c_{\alpha+3}|0,\ 1,\ 4| = 0, \quad c_{\alpha+3}|0,\ 2,\ 4| = 0 \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

lieferten dann, wenn eine der beiden Determinanten von Null verschieden wäre,

$$c_3 = 0, \quad c_4 = 0, \quad c_5 = 0, \quad c_6 = 0;$$

wegen $(\varepsilon.)$ müsste ferner auch $c_2 = 0$ sein. Hierdurch wird aber aus $|0, 1, 2, 3, 4, 5| = 0$ entnommen, dass $c_1^2 . c_7^4 = 0$ wird. Ist jedoch auch noch $c_1 = 0$ oder $c_7 = 0$, dann verschwinden in $|0, 1, 2, 4, 5, 6|$ alle Elemente der zweiten oder der dritten Spalte; jedenfalls tritt also ein Widerspruch gegen die Voraussetzung heraus. Somit ist $(\eta_2.)$ bewiesen.

Nun benutzen wir denselben Schluss, der von $(\eta.)$ auf $(\eta_1.)$ führte. Wir nehmen statt $(\iota.)$ an

$$(\iota_1.) \qquad \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_\alpha \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_{\alpha+1} \\ c_4 & c_5 & c_6 & c_{\alpha+3} \\ c_5 & c_6 & c_7 & c_{\alpha+4} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_\alpha \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_{\alpha+2} \\ c_4 & c_5 & c_6 & c_{\alpha+3} \\ c_5 & c_6 & c_7 & c_{\alpha+4} \end{vmatrix} = 0, \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

dann geht $(\eta_{2\cdot})$ in die Gleichungsreihe

$$(\eta_{3\cdot}) \qquad |1,\ 2,\ 5| = 0, \quad |1,\ 3,\ 5| = 0, \quad |1,\ 4,\ 5| = 0$$

über, und der Beweis lässt sich fast buchstäblich aus dem eben gegebenen ablesen.

Wir betrachten ferner an Stelle von $(\iota.)$

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_\alpha \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_{\alpha+2} \\ c_4 & c_5 & c_6 & c_{\alpha+4} \\ c_5 & c_6 & c_7 & c_{\alpha+5} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_\alpha \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_{\alpha+3} \\ c_4 & c_5 & c_6 & c_{\alpha+4} \\ c_5 & c_6 & c_7 & c_{\alpha+5} \end{vmatrix} = 0; \qquad (\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

dies liefert ebenso

$$(\eta_{4\cdot}) \qquad |0,\ 2,\ 5| = 0, \quad |0,\ 3,\ 5| = 0, \quad |0,\ 4,\ 5| = 0,$$

und endlich folgt aus

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_\alpha \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_{\alpha+1} \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_{\alpha+2} \\ c_5 & c_6 & c_7 & c_{\alpha+5} \end{vmatrix} = 0 \qquad (\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 4)$$

die Gleichung $c_{\alpha+2}|0,\ 1,\ 5| = 0$ und daraus

$$(\eta_{5\cdot}) \qquad |0,\ 1,\ 5| = 0.$$

Nimmt man nun $(\varepsilon.)$, $(\eta.)$, $(\eta_{1\cdot})$, …, $(\eta_{5\cdot})$ zusammen, so zeigt es sich, dass alle 20 Determinanten dritter Ordnung aus der Matrix

$$(\zeta.) \qquad \begin{Bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \end{Bmatrix}$$

verschwinden müssen. Benutzt man aber für die Entwickelung von $|0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6|$ den *Laplace*schen Satz hinsichtlich der drei ersten und der drei letzten Spalten, so folgt wiederum das Verschwinden dieser Determinante, welche der Annahme nach von Null verschieden ist. $(\varepsilon.)$ ist daher nicht aufrecht zu erhalten, d. h. $|0,\ 1,\ 2|$ ***ist von Null verschieden.***

Wie man sieht, lässt sich durch drei einfache Operationen der Beweis schrittweise durchführen. Die Voraussetzung $(\alpha'.)$ liefert dabei gar nichts Neues, so dass wir darauf verzichten können, auch diesen Fall noch besonders zu behandeln. —

Wir wollen jetzt die Resultante von

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m,$$
$$g(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n$$

in der unverkürzten Determinantenform

$$R = \left|\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right| \begin{array}{l} \Big\} (n \text{ Zeilen}) \\ \\ \Big\} (m \text{ Zeilen}) \end{array}$$

betrachten und mit $R_{\varkappa\lambda}$ diejenige Subdeterminante bezeichen, welche aus R durch Unterdrückung der $\varkappa$ten Zeile und der λten Spalte entsteht. Dann gilt der Satz: ***Die Differenz***

$$R_{\alpha\mu}R_{\beta\nu} - R_{\alpha\sigma}R_{\beta\tau} \qquad (\mu+\nu = \sigma+\tau)$$

ist für jede Wahl von α, β, μ, ν, σ ***durch*** R ***theilbar.***

Wir wollen diesen Satz zunächst für den besonderen Fall

$$R_{\alpha\mu}R_{1\nu} - R_{\alpha,\nu-1}R_{1,\mu+1} \qquad (\nu \geqq \mu;\ \alpha \leqq n)$$

beweisen. Hierzu bilden wir eine Determinante

$$\left|\begin{array}{cc} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{array}\right|,$$

in welcher $C_1 = R_{\alpha\mu}$, $C_4 = R_{1\nu}$ sein soll. Die in $R_{\alpha\mu}$ fehlende μte Spalte von R setzen wir in C_2 über die $(\mu+1)$-te Spalte von $R_{1\nu}$; die in $R_{1\nu}$ fehlende νte Spalte von R setzen wir in C_3 unter die $(\nu-1)$-te Spalte von $R_{\alpha\mu}$. Alle übrigen Spalten in C_2 und C_3 werden mit Nullen gefüllt. Dann ist

$$\left|\begin{array}{cc} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{array}\right| = R_{\alpha\mu}R_{1\nu} - R_{\alpha,\nu-1}R_{1,\mu+1}.$$

Die Determinante der C muss jetzt umgewandelt werden. Zuerst schieben wir die von Null verschiedene Spalte von C_2 nebst der darunter stehenden von C_4 so zwischen die von C_1, C_3, dass die vorher in C_1 fehlende Spalte jetzt ersetzt wird. Dann addirt man die in C_4 zurückbleibenden Spalten mit Ausnahme der ersten so zu denen von C_3, dass auch in der unteren Hälfte der Determinante die ersten $m+n$ Indices ohne Lücke steigen. Dadurch werden die ersten Elemente der unteren Zeilen mit den b bis auf die erste dieser Zeilen gleich denen der oberen Zeilen mit den gleichen Elementen und sie können also getilgt werden. Desgleichen kann man die unteren

Zeilen mit den a reduciren bis auf die eine oben nicht vorhandene αte Zeile. Setzt man diese zwischen die $(\alpha-1)$-te und $(\alpha+1)$-te hinauf und zieht aus der so umgeformten Determinante das Element b_0 heraus, dann zerfällt die zurückbleibende Determinante, und R selbst ist der eine Factor. Dadurch ist der Satz bewiesen.

Wir wollen diese Vorschriften durch ein Beispiel erläutern. Es sei

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

dann wird

$$R_{21}R_{15}-R_{24}R_{12} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & b_0 & b_2 & b_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & b_0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = b_0 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = R \frac{\partial^2 R}{\partial(15)\,\partial(32)},$$

wobei die letzte Differentiation nach dem fünften Elemente der ersten und nach dem zweiten Elemente der dritten Zeile zu bewerkstelligen ist.

Genau entsprechend lässt sich die Richtigkeit des Satzes für $\alpha > n$ nachweisen. Man hat demnach, wenn $\nu \geqq \mu$ ist,

$$R_{\alpha\mu}R_{1\nu} \equiv R_{\alpha,\nu-1}R_{1,\mu+1} \pmod{R}.$$

Nun ist bekanntlich

$$R_{\alpha,\mu+1}R_{1,\nu-1} \equiv R_{\alpha,\nu-1}R_{1,\mu+1} \pmod{R}$$

und deshalb haben wir auch

$$R_{\alpha\mu}R_{1\nu} \equiv R_{\alpha,\mu+1}R_{1,\nu-1} \pmod{R};$$

und diese Folgerungen kann man in der gleichen Art fortsetzen. *So zeigt sich das zweite, schon allgemeinere Resultat*

$$R_{\alpha\mu}R_{1\nu} - R_{\alpha\sigma}R_{1\tau} \equiv 0 \pmod{R}. \qquad (\mu+\nu=\sigma+\tau)$$

Man hat nun ebenso

$$R_{\beta\varkappa}R_{1\nu} - R_{\beta\lambda}R_{1\tau} \equiv 0 \pmod{R}, \qquad (\varkappa+\nu=\lambda+\tau)$$

und folglich ergiebt sich aus diesen beiden Congruenzen

$$(R_{\alpha\mu}R_{\beta\lambda} - R_{\alpha\sigma}R_{\beta\varkappa})R_{1\nu} \equiv 0 \pmod{R}. \qquad (\mu+\lambda=\sigma+\varkappa)$$

Weiss man also, dass R eine irreductible Function und deshalb nicht durch $R_{1\nu}$ theilbar ist, so folgt der oben aufgestellte allgemeine Satz.

Wir wollen nun zunächst die Irreductibilität von R bei allgemeinen Coefficienten a und b nachweisen. R ist in den a homogen vom $n$ten und in den b homogen vom $m$ten Grade; zerfällt R, so muss jeder Factor auch homogen sein, wie sofort zu sehen ist. Wir nehmen an, es wäre bei gegebenem Grade m der Function $f(x)$, die Resultante für allgemeine $g(x)$ vom Grade n aber nicht für allgemeine $g'(x)$ von geringerem Grade zerfällbar. Es sei

$$R = R_1(\varkappa, \lambda)R_2(\mu, \nu);$$

$\varkappa$, μ sollen hierbei die Dimensionen der beiden Factoren nach den a und λ, ν diejenige nach den b bedeuten. Es muss also $\varkappa+\mu=n$ und $\lambda+\nu=m$ sein.

Nun schreiben wir statt g das Product der beiden Functionen

$$g'(x) = \beta'_0 x^{\varrho} + \beta'_1 x^{\varrho-1} + \cdots, \quad g''(x) = \beta''_0 x^{\sigma} + \beta''_1 x^{\sigma-1} + \cdots; \qquad (\varrho+\sigma=n)$$

dadurch gehen die b in homogene Functionen zweiten Grades der β über, und wenn man die Dimensionen der auftretenden Functionen nach den β bestimmt, dann erhält man der obigen Formel gemäss

$$R_{f,g'.g''} = R_1(\varkappa, 2\lambda)R_2(\mu, 2\nu).$$

Andererseits ist nach einem bekannten Satze

$$\begin{aligned} R_{f,g'.g''} &= R_{f,g'}.R_{f,g''} \\ &= R_{f,g'}(\varrho, m)R_{f,g''}(\sigma, m), \end{aligned}$$

wobei die eingeklammerten Argumente wieder die Dimensionen nach den a

und nach den β angeben. Ist nun n auf zwei verschiedene Arten in zwei Summanden zerlegbar, und wählen wir ϱ, σ von $\varkappa$, μ verschieden:

$$n = \varkappa + \mu = \varrho + \sigma,$$

dann können $R_{f,g'}$ und $R_{f,g''}$ nicht mit R_1 und R_2 zusammenfallen; mindestens eine der beiden Resultanten muss sich also aus Factoren von R_1 und R_2 zusammensetzen und ist folglich, gegen die Annahme zerlegbar. Diesem Widerspruch können wir nur dann entgehen, wenn n, falls es grösser als 1 ist, nur auf *eine* Art in Summanden zerlegt werden kann, wenn also $n = 3$ oder $n = 2$ ist. Findet also für gewisse m und n eine Zerlegung von R statt, dann tritt eine solche sicher schon bei demselben m für $n = 3$, $n = 2$ oder $n = 1$ auf. Genau die gleichen Schlüsse gelten für m; wir können demnach jetzt auch m auf 3, auf 2 oder auf 1 reduciren und ersehen also, dass, wenn überhaupt für ein Werthepaar m, n Zerlegung der Resultante allgemeiner ganzer Functionen $m$ten und $n$ten Grades stattfindet, dann für einen der Fälle m, $n = 1, 2, 3$ das Gleiche eintritt.

Wir untersuchen nun zunächst $n = 2$ oder $= 3$ und $m = 3$. Ist dabei eine Zerlegung möglich, so wird zu setzen sein

$$R = R_1(\varkappa, \lambda).R_2(\mu, \nu),$$
$$(\varkappa + \mu = n = 2 \text{ oder } 3;\ \lambda + \nu = m = 3).$$

Führen wir nun nach dem oben verwendeten Principe $g'(x).g''(x)$ statt $g(x)$ ein, indem wir

$$g'(x) = \beta'_0 x + \beta'_1, \quad g''(x) = \beta''_0 x^{n-1} + \cdots + \beta''_{n-1}$$

setzen, dann entstehen, wie oben, die beiden Gleichungen

$$R_{f,g'.g''} = R_1(\varkappa, 2\lambda) R_2(\mu, 2\nu),$$
$$R_{f,g'.g''} = R_{f,g'}(1, 3) R_{f,g''}(n-1, 3),$$

wobei die ersten Grössen in den Klammern die Dimensionen nach den a, die zweiten die Dimensionen nach den β bezeichen. Da diese letzten in R_1 und R_2 gerade, in den Resultanten dagegen ungerade sind, so folgt wie oben eine weitere Zerlegung für mindestens eine der Resultanten $R_{f,g'}$ oder $R_{f,g''}$. Die Irreductibilität für $n = 1$, $m = 3$ ist unmittelbar ersichtlich.

Also auch der Fall, dass f oder g vom dritten Grade ist, führt zu weiteren Reductionen, und wir erkennen, dass aus der Zerfällbarkeit für allgemeine Functionen auch die für m, $n = 1, 2$ folgen müsste. Hier

findet sie nicht statt, und also auch im allgemeinen Falle nicht. Der gegebene Beweis ist von der Bedeutung der Resultante für die beiden Gleichungen mit den Coefficienten a und b unabhängig geführt worden.

Aus dem Satze

$$R_{\alpha\mu}R_{\beta\nu}-R_{\alpha\sigma}R_{\beta\tau}\equiv 0 \pmod{R} \qquad (\mu+\nu=\sigma+\tau)$$

folgt ein rein arithmetischer Beweis für ein anderes, die Resultanten betreffendes Theorem, welches gewöhnlich auf algebraischem Wege abgeleitet wird (vgl. ***Salmon,*** modern higher algebra; 4th ed. p. 91). Es handelt sich um den Nachweis der Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial a_\mu}\frac{\partial R}{\partial a_\nu}-\frac{\partial R}{\partial a_\sigma}\frac{\partial R}{\partial a_\tau}&\equiv 0 \pmod{R},\\ \frac{\partial R}{\partial a_\mu}\frac{\partial R}{\partial b_\nu}-\frac{\partial R}{\partial a_\sigma}\frac{\partial R}{\partial b_\tau}&\equiv 0 \pmod{R}.\end{aligned} \qquad (\mu+\nu=\sigma+\tau)$$

Man hat, wie sofort ersichtlich ist,

$$\frac{\partial R}{\partial a_\mu}=R_{1,\mu+1}+R_{2,\mu+2}+R_{3,\mu+3}+\cdots+R_{n,\mu+n}.$$

Trägt man dies und die entsprechenden Ausdrücke für die übrigen Ableitungen in die beiden Gleichungen ein, dann entsteht eine Anzahl von Gliedern der Form

$$R_{\alpha\mu}R_{\beta\nu}-R_{\alpha\sigma}R_{\beta\tau}, \qquad (\mu+\nu=\sigma+\tau)$$

von denen die geforderte Congruenz mod.R bereits feststeht. Deshalb sind die beiden aufgestellten Gleichungen richtig.

In meinem ersten Aufsatze über die Resultanten habe ich gesagt, dass der Beweis auf Seite 41 meines Wissens der erste sei, welcher nur Determinantenrelationen verwende. Nachträglich bin ich auf zwei andere Beweise derselben Art aufmerksam gemacht worden; der erste stammt von Herrn ***Frobenius*** (dieses Journal, Bd. 114 S. 222 oben), der andere von Herrn ***W. H. Tyler*** (Erlanger Sitzungsberichte 1891, Heft 23).

Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser linearer Differentialgleichungen bei grossen reellen Werthen des Arguments.

(Zweiter Aufsatz.)

(Von Herrn *Adolf Kneser* in Dorpat.)

Im CXVI. Bande dieses Journals habe ich Untersuchungen über gewisse lineare Differentialgleichungen veröffentlicht, deren reelle Integrale für grosse reelle Werthe des Arguments nicht unendlich oft verschwinden, oder, wie ich es in einer früheren Abhandlung nannte, nicht oscillatorisch sind; speciell habe ich gezeigt, dass jedes Integral der mit reellen Constanten a, a_2, ... gebildeten Gleichung

$$y''+y\left(-a^2+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_3}{x^3}+\cdots\right)=0$$

vermittelst einer nach fallenden Potenzen von x fortschreitenden, im allgemeinen divergenten Reihe asymptotisch dargestellt werden kann. Analoge Untersuchungen für Differentialgleichungen, deren Integrale oscillatorisch sind, speciell für die Gleichung

$$y''+y\left(a^2+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_3}{x^3}+\cdots\right)=0$$

gedenke ich auf den folgenden Blättern durchzuführen. Sie gestalten sich wesentlich anders, und zwar einfacher als die früheren; da es sich hier wie dort um Functionen reeller Argumente handelt, kann es auch nicht wunderbar erscheinen, dass dieselbe Frage bei Differentialgleichungen, die sich nur durch das Vorzeichen einer Constanten unterscheiden, zu ganz verschiedenen Entwickelungen Veranlassung giebt.

§ 1.

Einleitende Bemerkungen über die Stetigkeit der Integrale linearer Differentialgleichungen.

Beschränkt man die reelle Variable x auf ein beliebig gegebenes Intervall J, so seien die Functionen y und $f(x)$ nebst ihren ersten Ableitungen stetig, und es bestehe die Differentialgleichung

$$(1.) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + yf(x) = y'' + yf(x) = 0;$$

ferner sei, indem man unter A und B positive Constante versteht, im Intervall J

$$(1^a.) \qquad A^2 > f(x) > B^2.$$

Dann lehrt ein wichtiges Theorem von *Sturm**), dass im Gebiete J zwischen irgend zwei Nullstellen von y jedes Integral der Gleichung

$$v'' + A^2 v = 0,$$

und zwischen irgend zwei Nullstellen eines Integrals der Gleichung

$$w'' + B^2 w = 0$$

die Function y mindestens einmal verschwinden muss. Sind daher α, β, γ irgend drei auf einander folgende Nullstellen von y in dem betrachteten Intervalle, so hat man, da

$$v = \sin Ax, \quad w = \sin Bx$$

gesetzt werden kann,

$$(2.) \qquad \gamma - \alpha > \frac{\pi}{A}, \quad \frac{2\pi}{B} > \beta - \alpha,$$

und y verschwindet sicher mindestens einmal, sobald die Länge des Intervalls J grösser als $\frac{\pi}{B}$ ist.

Von diesen Thatsachen wollen wir Gebrauch machen, um nachzuweisen, dass die Gleichung (1.) ein Integral von der für y vorausgesetzten Beschaffenheit wirklich besitzt. Das ist leicht einzusehen, wenn $f(x)$ eine analytische Function ist, und sich in allen Punkten des Gebietes J regulär verhält; denn das erstere gilt alsdann von jedem Integral der Gleichung (1.) und hieraus folgt leicht, dass man jedes Functionselement, welches in der Umgebung eines dem Gebiete J angehörigen Punktes ein Integral der Glei-

*) *Sturm*, Mémoire sur les équations différentielles du second ordre. *Liouvilles* Journal, Bd. I (1836) S. 125.

chung darstellt, analytisch fortsetzen kann über die ganze Ausdehnung von J hin. Macht man dagegen nur die allgemeinere Voraussetzung, dass $f(x)$ und $f'(x)$ in J stetige Functionen des reellen Arguments x seien, so kann man aus dem allgemeinen Theorem über die Existenz der Integrale von Differentialgleichungen zunächst nur schliessen, dass eine nebst ihrer ersten Ableitung stetige Function y von folgender Beschaffenheit existirt. Sie ist, wenn x_0 ein Punkt im Innern von J ist, eindeutig definirt für ein gewisses x_0 umfassendes Theilgebiet U_0; für $x = x_0$ nimmt y den willkürlich gegebenen Werth y_0, y' den willkürlich gegebenen Werth y'_0 an. Wenn nun $x_1 > x_0$ und x_1 ein Punkt von U_0 ist, für welchen

$$y = y_1, \quad y' = y'_1, \tag{3.}$$

so kann man ebenso für ein gewisses x_1 umfassendes Gebiet U_1 ein nebst seiner ersten Ableitung stetiges Integral z der Gleichung (1.) bestimmen, welches für $x = x_1$ die Gleichungen

$$z = y_1, \quad z' = y'_1 \tag{4.}$$

ergiebt. Dieses ist für alle Punkte, die sowohl in U_0 wie in U_1 liegen, dem vorher definirten Integral y gleich; denn für alle diese Punkte ist der Differentialgleichung zufolge

$$yz'' - zy'' = 0, \quad yz' - zy' = \text{const.};$$

die Constante rechts aber muss nach (3.) und (4.) gleich Null sein. Daraus folgt, dass das Verhältniss $y : z$ für die betrachteten Punkte constant sein, mithin nach (3.) und (4.) den Werth Eins haben muss.

Ebenso wie von x_0 zu x_1 kann man von diesem zu einem grösseren Werthe x_2 fortschreiten und erhält durch Wiederholung des Verfahrens eine Reihe zunehmender Grössen

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots,$$

deren jede von einem mit gleichem Index versehenen Gebiet U_ν umschlossen ist. Dabei haben U_ν und $U_{\nu+1}$ ein Stück gemein; für jedes Gebiet U_ν ist ein nebst seiner ersten Ableitung stetiges Integral der Gleichung (1.) definirt, welches dem für $U_{\nu+1}$ definirten in jedem den Gebieten U_ν und $U_{\nu+1}$ gemeinsamen Punkte gleich ist. Die sämmtlichen Gebiete U_ν bilden also ein Continuum U, für welches die Functionen y und y' stetig und bestimmt sind und die Gleichung (1.) besteht.

Das Gebiet U kann nun im Innern von J keine obere Grenze ξ haben; d. h. reicht es bis in unendliche Nähe eines solchen Werthes

heran, so kann es über ihn hinaus in der Richtung wachsender Werthe von x erweitert werden. Um dies einzusehen, lasse man x innerhalb des Gebietes U wachsend dem Werthe ξ unendlich nahe kommen; alsdann kann nach (2.) für diese Werthe von x die Function y nicht unendlich oft verschwinden; sie behält also, wenn x gegen ξ convergirt, schliesslich ein festes Vorzeichen. Dasselbe gilt von y'', mithin nach dem Satze von *Rolle* auch von y'; also muss y schliesslich beständig wachsen oder beständig abnehmen, und sich für $x=\xi$ einer endlichen oder unendlichen Grenze annähern. Wäre sie unendlich, so sei u ein für $x=\xi$ nicht verschwindendes Integral der Gleichung (1.), welches ebenso wie u' für ein gewisses, ξ umfassendes Gebiet U' stetig und bestimmt ist; bezeichnet man mit c eine passende Constante, so ist für die den Gebieten U und U' gemeinsamen Punkte

$$(5.) \qquad yu'-uy'=c, \quad \frac{u'}{u}-\frac{y'}{y}=\frac{c}{yu}.$$

Nähert sich nun x der Grenze ξ, so convergirt der Bruch $y':y$, da y unendlich gross wird, gegen einen endlichen Werth; dasselbe gilt dann von seinem Integral $\lg y$ und von y selbst, was der Annahme widerspricht. Somit muss y, und der ersten Gleichung (5.) zufolge auch y' für $x=\xi$ gegen einen endlichen Grenzwerth convergiren. Setzt man demgemäss

$$\lim_{x=\xi} y=\eta, \quad \lim_{x=\xi} y'=\eta',$$

so kann man in einem Gebiete U' das Integral u_0 so definiren, dass für $x=\xi$ die Gleichungen

$$u_0=\eta, \quad u_0'=\eta'$$

bestehen; dann aber muss für die den Gebieten U und U' gemeinsamen Punkte $u_0=y$ sein aus denselben Gründen, welche bei den Gebieten U_0 und U_1 die Gleichung $y=z$ ergaben. Hieraus folgt, dass man das Gebiet U, für welches y mit den angegebenen Eigenschaften definirt ist, über ξ hinaus erweitern kann, indem man U' hinzufügt, und eine analoge Betrachtung gilt offenbar für die unterhalb des Werthes x_0 liegenden Theile von J. Das Gebiet U kann also jeden im Innern von J liegenden Punkt umfassen, und es giebt ein Integral y, welches in dem ganzen Intervall J bestimmt und ebenso wie y' stetig ist und für $x=x_0$ den willkürlich gegebenen Werth y_0 annimmt, während y' der ebenfalls beliebigen Grösse y_0' gleich wird.

§ 2.

Die Maxima, Minima und Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen.

Wir führen nun die speciellere Annahme ein, das Intervall J enthalte alle oberhalb einer positiven Grenze g liegenden Werthe von x und es sei

$$\lim f(x) = a^2,$$

indem a eine positive Constante und das Zeichen lim, wie fortan immer, wenn keine andere Bestimmung gemacht wird, den Grenzübergang für $x = +\infty$ bezeichnet. Nimmt man die Grenze g hinreichend gross an, so können A und B irgend zwei Constante sein, für welche

$$A > a > B > 0;$$

immer ist dann für das Gebiet J die Relation (1ª.) erfüllt. Nach § 1 giebt es daher ein oberhalb des Werthes g nebst seiner ersten Ableitung stetiges Integral y der Gleichung (1.), und dieses hat nach dem citirten Satze von *Sturm* unzählige Nullstellen, welche grösser als g sind und durch $x_0, x_2, x_4, \ldots$ bezeichnet werden mögen. In jeder von ihnen muss y sein Zeichen wechseln; denn bliebe y z. B. positiv, so müsste y' von negativen zu positiven Werthen übergehen, während y'' negativ wäre, was offenbar unmöglich ist. Die Intervalle zwischen zwei auf einander folgenden Werthen $x_{2\nu}$ enthalten also abwechselnd ein Maximum und ein Minimum von y. Zwischen $x_{2\nu}$ und $x_{2\nu+2}$ liegt eine einzige Nullstelle von y', welche durch $x_{2\nu+1}$ bezeichnet werde; denn wären zwei vorhanden, so müsste y'' zwischen ihnen verschwinden, während diese Grösse offenbar stets zugleich mit y von Null verschieden ist. Bezeichnet man die Werthe von y und y' für irgend ein Argument x_ν durch Anheftung des entsprechenden Index ν, so hat man allgemein

$$y_{2\nu} = y_{2\nu+2} = y'_{2\nu+1} = 0 \tag{6.}$$

und nach (2.)

$$x_{2\nu+4} - x_{2\nu} > \frac{\pi}{A}, \quad x_{2\nu+2} - x_{2\nu} < \frac{2\pi}{B}. \tag{7.}$$

Schreibt man nun die Gleichung (1.) in der Form

$$y'y'' + yy'f(x) = 0,$$

so ergiebt sich durch partielle Integration

$$y'^2 + y^2 f(x) - \int y^2 f'(x)\,dx = \text{const.}, \tag{8.}$$

also speciell, wenn man von x_0 bis x_1 integrirt und die Gleichungen (6.) berücksichtigt

$$-y_0'^2 = -y_1^2 f(x_1) + \int_{x_0}^{x_1} y^2 f'(x)\,dx. \tag{9.}$$

Das Integral auf der rechten Seite kann man nach dem zweiten Mittelwerthsatz*) umformen; da y^2 eine positive, von x_0 bis x_1 hin wachsende Grösse ist, erhält man

$$\int_{x_0}^{x_1} y^2 f'(x)\,dx = y_1^2 \int_{\xi_0}^{x_1} f'(x)\,dx = y_1^2\big(f(x_1) - f(\xi_0)\big),$$

wobei

$$x_0 \leqq \xi_0 \leqq x_1,$$

also nach (9.)

$$y_0'^2 = y_1^2 f(\xi_0). \tag{9a.}$$

Erstreckt man ferner in der Gleichung (8.) die Integration von x_1 bis x_2, so ergiebt sich

$$y_2'^2 = y_1^2 f(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} y^2 f'(x)\,dx; \tag{10.}$$

Da die Grösse y^2 von x_1 bis x_2 beständig abnimmt, so giebt jetzt der zweite Mittelwerthsatz

$$\int_{x_1}^{x_2} y^2 f'(x)\,dx = y_1^2 \int_{x_1}^{\xi_1} f'(x)\,dx = y_1^2\big(f(\xi_1) - f(x_1)\big),$$

wobei

$$x_1 \leqq \xi_1 \leqq x_2;$$

daraus folgt nach (10.)

$$y_2'^2 = y_1^2 f(\xi_1)$$

und mit Berücksichtigung der Gleichung (9a.)

$$\left(\frac{y_2'}{y_0'}\right)^2 = \frac{f(\xi_1)}{f(\xi_0)}.$$

In dieser Entwickelung kann man offenbar $x_{2\nu}$, $x_{2\nu+1}$, $x_{2\nu+2}$ für x_0, x_1, x_2 setzen; bei passender Wahl der Grössen ξ, welche den Ungleichungen

$$x_{2\nu} \leqq \xi_{2\nu} \leqq x_{2\nu+1}, \quad x_{2\nu+1} \leqq \xi_{2\nu+1} \leqq x_{2\nu+2} \tag{11.}$$

*) *Dini,* Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali (1878) § 211, p. 294.

genügen, kann man setzen

$$(12.) \qquad y'^2_{2\nu} = y^2_{2\nu+1} f(\xi_{2\nu}), \quad y'^2_{2\nu+2} = y^2_{2\nu+1} f(\xi_{2\nu+1}),$$
$$\left(\frac{y'_{2\nu+2}}{y'_{2\nu}}\right)^2 = \frac{f(\xi_{2\nu+1})}{f(\xi_{2\nu})}.$$

Nun lehrt die Identität

$$y'^2_{2\nu} = y'^2_0 \left(\frac{y'_2}{y'_0}\right)^2 \left(\frac{y'_4}{y'_2}\right)^2 \cdots \left(\frac{y'_{2\nu}}{y'_{2\nu-2}}\right)^2,$$

dass der Grenzwerth

$$\lim_{\nu=+\infty} y'^2_{2\nu}$$

bestimmt, endlich und positiv ist, sobald das Product

$$P = \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{f(\xi_{2\nu+1})}{f(\xi_{2\nu})}$$

convergirt. Eine hinreichende Bedingung dafür besteht nach *Weierstrass**) darin, dass die Reihe

$$S = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{\frac{f(\xi_{2\nu+1})}{f(\xi_{2\nu})} - 1\right\}$$

absolut convergent ist. Die einzelnen Glieder dieser Reihe werden, da bei unbegrenzt wachsenden Werthen von ν die Grössen ξ nach (11.) und (7.) unendlich gross werden, schliesslich unendlich klein. Um ihre Grösse näher abschätzen zu können, gehen wir aus von der Gleichung

$$S_\nu = \frac{f(\xi_{2\nu+1})}{f(\xi_{2\nu})} - 1 = \frac{f(\xi_{2\nu+1}) - f(\xi_{2\nu})}{f(\xi_{2\nu})} = \frac{f'(\eta_\nu)(\xi_{2\nu+1} - \xi_{2\nu})}{f(\xi_{2\nu})},$$

wobei

$$\xi_{2\nu} \leqq \eta_\nu \leqq \xi_{2\nu+1},$$

also nach (11.) auch

$$x_{2\nu} \leqq \eta_\nu \leqq x_{2\nu+2},$$

oder, was dasselbe bedeutet

$$(13.) \qquad x_{4\nu} \leqq \eta_{2\nu} \leqq x_{4\nu+2} \leqq \eta_{2\nu+1} \leqq x_{4\nu+4}.$$

Nach der ersten Ungleichung (7.) hat man aber

$$x_4 - x_0 > \frac{\pi}{A}, \quad x_8 - x_4 > \frac{\pi}{A}, \quad \ldots,$$

also wenn man addirt und die Relationen (13.) berücksichtigt

$$x_{4\nu} > x_0 + \frac{\nu\pi}{A}, \quad \eta_{2\nu} > x_0 + \frac{\nu\pi}{A}, \quad \eta_{2\nu+1} > x_0 + \frac{\nu\pi}{A}.$$

---

*) *Weierstrass* Werke Bd. I (1894) S. 176.

Wenn nun $\Phi(x)$ eine Function ist, welche für $x > g$ mit dem Argument wächst und stets positiv ist, so ist offenbar

$$(14.) \quad \Phi(\eta_{2\nu}) > \Phi\Big(x_0 + \frac{\nu\pi}{A}\Big), \quad \Phi(\eta_{2\nu+1}) > \Phi\Big(x_0 + \frac{\nu\pi}{A}\Big);$$

Da ferner nach (11.) und (7.)

$$\xi_{2\nu+1} - \xi_{2\nu} \leqq \frac{2\pi}{B}$$

ist, so folgt

$$|S_\nu| \leqq \frac{2\pi}{B} \left| \frac{f'(\eta_\nu)}{f(\xi_{2\nu})} \right|,$$

also a fortiori, wenn man ν durch 2ν oder $2\nu+1$ ersetzt und die Ungleichungen (1ª.) und (14.) benutzt,

$$|S_{2\nu}| < \frac{2\pi}{B^3 \Phi\Big(x_0 + \frac{\nu\pi}{A}\Big)} |f'(\eta_{2\nu})\Phi(\eta_{2\nu})|,$$

$$|S_{2\nu+1}| < \frac{2\pi}{B^3 \Phi\Big(x_0 + \frac{\nu\pi}{A}\Big)} |f'(\eta_{2\nu+1})\Phi(\eta_{2\nu+1})|.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die Reihe S absolut convergent ist, wenn es gelingt, die Function Φ in folgender Weise zu bestimmen. Die Grösse $|f'(x)\Phi(x)|$ bleibe unterhalb einer positiven Constanten, wenn x unbegrenzt wächst, und die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\Phi\Big(x_0 + \frac{\nu\pi}{A}\Big)},$$

deren Glieder positiv sind, convergire. Letztere Forderung ist z. B. erfüllt, wenn man setzt*)

$$\Phi(x) = x^{1+\gamma}$$

und unter γ eine beliebige positive Constante versteht; wenn daher eine derartige positive Grösse G existirt, dass für $x > g$

$$|x^{1+\gamma} f'(x)| < G,$$

so ist das Product P convergent und der Grenzwerth

$$\lim_{\nu=+\infty} y'^2_{2\nu}$$

endlich, bestimmt und positiv; die Gleichungen (12.) ergeben dann, da offenbar

$$\lim_{\nu=+\infty} f(\xi_{2\nu}) = \lim_{\nu=+\infty} f(\xi_{2\nu+1}) = a^2,$$

*) ***Lejeune-Dirichlet,*** Zahlentheorie herausg. von ***Dedekind*** (1894) § 117 S. 304.

dass auch die Grösse $y_{2\nu+1}^2$ für $\nu = +\infty$ einem bestimmten Grenzwerth zustrebt, nämlich dem Werth

$$\lim_{\nu=+\infty} y_{2\nu+1}^2 = \frac{1}{a^2} \lim_{\nu=+\infty} y_{2\nu}'^2. \tag{15.}$$

Da nun in jeder Nullstelle von y und y' die verschwindende Grösse ihr Zeichen wechselt, so ist jede der Grössen $y'_{2\nu}$ und $y_{2\nu+1}$ abwechselnd positiv und negativ bei wachsenden Werthen von ν; man hat also

$$\lim_{\nu=+\infty} y_{4\nu+1} = -\lim_{\nu=+\infty} y_{4\nu+3}, \quad \lim_{\nu=+\infty} y'_{4\nu} = -\lim_{\nu=+\infty} y'_{4\nu+2}; \tag{16.}$$

die Grenzwerthe in beiden Gleichungen sind endlich und bestimmt. Ferner ist $y_{4\nu+1}$ ein Maximal- oder Minimalwerth von y, je nachdem $y'_{4\nu}$ positiv oder negativ ist; daraus folgt mit Rücksicht auf (15.) und (16.):

$$\lim_{\nu=+\infty} y'_{4\nu} = a \lim_{\nu=+\infty} y_{4\nu+1}, \quad \lim_{\nu=+\infty} y'_{4\nu+2} = a \lim_{\nu=+\infty} y_{4\nu+3}.$$

Hiermit ist folgender Satz erwiesen.

Die reelle Function $f(x)$ sei nebst ihrer ersten Ableitung endlich und stetig, sobald x einen positiven Werth g überschritten hat, und nähere sich, wenn man x unbegrenzt wachsen lässt, einer positiven Grenze a^2; dann hat die Differentialgleichung

$$y'' + yf(x) = 0$$

Integrale, welche nebst ihrer ersten Ableitung endlich und stetig sind, sobald $x > g$, und oberhalb jeder Grenze noch verschwinden. Giebt es ferner derartige positive Constante γ und g, dass die Ungleichung

$$|x^{1+\gamma} f'(x)| < g$$

besteht, sobald $x > g$, und ist y ein Integral von der angegebenen Beschaffenheit, so convergirt der absolute Betrag, den y' in den Nullstellen von y hat, gegen einen endlichen positiven Grenzwerth, wenn man zu immer grösseren Nullstellen übergeht; dasselbe gilt von den absoluten Beträgen der Grösse y in den Nullstellen der Ableitung. Letzterer Grenzwerth giebt mit a multiplicirt den ersteren.

Als Corollar ergiebt sich sofort, dass es unter den eingeführten Voraussetzungen eine endliche positive Grösse giebt, welche von $|y|$ und $|y'|$ nicht überschritten wird, so gross auch das Argument genommen werden mag.

§ 3.

Angenäherte Darstellung der betrachteten Integrale durch trigonometrische Functionen.

Wenn die Differenz

$$\varphi(x) = f(x) - a^2$$

identisch verschwindet, so hat die Differentialgleichung (1.) die Integrale $\cos ax$ und $\sin ax$. Es liegt daher nahe zu fragen, ob durch diese Functionen im allgemeineren Falle die Integrale der Gleichung (1.) wenigstens für grosse Werthe von x annähernd dargestellt werden. Diese Frage kann nicht schlechthin bejaht werden, sondern nur, wenn die Function $\varphi(x)$ eine gewisse Eigenschaft besitzt.

Setzen wir in der Gleichung (1.) z. B.

$$y = \cos ax + z,$$

so ergiebt sich für z die nicht homogene Differentialgleichung

$$z'' + zf(x) = -\varphi(x)\cos ax. \tag{17.}$$

Um ihre Integration auf diejenige der homogenen Gleichung zu reduciren, nehmen wir an, Y_1 und Y_2 seien zwei linear unabhängige Lösungen der Gleichung (1.); man kann nach § 2 annehmen, dass dieselben nebst ihren ersten Ableitungen in dem Intervall von g bis $+\infty$ stetig sind und zwischen endlichen Grenzen verbleiben, so dass jedenfalls bei passender Wahl der positiven Constanten C die Ungleichungen

$$|Y_1 \cos ax| < C, \quad |Y_2 \cos ax| < C \tag{18.}$$

bestehen, sobald $x > g$. Dabei können die Werthe Y_1, Y_2, Y_1', Y_2' für irgend ein Argument willkürlich fixirt werden; sind sie z. B. 1, 0, 0, 1, so hat man für das ganze Gebiet J:

$$Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1' = 1, \tag{19.}$$

da die Ableitung der linken Seite verschwindet, wenn Y_1 und Y_2 Lösungen der Gleichung (1.) sind.

Nun gilt bekanntlich die Formel

$$z = U_1 Y_1 + U_2 Y_2, \tag{20.}$$

wenn man U_1 und U_2 durch die Gleichungen

$$U_1' Y_1 + U_2' Y_2 = 0, \quad U_1' Y_1' + U_2' Y_2' = -\varphi(x)\cos ax$$

bestimmt; löst man diese nach U_1' und U_2', so ergeben die Formeln (19.)

und (20.), wenn man unter c_1, c_2, b_1, b_2 Constante versteht,

$$(21.)\quad z = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + Y_1 \int_{b_1}^{x} Y_2 \varphi(x) \cos ax\, dx - Y_2 \int_{b_2}^{x} Y_1 \varphi(x) \cos ax\, dx.$$

Um diesen Ausdruck für grosse Werthe von x discutiren zu können, werde die neue Voraussetzung eingeführt, dass, wenn $x > g$, das Integral

$$\int_{x}^{+\infty} \varphi(x)\, dx$$

einen bestimmten, endlichen Werth habe, und dass die Function $\varphi(x)$ oberhalb einer gewissen Grenze g_0 ihr Vorzeichen nicht mehr ändere. Wenn dann $x > b_2 > g_0$, so ist nach dem ersten Mittelwerthsatze

$$\int_{b_2}^{x} Y_1 \varphi(x) \cos ax\, dx = (Y_1 \cos ax)_{x=\xi} \int_{b_2}^{x} \varphi(x)\, dx,$$

wobei

$$b_2 \leqq \xi \leqq x;$$

hieraus folgt nach (18.)

$$(22.)\qquad \left| \int_{b_2}^{x} Y_1 \varphi(x) \cos ax\, dx \right| < C \left| \int_{b_2}^{x} \varphi(x)\, dx \right|.$$

Diese Ungleichung lehrt, dass das Integral

$$(23.)\qquad \int_{b_2}^{+\infty} Y_1 \varphi(x) \cos ax\, dx$$

einen bestimmten, endlichen Werth besitzt. Denn theilen wir das Integrationsgebiet desselben in unendlich viele Theile, so sind die zugehörigen Theilintegrale nach (22.) dem absoluten Betrage nach kleiner als die entsprechend gebildeten Summanden, in die man das Integral

$$\int_{b_2}^{+\infty} |\varphi(x)|\, dx = \left| \int_{b_2}^{+\infty} \varphi(x)\, dx \right|$$

zerlegen kann. Dieses ist nach der eingeführten Voraussetzung endlich; das Integral (23.) erscheint demnach als eine Summe unzähliger Summanden, deren jeder dem absoluten Betrage nach kleiner ist als ein entsprechendes Glied einer convergenten Reihe, deren Glieder gleiches Vorzeichen besitzen; damit ist die aufgestellte Behauptung bewiesen. Ebenso ist offenbar auch das Integral

$$\int_{b_1}^{+\infty} Y_2 \varphi(x) \cos ax\, dx,$$

wenn $b_1 > g_0$, endlich und bestimmt.

Auf Grund dieser Resultate kann man in der Formel (21.) setzen

$$c_1 = -\int_{b_1}^{+\infty} Y_2 \varphi(x) \cos ax\, dx, \quad c_2 = \int_{b_2}^{+\infty} Y_1 \varphi(x) \cos ax\, dx;$$

benutzt man die Identitäten

$$(24.) \qquad -\int_{b_1}^{+\infty} + \int_{b_1}^{x} = -\int_{x}^{+\infty}, \quad \int_{b_2}^{+\infty} - \int_{b_2}^{x} = \int_{x}^{+\infty},$$

so erhält man für $x > g_0$ als particuläres Integral der Gleichung (17.) den Ausdruck

$$z = -Y_1 \int_{x}^{+\infty} Y_2 \cos ax\, \varphi(x)\, dx + Y_2 \int_{x}^{+\infty} Y_1 \cos ax\, \varphi(x)\, dx.$$

Da nun bei wachsenden Werthen von x die Grössen $|Y_1|$, $|Y_2|$, $|Y_1'|$, $|Y_2'|$ unter einer endlichen Grenze bleiben, so folgt für $x = +\infty$:

$$(25.) \qquad \lim z = 0,$$

und ebenso, da

$$z' = -Y_1' \int_{x}^{+\infty} Y_2 \cos ax\, \varphi(x)\, dx + Y_2' \int_{x}^{+\infty} Y_1 \cos ax\, \varphi(x)\, dx,$$

ergiebt sich

$$(26.) \qquad \lim z' = 0.$$

Es giebt also ein particuläres Integral der Gleichung (1.) von der Form

$$y = \cos ax + z,$$

für welches die Gleichungen (25.) und (26.) bestehen, so dass das Integral für grosse Werthe von x annähernd durch $\cos ax$ dargestellt wird.

In der ganzen Entwickelung dieses Paragraphen kann nun offenbar $\cos ax$ durch $\sin ax$ ersetzt werden, da nur beiden Functionen gemeinsame Eigenschaften der ersteren benutzt worden sind; die Gleichung (1.) hat also auch ein particuläres Integral von der Form

$$\bar{y} = \sin ax + \bar{z},$$

wobei

$$\lim \bar{z} = \lim \bar{z}' = 0.$$

Der Quotient $y : \bar{y}$ kann nicht constant sein, da die Grösse

$$y\bar{y}' - \bar{y}y' = a + z(a \cos ax + \bar{z}') - \bar{z}(-a \sin ax + z')$$

für $x = +\infty$ dem Grenzwerth a zustrebt; das allgemeine Integral der Gleichung (1.) kann daher für $x > g_0$ durch y und $\bar{y}$ linear homogen mit con-

stanten Coefficienten dargestellt werden. Die hiermit erhaltenen Resultate formuliren wir in folgender Weise.

Macht man für die am Schlusse des § 2 betrachtete Differentialgleichung die Voraussetzung, dass, sobald x eine gewisse Grenze g_0 überschritten hat, das Integral

$$\int_x^{+\infty} (f(x)-a^2)dx$$

endlich und bestimmt sei, die Differenz $f(x)-a^2$ aber ihr Zeichen nicht mehr ändere, so kann jedes Integral jener Gleichung für $x > g_0$ dargestellt werden in der Form

$$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \varepsilon,$$

wobei C_1 und C_2 Constante sind, und für $x = +\infty$ die Gleichungen

$$\lim \varepsilon = \lim \varepsilon' = 0$$

bestehen.

§ 4.

Vorläufige Betrachtung der divergenten Reihen, welche gewissen Differentialgleichungen formal genügen.

*Poisson**) hat die *Bessel*sche Function $J_0(x)$ in eine semiconvergente, nach fallenden Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickelt; die von ihm gegebene Formel ist durch Betrachtung bestimmter Integrale von *Lipschitz***) streng bewiesen worden. Die Resultate der vorigen beiden Paragraphen erlauben uns, nicht nur die *Poisson*sche Entwickelung von der *Bessel*schen Differentialgleichung ausgehend zu beweisen, sondern auch einen ähnlichen Ausdruck für jedes Integral derselben, und für eine umfassende Klasse linearer Differentialgleichungen asymptotische Darstellungen ihrer allgemeinen Integrale herzuleiten.

Die Gleichung

$$y''+y\left(a^2+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots\right) = 0,$$

in welcher die Constanten a, a_1, a_2, ... reell und der Coefficient von y eine für hinreichend grosse, endliche Werthe von x convergente Reihe sein

---

*) *Poisson*, Second mémoire sur la distribution de la chaleur dans les corps solides, Journal de l'École polytechnique t. XII cah. 19, p. 350 (1823).

**) *Lipschitz*, Ueber ein Integral der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial I}{\partial x}+I=0$ Bd. LXVI dieses Journals S. 189 (1858).

möge, kann, indem man ax als unabhängige Variable einführt, auf die Form

$$y''+y\left(1+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots\right)=0 \tag{27.}$$

gebracht werden. Sie gehört zu den in § 2 betrachteten Gleichungen; soll auch das Theorem des § 3 anwendbar sein, so muss man setzen

$$a_1=0, \tag{28.}$$

da andernfalls die Grösse

$$\int_x^{+\infty}(f(x)-a^2)dx=\int_x^{+\infty}\left(\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots\right)dx$$

keinen endlichen Werth hätte. Auf die Annahme (28.) kommt man auch, wenn man der Gleichung (27.) durch den mit constanten Coefficienten α, β gebildeten Ausdruck

$$u=\cos x\left(\alpha_0+\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_2}{x^2}+\cdots\right)+\sin x\left(\beta_0+\frac{\beta_1}{x}+\frac{\beta_2}{x^2}+\cdots\right)=X_1\cos x+X_2\sin x$$

rein formal zu genügen sucht. Setzt man nämlich, wenn w eine beliebige Function von x ist,

$$\Psi(w)=w''+w\left(1+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots\right),$$

so ist offenbar

$$\begin{cases}\Psi(u)=X_1''\cos x+X_2''\sin x-2X_1'\sin x+2X_2'\cos x\\ \qquad\qquad +(X_1\cos x+X_2\sin x)\left(\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots\right);\end{cases} \tag{29.}$$

Die Potenz x^{-1} kommt also nur in den beiden Gliedern

$$\frac{\alpha_0 a_1\cos x}{x},\quad \frac{\beta_0 a_1\sin x}{x}$$

vor. Entwickelt man ferner, indem man die mit $\cos x$ und $\sin x$ multiplicirten Glieder zusammenfasst,

$$\Psi(u)=\cos x\left(A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\cdots\right)+\sin x\left(B_0+\frac{B_1}{x}+\frac{B_2}{x^2}+\cdots\right)$$

so ist zunächst

$$A_0=B_0=0,$$

und die Gleichung (29.) ergiebt für jede ganze Zahl n

$$\begin{cases}A_n=(n-1)(n-2)\alpha_{n-2}-2(n-1)\beta_{n-1}+a_1\alpha_{n-1}+a_2\alpha_{n-2}+\cdots+a_n\alpha_0,\\ B_n=(n-1)(n-2)\beta_{n-2}+2(n-1)\alpha_{n-1}+a_1\beta_{n-1}+a_2\beta_{n-2}+\cdots+a_n\beta_0.\end{cases} \tag{30.}$$

Setzt man daher allgemein

$$A_n = B_n = 0, \tag{31.}$$

und benutzt diese Gleichungen zur Bestimmung von α_{n-1}, β_{n-1} durch die Grössen α, β mit geringerem Index, so ist die Determinante der Coefficienten von α_{n-1} und β_{n-1}

$$\begin{vmatrix} a_1 & -2(n-1) \\ 2(n-1) & a_1 \end{vmatrix} = a_1^2 + 4(n-1)^2$$

von Null verschieden, sobald $n > 1$; für $n = 1$ und $n = 2$ ergiebt sich

$$\alpha_0 a_1 = 0, \quad \beta_0 a_1 = 0, \quad -2\beta_1 + a_1\alpha_0 = 0, \quad 2\alpha_1 + a_1\beta_0 = 0.$$

Wäre also a_1 von Null verschieden, so folgte

$$\alpha_0 = \beta_0 = \alpha_1 = \beta_1 = 0,$$

und da die Formeln (31.) offenbar α_{n-1} und β_{n-1} als lineare homogene Ausdrücke der vorhergehenden Grössen α, β ergeben, so müssten diese Coefficienten sämmtlich verschwinden. Soll daher eine der Gleichung (27.) formal genügende Reihe u existiren, so muss die Gleichung (28.) bestehen, die wir von jetzt an voraussetzen wollen. Alsdann ergeben die Recursionsformeln (31.) bei willkürlicher Wahl von α_0 und β_0 endliche und bestimmte Werthe aller Grössen α_ν, β_ν.

Um nun zu untersuchen, in wiefern die durch die Gleichungen (31.) definirte Entwickelung u zur asymptotischen Darstellung der Integrale der Gleichung (27.) geeignet ist, setzen wir

$$u_n = \cos x \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\alpha_\nu}{x^\nu} + \sin x \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\beta_\nu}{x^\nu}, \quad y = u_n + z;$$

dann geht die Gleichung (27.) in folgende Form über:

$$\Psi(y) = \Psi(z) + \Psi(u_n) = 0,$$

$$z'' + z\left(1 + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \cdots\right) = -\Psi(u_n); \tag{32.}$$

hat letztere Gleichung ein particuläres Integral, für welches

$$\lim(x^n z) = 0, \tag{33.}$$

so hat man auch für das entsprechende Integral y

$$\lim((y - u_n)x^n) = 0,$$

und die Reihe u giebt, gleichviel ob sie im gewöhnlichen Sinne des Wortes convergent ist oder nicht, eine asymptotische Darstellung von y nach der

von *Poincaré**) gegebenen Definition. Das Ziel unserer nächsten Untersuchungen ist, zu zeigen, dass bei willkürlicher Wahl von α_0 und β_0 ein Integral z von der angegebenen Beschaffenheit existirt.

Zunächst knüpfen wir an die Formeln (30.) die Bemerkung, dass bei willkürlicher Wahl aller Coefficienten α_ν, β_ν nur diejenigen von ihnen, für welche $\nu \leqq n$ ist, in den Ausdrücken $A_1, \ldots, A_{n+1}, B_1, \ldots, B_{n+1}$ vorkommen. Da nun $\Psi(u)$ dadurch in $\Psi(u_n)$ übergeführt werden kann, dass man alle Grössen α_ν, β_ν, in welchen $\nu > n$, verschwinden lässt, so kann man setzen

$$(34.)\quad \begin{cases} \Psi(u_n) = \cos x\left(\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\cdots+\frac{A_{n+1}}{x^{n+1}}\right)+\sin x\left(\frac{B_2}{x^2}+\frac{B_3}{x^3}+\cdots+\frac{B_{n+1}}{x^{n+1}}\right) \\ \qquad\qquad +\frac{\cos x}{x^{n+2}}\left(\lambda_n+\frac{1}{x}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)\right)+\frac{\sin x}{x^{n+2}}\left(\mu_n+\frac{1}{x}\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right)\right), \end{cases}$$

wobei durch $\mathfrak{P}$, wie fortan immer geschehen soll, Potenzreihen bezeichnet werden, welche für hinreichend kleine, von Null verschiedene Werthe des Arguments $1:x$ convergiren, und die Constanten λ_n und μ_n aus A_{n+2} und B_{n+2} entstehen, indem man die Glieder mit α_{n+1} und β_{n+1} weglässt, sodass nach (30.)

$$\begin{aligned} \lambda_n &= n(n+1)\alpha_n+a_2\alpha_n+a_3\alpha_{n-1}+\cdots+a_{n+2}\alpha_0, \\ \mu_n &= n(n+1)\beta_n+a_2\beta_n+a_3\beta_{n-1}+\cdots+a_{n+2}\beta_0. \end{aligned}$$

Wenn daher allgemein die Formeln (31.) gelten, so hat man

$$(35.)\qquad \lambda_n = 2(n+1)\beta_{n+1},\quad \mu_n = -2(n+1)\alpha_{n+1},$$

und die Formel (34.) ergiebt

$$(36.)\qquad \Psi(u_n)=\frac{\cos x}{x^{n+2}}\left(\lambda_n+\frac{1}{x}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)\right)+\frac{\sin x}{x^{n+2}}\left(\mu_n+\frac{1}{x}\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right)\right)=-W.$$

Dieser Ausdruck ist auf der rechten Seite der Gleichung (32.) einzusetzen. Die homogene Gleichung, auf welche ihre Integration führt, ist mit der gegebenen Gleichung (27.) identisch. Zwei von einander unabhängige Lösungen dieser kann man nach § 3 in der Form

$$(37.)\qquad Y_1 = \cos x+\varepsilon_1,\quad Y_2 = \sin x+\varepsilon_2$$

schreiben, wobei

$$(38.)\qquad \lim\varepsilon_1 = \lim\varepsilon_2 = \lim\varepsilon_1' = \lim\varepsilon_2' = 0.$$

---

*) *Poincaré*, Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. Acta math. Bd. VIII (1885) p. 296.

und ferner die Gleichung

$$Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1' = 1$$

besteht, da ihre linke Seite constant und für grosse Werthe von x beliebig wenig von Eins verschieden ist. Alsdann hat das allgemeine Integral der Gleichung (32.) den Ausdruck

$$z = U_1 Y_1 + U_2 Y_2,$$

während zur Bestimmung von U_1 und U_2 die folgenden Gleichungen gelten:

$$U_1' Y_1 + U_2' Y_2 = 0,$$
$$U_1' Y_1' + U_2' Y_2' = -\varPsi(u_n) = W.$$

Hieraus folgt, wenn unter b_1, b_2, c_1, c_2 Constante verstanden werden,

$$(39.) \qquad z = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 - Y_1 \int_{b_1}^{x} W Y_2 dx + Y_2 \int_{b_2}^{x} W Y_1 dx;$$

dabei sind die Constanten b_1, b_2 positiv und so gross zu wählen, dass oberhalb derselben die Integrale Y_1, Y_2 nebst ihren ersten Ableitungen stetig sind.

Eine wichtige Umformung dieses Ausdrucks z erhält man ausgehend von der Thatsache, dass die Integrale

$$\int_{b_1}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\nu} dx, \quad \int_{b_1}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{n+3}} \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right) dx, \quad \int_{b_2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\nu} dx, \quad \int_{b_2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{n+3}} \mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

für $\nu \geqq 2$ endlich und bestimmt sind, da die Grössen $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)$ und $\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right)$, wenn x unbegrenzt wächst, endlichen Grenzwerthen zustreben. Berücksichtigt man den Umstand, dass die Grössen Y_1 und Y_2 nach (37.) zwischen endlichen Grenzen bleiben, so lehrt die Gleichung (36.) durch Schlüsse, welche wie bei der entsprechenden Untersuchung in § 3 streng zu formuliren sind, dass die Integrale

$$\int_{b_1}^{+\infty} W Y_2 dx, \quad \int_{b_2}^{+\infty} W Y_1 dx$$

endliche und bestimmte Werthe besitzen. Es ist daher erlaubt, in der Gleichung (39.) zu setzen

$$c_1 = \int_{b_1}^{+\infty} W Y_2 dx, \quad c_2 = -\int_{b_2}^{+\infty} W Y_1 dx;$$

dadurch erhält man, wenn man die Identitäten (24.) berücksichtigt, das

folgende particuläre Integral der Gleichung (32.):

$$(40.) \qquad z = Y_1 \int_x^{+\infty} W Y_2 \, dx - Y_2 \int_x^{+\infty} W Y_1 \, dx.$$

Diese Function wird offenbar für $x = +\infty$ unendlich klein; eingehendere Untersuchung erheischt die Frage, ob auch die Gleichung (33.) besteht.

§ 5.

Nähere Untersuchung des erhaltenen Ausdrucks z für grosse Werthe von x.

Setzt man die expliciten Ausdrücke von W, Y_1, Y_2 aus den Gleichungen (36.) und (37.) in die Formel (40.) ein, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} z = &-(\cos x+\varepsilon_1)\int_x^{+\infty} \frac{\sin x+\varepsilon_2}{x^{n+2}} \left\{\cos x\left(\lambda_n+\frac{1}{x}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right. \\ &\qquad \left. +\sin x\left(\mu_n+\frac{1}{x}\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right\} dx \\ &+(\sin x+\varepsilon_2)\int_x^{+\infty} \frac{\cos x+\varepsilon_1}{x^{n+2}} \left\{\cos x\left(\lambda_n+\frac{1}{x}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right. \\ &\qquad \left. +\sin x\left(\mu_n+\frac{1}{x}\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right\} dx. \end{aligned}$$

Wenn man nun auf der rechten Seite die Klammern auflöst, so kann man drei Arten von einzelnen Gliedern unterscheiden; erstens solche, bei welchen unter dem Integralzeichen ein Factor ε steht; zweitens solche, in denen der Nenner die Potenz x^{n+3} oder eine höhere enthält; endlich solche, deren Nenner die Grösse x^{n+2}, deren Zähler aber keinen Factor ε enthält.

Ein Summand der ersten Art ist z. B.

$$S = -(\cos x+\varepsilon_1)\int_x^{+\infty} \frac{\varepsilon_2 \cos x}{x^{n+2}}\left(\lambda_n+\frac{1}{x}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx = -(\cos x+\varepsilon_1) L.$$

Auf das Integral L kann man bei hinreichend grossen Werthen von x den ersten Mittelwerthsatz anwenden, da schliesslich die Grösse $\lambda_n+\frac{1}{x}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)$ ihr Zeichen nicht mehr ändert; bezeichnet man durch G_x die obere Grenze von $|\varepsilon_2 \cos x|$ für alle x überschreitenden Argumente, sodass nach (38.)

$$(41.) \qquad \lim G_x = 0,$$

so hat man

$$|L| \leqq G_x \left| \int_x^{+\infty} \left(\lambda_n+\frac{1}{x}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)\right)\frac{dx}{x^{n+2}} \right|,$$

oder in einer neuen Bezeichnung

$$|L| \leqq \frac{G_x}{x^{n+1}} \left| \mathfrak{P}_3\left(\frac{1}{x}\right) \right|,$$

also nach (41.)

$$\lim(x^{n+1} L) = 0, \tag{42.}$$

mithin auch

$$\lim(x^{n+1} S) = 0. \tag{43.}$$

Ferner ist offenbar

$$S' = (\sin x - \varepsilon_1') L + \frac{\varepsilon_2 \cos x (\cos x + \varepsilon_1)}{x^{n+2}} \left(\lambda_n + \frac{1}{x} \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right) \right),$$

also nach (42.) und (38.)

$$\lim(x^{n+1} S') = 0. \tag{44.}$$

Selbstverständlich erhält man die Formeln (43.) und (44.) auch, wenn man unter S ein anderes Glied erster Art des Ausdrucks z versteht.

Die zweite Art von Summanden ist ebenso leicht zu behandeln. Ein Beispiel dieser Art wäre das Glied

$$T = -(\cos x + \varepsilon_1) \int_x^{+\infty} \frac{\sin x \cos x}{x^{n+3}} \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right) dx = -(\cos x + \varepsilon_1) M.$$

Da der Ausdruck $\frac{1}{x^{n+3}} \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)$ sein Vorzeichen beibehält, wenn x eine gewisse Grenze überschritten hat, so besteht die Ungleichung

$$|M| \leqq \left| \int_x^{+\infty} \frac{1}{x^{n+3}} \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right) dx \right|$$

oder in neuer Bezeichnung

$$|M| \leqq \left| \frac{1}{x^{n+2}} \mathfrak{P}_4\left(\frac{1}{x}\right) \right|,$$

woraus sich ergiebt

$$\lim(x^{n+1} M) = 0 \tag{45.}$$

mithin auch

$$\lim(x^{n+1} T) = 0. \tag{46.}$$

Differentiirt man ferner T, so ergiebt sich

$$T' = (\sin x - \varepsilon_1') M + \frac{(\cos x + \varepsilon_1) \sin x \cos x}{x^{n+3}} \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right),$$

und hieraus auf Grund der Gleichung (45.)

$$\lim(x^{n+1} T') = 0; \tag{47.}$$

die Relationen (46.) und (47.) gelten wiederum für jedes Glied zweiter Art.

Bezeichnet man nun durch (S) die Summe aller Glieder erster, durch (T) die Summe aller Glieder zweiter Art, so kann man schreiben

$$z = (S)+(T)-(\cos x+\varepsilon_1)\int_x^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{n+2}}(\lambda_n\cos x+\mu_n\sin x)\,dx$$
$$+(\sin x+\varepsilon_2)\int_x^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{n-2}}(\lambda_n\cos x+\mu_n\sin x)\,dx$$

oder auch

$$z-(S)-(T) = -(\cos x+\varepsilon_1)\int_x^{+\infty}\Big(\frac{\lambda_n\sin 2x}{2x^{n+2}}+\frac{1-\cos 2x}{2x^{n+2}}\Big)dx$$
$$+(\sin x+\varepsilon_2)\int_x^{+\infty}\Big(\frac{\lambda_n(1+\cos 2x)}{2x^{n+2}}+\frac{\mu_n\sin 2x}{2x^{n+2}}\Big)dx.$$

Hier unterscheiden wir Glieder, bei denen unter dem Integralzeichen eine trigonometrische Function steht, und solche, bei denen dies nicht der Fall ist. Eins der ersteren ist

$$U = -(\cos x+\varepsilon_1)\int_x^{+\infty}\frac{\lambda_n\sin 2x}{2x^{n+2}}\,dx = -\frac{\lambda_n}{2}(\cos x+\varepsilon_1)N.$$

Auf das Integral N kann man den zweiten Mittelwerthsatz anwenden; da die Function x^{-n-1} beständig abnimmt bei wachsenden Werthen des Arguments, so hat man zunächst, wenn $\bar{x} > x$,

$$\int_x^{\bar{x}}\frac{\sin 2x}{x^{n+2}}\,dx = \frac{1}{x^{n+2}}\int_x^{\xi}\sin 2x\,dx,$$

wobei

$$x \leqq \xi \leqq \bar{x}.$$

Hieraus folgt

$$\Big|\int_x^{\bar{x}}\frac{\sin 2x}{x^{n+2}}\,dx\Big| \leqq \frac{1}{2x^{n+2}}|\cos 2x-\cos 2\xi| \leqq \frac{1}{x^{n+2}},$$

und da diese Ungleichung für beliebig grosse Werthe von $\bar{x}$ gilt, so folgt

$$\Big|\int_x^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^{n+2}}\,dx\Big| \leqq \frac{1}{x^{n+2}}, \quad |N| \leqq \frac{1}{x^{n+2}},$$

also

(48.) $$\lim(x^{n+1}N) = 0,$$

und weiter

(49.) $$\lim(x^{n+1}U) = 0.$$

Ferner hat man die Gleichung

$$U' = -\frac{\lambda_n}{2}(\sin x-\varepsilon_1')N-\frac{\lambda_n}{2}(\cos x+\varepsilon_1)\frac{\sin 2x}{x^{n+2}},$$

also nach (48.) und (38.)

$$\lim(x^{n+1}U') = 0 \tag{50.}$$

und auch hier gelten die Gleichungen (49.) und (50.) für alle Glieder des Typus U.

Die Glieder endlich, welche nach Abscheidung aller S, T, U übrig bleiben, können explicite ausgerechnet werden; bezeichnet man durch (U) das Aggregat aller Glieder der zuletzt betrachteten Art, so ergiebt sich

$$z-(S)-(T)-(U) = -\frac{\mu_n(\cos x+\varepsilon_1)}{2(n+1)x^{n+1}}+\frac{\lambda_n(\sin x+\varepsilon_2)}{2(n+1)x^{n+1}},$$

oder wenn man die unter (35.) angegebenen Werthe λ_n und μ_n einsetzt,

$$z-(S)-(T)-(U) = \frac{\alpha_{n+1}(\cos x+\varepsilon_1)+\beta_{n+1}(\sin x+\varepsilon_2)}{x^{n+1}}. \tag{51.}$$

Setzt man ferner

$$v = x^{n+1}\{(S)+(T)+(U)\},$$

so lehren die Gleichungen (43.), (46.), (49.)

$$\lim v = 0; \tag{52.}$$

hieraus und aus der Gleichung

$$v' = \frac{(n+1)v}{x}+x^{n+1}\{(S)'+(T)'+(U)'\}$$

folgt nach (44.), (47.), (50.)

$$\lim v' = 0. \tag{53.}$$

Da nun die Gleichung (51.) geschrieben werden kann

$$z = \frac{\alpha_{n+1}\cos x+\beta_{n+1}\sin x+v+\alpha_{n+1}\varepsilon_1+\beta_{n+1}\varepsilon_2}{x^{n+1}},$$

so ist klar, dass man setzen kann

$$z = \frac{\alpha_{n+1}\cos x+\beta_{n+1}\sin x+\omega}{x^{n+1}}, \tag{54.}$$

wobei nach (51.), (52.), (53.) die Gleichungen

$$\lim\omega = \lim\omega' = 0 \tag{55.}$$

bestehen. Speciell folgt hieraus

$$\lim(x^n z) = 0, \quad \lim(x^n z') = 0. \tag{56.}$$

§ 6.

Asymptotische Darstellung der Integrale y durch semiconvergente Reihen.

Aus der Form der Gleichung (32.), deren particuläres Integral der betrachtete Ausdruck z ist, ergiebt sich, dass der Ausdruck

$$y = u_n + z$$

ein Integral der Gleichung (27.) ist. Dieses ist, wie jetzt gezeigt werden soll, von n nur scheinbar abhängig; man erhält, sobald die Grössen α_0 und β_0 willkürlich fixirt worden sind, stets dieselbe Function y, wenn man für n beliebige ganze Zahlen setzt. In der That kann man das Integral y mit Rücksicht auf die Form des Ausdrucks u_n und die Gleichung (54.) in der Form

$$y = \alpha_0 \cos x + \beta_0 \sin x + \eta \tag{57.}$$

schreiben, wobei

$$\lim \eta = \lim \eta' = 0. \tag{58.}$$

Wäre nun ein anderes Integral der Gleichung (27.) durch die Gleichung

$$Y = \alpha_0 \cos x + \beta_0 \sin x + \eta_0 \tag{59.}$$

gegeben, wobei

$$\lim \eta_0 = \lim \eta_0' = 0 \tag{60.}$$

wäre, so hätte man

$$yY' - y'Y = (\alpha_0 \cos x + \beta_0 \sin x)(\eta_0' - \eta') + \eta\eta_0' - \eta'\eta_0;$$

die rechte Seite, welche constant sein muss, würde sich also nach (58.) und (60.) für grosse Werthe von x beliebig wenig von Null unterscheiden, und müsste verschwinden. Das Verhältniss $y : Y$ ist also constant, und da nach (57.) und (59.) offenbar

$$\lim(y - Y) = 0,$$

so ergiebt sich

$$y = Y.$$

Bildet man daher die Grösse z und die entsprechende Grösse y für zwei verschiedene Werthe von n mit denselben Constanten α_0 und β_0, so erhält man beide Mal dieselbe Function y; für dieses bestimmte Integral der Gleichung (27.) besteht nach (56.) die Gleichung

$$\lim(x^n(y - u_n)) = 0, \tag{61.}$$

wenn man n eine beliebige ganze Zahl bedeuten lässt. Damit ist aber

genau dasjenige abgeleitet, was nach *Poincaré* unter asymptotischer Darstellung des Integrals y durch die Reihe

$$R = \cos x\left(\alpha_0+\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_2}{x^2}+\cdots\right)+\sin x\left(\beta_0+\frac{\beta_1}{x}+\frac{\beta_2}{x^2}+\cdots\right)$$

zu verstehen ist; diese braucht nicht im gewöhnlichen Sinne des Wortes convergent zu sein.

Es liegt nun die Frage nahe, ob durch die Reihe R jedes Integral der Gleichung (27.) in dem angegebenen Sinne dargestellt werden kann. Um diese Frage zu beantworten, gehen wir davon aus, dass durch die Gleichungen (31.) die Grössen α_ν und β_ν als lineare homogene Functionen von α_0 und β_0 definirt werden, sodass man setzen kann

$$(62.)\qquad \alpha_\nu = \alpha_\nu^{(1)}\alpha_0+\alpha_\nu^{(2)}\beta_0,\quad \beta_\nu = \beta_\nu^{(1)}\alpha_0+\beta_\nu^{(2)}\beta_0,$$

wobei die mit oberem Index versehenen Grössen von α_0 und β_0 unabhängig sind. Macht man dann eine der beiden Annahmen

$$\alpha_0 = 1,\quad \beta_0 = 0;\quad \alpha_0 = 0,\quad \beta_0 = 1,$$

so geht die Reihe R in eine der specielleren

$$\sum_\nu \frac{\alpha_\nu^{(1)}\cos x+\beta_\nu^{(1)}\sin x}{x^\nu},\qquad \sum_\nu \frac{\alpha_\nu^{(2)}\cos x+\beta_\nu^{(2)}\sin x}{x^\nu}$$

über, deren jede nach den erhaltenen Resultaten ein particuläres Integral, etwa die erste $y^{(1)}$, die zweite $y^{(2)}$ asymptotisch darstellt, so dass

$$(63.)\quad \lim\left\{x^n\left(y^{(1)}-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\alpha_\nu^{(1)}\cos x+\beta_\nu^{(1)}\sin x}{x^\nu}\right)\right\} = \lim\left\{x^n\left(y^{(2)}-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\alpha_\nu^{(2)}\cos x+\beta_\nu^{(2)}\sin x}{x^\nu}\right)\right\} = 0.$$

Diese beiden Integrale können in keinem constanten Verhältniss stehen, da offenbar

$$\alpha_0^{(1)} = 1,\quad \beta_0^{(1)} = 0,\quad \alpha_0^{(2)} = 0,\quad \beta_0^{(2)} = 1,$$

mithin

$$\lim(y^{(1)}-\cos x) = \lim(y^{(2)}-\sin x) = 0.$$

Daher kann jedes beliebige Integral der Gleichung (27.), welches für alle oberhalb einer positiven Grenze liegenden Werthe von x definirt und nebst seiner ersten Ableitung stetig ist, in der Form

$$(64.)\qquad Y = a_0y^{(1)}+b_0y^{(2)}$$

dargestellt werden, wenn durch a_0 und b Constante bezeichnet werden. Gehen nun die allgemein definirten Grössen α_ν, β_ν bei der Voraussetzung

$$\alpha_0 = a_0,\quad \beta_0 = b_0$$

in $\bar{\alpha}_\nu$ und $\bar{\beta}_\nu$ über, so hat man nach (62.)

$$\bar{\alpha}_\nu = \alpha_\nu^{(1)} a_0 + \alpha_\nu^{(2)} b_0, \quad \bar{\beta}_\nu = \beta_\nu^{(1)} a_0 + \beta_\nu^{(2)} b_0,$$

endlich nach (64.) und (63.)

$$\lim \left\{ x^n \left(Y - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\bar{\alpha}_\nu \cos x + \bar{\beta}_\nu \sin x}{x^\nu} \right) \right\} = 0.$$

In der That ist also jedes particuläre Integral Y durch eine specielle Reihe R asymptotisch darstellbar.

Wie man, wenn Y gegeben ist, die Constanten a_0 und b_0 bestimmt, ist ebenfalls leicht einzusehen. Nach den Bemerkungen zu Anfang dieses Paragraphen oder nach § 3 kann man setzen

$$Y = a_0 \cos x + b_0 \sin x + h,$$

wobei

$$\lim h = \lim h' = 0;$$

da nun

$$Y' = -a_0 \sin x + b_0 \cos x + h',$$

so folgt

$$a_0 = Y \cos x - Y' \sin x + h \cos x - h' \sin x,$$
$$b_0 = Y \sin x + Y' \cos x + h \sin x + h' \cos x,$$

also

(65.) $$a_0 = \lim (Y \cos x - Y' \sin x), \quad b_0 = \lim (Y \sin x + Y' \cos x),$$

womit zugleich die Existenz der rechts stehenden Grenzwerthe nachgewiesen ist.

Um mit den erhaltenen asymptotischen Ausdrücken rechnen zu können, ist es besonders wichtig zu entscheiden, ob man dieselben gliedweise differentiiren kann, d. h. ob man durch die rein formal und gliedweise differentiirte Reihe R die Grösse y' ebenso asymptotisch darstellen kann, wie y durch die Reihe R selbst. Diese Frage bedarf einer besonderen Untersuchung, da die Reihe R im gewöhnlichen Sinne des Wortes divergent sein kann; wie denn auch *Poincaré* a. a. O. bemerkt, dass eine Reihe der in Rede stehenden Art zwar im allgemeinen gliedweise integrirt, jedoch nicht immer gliedweise differentiirt werden kann. Bei unserer Reihe R ist dies aber möglich. Geht man nämlich von der Definition

$$y = u_n + z$$

aus und benutzt die Gleichung (54.), so ergiebt sich

$$y = \sum_{\nu=0}^{n+1} \frac{\alpha_\nu \cos x + \beta_\nu \sin x}{x^\nu} + \frac{\omega}{x^{n+1}}$$

und hieraus

$$(66.)\quad y' = \left\{u_n' + \frac{-\alpha_{n+1}\sin x + \beta_{n+1}\cos x}{x^{n+1}}\right\} - \frac{(n+1)(\alpha_{n+1}\cos x + \beta_{n+1}\sin x)}{x^{n+2}} + \left(\frac{\omega}{x^{n+1}}\right)';$$

dabei bildet die erste Klammer der rechten Seite den Inbegriff der Glieder in der einmal differentiirten Reihe R, bei welchen der Exponent von x im Nenner nicht grösser als $n+1$ ist. Bringt man daher die differentiirte Reihe R in die Gestalt

$$R' = \cos x\left(\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{x} + \frac{\gamma_2}{x^2} + \cdots\right) + \sin x\left(\delta_0 + \frac{\delta_1}{x} + \frac{\delta_2}{x^2} + \cdots\right),$$

so ergiebt die Gleichung (66.)

$$y' = \sum_{\nu=0}^{n+1} \frac{\gamma_\nu \cos x + \delta_\nu \sin x}{x_\nu} + s,$$

wobei

$$s = -\frac{(n+1)(\alpha_{n+1}\cos x + \beta_{n+1}\sin x)}{x^{n+2}} + \frac{\omega'}{x^{n+1}} - \frac{(n+1)\omega}{x^{n+2}},$$

und nach (55.)

$$\lim(x^{n+1}s) = 0,$$

mithin auch

$$\lim\left\{x^{n+1}\left(y' - \sum_{\nu=0}^{n+1}\frac{\gamma_\nu\cos x + \delta_\nu \sin x}{x^\nu}\right)\right\} = 0.$$

Da nun n eine beliebige nicht negative ganze Zahl ist, so ist $n+1$ eine beliebige positive Zahl; aus den Gleichungen (57.) und (58.) folgt noch

$$\lim(y' - (-\alpha_0\sin x + \beta_0\cos x)) = 0$$

oder, was dasselbe bedeutet

$$\lim(y' - (\gamma_0\cos x + \delta_0\sin x)) = 0.$$

Damit ist gezeigt, dass in der That die Reihe R' zur asymptotischen Darstellung der Function y' dienen kann, zu dieser also in derselben Beziehung steht wie R zu y.

Auf andere Weise kann man von der Function y'' beweisen, dass sie durch diejenige Reihe asymptotisch dargestellt wird, welche durch die rein formal ausgeführte zweimalige Differentiation von R entsteht. In der Gleichung

$$y'' = -yf(x) = -y\left(1 + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \cdots\right)$$

werde für y die Reihe R gesetzt und rein formal die Multiplication durchgeführt; man erhalte etwa, indem man durch Γ, Δ Constante bezeichnet,

die formale Gleichung

$$\left(1+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_3}{x^3}+\cdots\right)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\alpha_\nu\cos x+\beta_n\sin x}{x^\nu}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma_\nu\cos x+\Delta_\nu\sin x}{x^\nu}=R_0.$$

Setzt man nun

$$1+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_3}{x^3}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}=f_n,\quad \sum_{\nu=0}^{n}\frac{\Gamma_\nu\cos x+\Delta_\nu\sin x}{x^\nu}=\Phi_n,$$

so stimmt die Reihe R_0 mit dem Product u_nf_n in allen Gliedern überein, welche keine höhere als die $n$te Potenz von x im Nenner enthalten; daher ist

$$\lim\{(f_nu_n-\Phi_n)x^n\}=0. \tag{67.}$$

Nun kann man nach (61.) und der Definition von $f(x)$ setzen:

$$f(x)=f_n+\frac{\zeta}{x^n},\quad y=u_n+\frac{\theta}{x^n},$$

wobei

$$\lim\zeta=0,\quad \lim\theta=0;$$

hieraus folgt

$$yf(x)=\left(f_n+\frac{\zeta}{x^n}\right)\left(u_n+\frac{\theta}{x^n}\right)=u_nf_n+\frac{\theta f_n+\zeta u_n}{x^n}+\frac{\zeta\theta}{x^{2n}};$$

da nun

$$\lim f_n=1,\quad \lim(u_n-\alpha_0\cos x-\beta_0\sin x)=0,$$

so ergiebt sich

$$\lim\{(yf(x)-u_nf_n)x^n\}=0,$$

und nach (67.)

$$\lim\{(yf(x)-\Phi_n)x^n\}=0.$$

Die Function $yf(x)$ wird also durch die Reihe R_0, welche durch mechanische Multiplication der Reihen R und $f(x)$ entstand, asymptotisch dargestellt. Der Beweis dieser Thatsache unterscheidet sich nur wenig von einer bei *Poincaré* vorkommenden Argumentation*).

Jetzt ist leicht einzusehen, dass die Reihe $-R_0$ nichts anderes ist als das Resultat einer zweimaligen, formal durchgeführten Differentiation der Reihe R; denn diese war in § 4 geradezu dadurch definirt, dass sie der Gleichung

$$R''=-f(x)R=-R_0 \tag{68.}$$

formal genügen sollte. Setzt man die Coefficienten der einzelnen Glieder

*) *Poincaré* a. a. O. S. 296 f.

$x^{-\nu}\cos x$ und $x^{-\nu}\sin x$ auf der rechten Seite gleich den Coefficienten derselben Ausdrücke links, so erhält man genau die Recursionsformeln (31.). Damit ist gezeigt, dass wirklich y'' durch die mechanisch gebildete Reihe R'' asymptotisch dargestellt wird. Weiter können durch y, y' und y'' alle höheren Ableitungen von y als lineare Ausdrücke dargestellt werden, deren Coefficienten die Ableitungen von $f(x)$ sind. Hat man aber eine asymptotische Darstellung durch eine Reihe R_n von der Form der Reihe R für irgend eine Ableitung $y^{(n)}$, so wird das Product $y^{(n)}f^{(\nu)}(x)$ durch die formal ausgerechnete Reihe $R_n f^{(\nu)}(x)$, welche wieder die Form R hat, asymptotisch dargestellt aus denselben Gründen, welche oben das analoge Resultat für das Product $yf(x)$ abzuleiten erlaubt haben. Man kann demnach jede Ableitung $y^{(\nu)}$ durch eine Reihe der Form R in der angegebenen Weise darstellen; und dass diese Reihe mit derjenigen identisch ist, welche durch ν-malige formale Differentiation von R entsteht, folgt wieder daraus, dass letztere der Gleichung (68.), mithin auch den weiteren

$$-R''' = R'f(x)+Rf'(x), \quad -R^{IV} = R''f(x)+2f'(x)R'+f''(x)R, \quad \ldots$$

formal genügt.

Das Wesentlichste der erhaltenen Resultate kann man in folgendem Theorem zusammenfassen, indem man in die Gleichung (27.) die unabhängige Variable $\frac{x}{a}$ an Stelle von x einführt.

Wenn in der Differentialgleichung

$$y''+yf(x) = 0$$

die Function $f(x)$ eine für hinreichend grosse Werthe von x convergente Potenzreihe von der Form

$$f(x) = a^2+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_3}{x^3}+\cdots$$

und die Constanten a, a_2, a_3, ... reell sind, so kann das allgemeine reelle Integral der Differentialgleichung für grosse reelle Werthe von x asymptotisch dargestellt werden durch eine Reihe von der Form

$$R = \cos ax\left(\alpha_0+\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_2}{x^2}+\cdots\right)+\sin ax\left(\beta_0+\frac{\beta_1}{x}+\frac{\beta_2}{x^2}+\cdots\right),$$

welche der Differentialgleichung formal genügt und in welcher α_0 und β_0 willkürliche Constante sind, d. h. es ist

$$\lim_{x=+\infty}\left\{x^n\left(y-\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\alpha_\nu\cos ax+\beta_\nu\sin ax}{x^\nu}\right)\right\} = 0$$

für jeden ganzzahligen Werth von n. Die Reihe R giebt, n-mal rein formal differentiirt, eine Reihe, durch welche $y^{(n)}$ asymptotisch dargestellt wird.

Bemerken wir noch, dass auf die betrachtete Klasse von Differentialgleichungen die etwas allgemeinere

$$u''+\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+\cdots\right)u'+\left(c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\cdots\right)u = 0,$$

in welcher die Coefficienten von u und u' reelle, für grosse Werthe von x convergente Potenzreihen bedeuten, durch die Substitution

$$y = u e^{\frac{1}{2}\int\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\cdots\right)dx}$$

reducirt werden kann, sobald

$$c_0-\tfrac{1}{4}b_0^2 > 0, \quad c_1-\tfrac{1}{2}b_0b_1 = 0.$$

§ 7.

Anwendung der erhaltenen Resultate auf die Theorie der *Bessel*schen Functionen.

Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$y''+y\left(1+\frac{b}{x^2}\right) = 0, \tag{69.}$$

welche durch die Substitution

$$y = u\sqrt{x}, \quad b = \tfrac{1}{4}-m^2$$

in die *Bessel*sche

$$x^2u''+xu'+(x^2-m^2)u = 0 \tag{70.}$$

übergeht; die Constanten b und m seien reell, die Quadratwurzeln stets positiv. Die Gleichung (69.) ist dann ein Specialfall der in den vorigen Paragraphen betrachteten Gleichung (27.), der durch die Annahme

$$a_2 = b, \quad a_3 = a_4 = \cdots = 0$$

charakterisirt wird. Die Recursionsformeln (31.) nehmen daher folgende Gestalt an

$$(n-1)(n-2)\alpha_{n-2}-2(n-1)\beta_{n-1}+b\alpha_{n-2} = 0,$$
$$(n-1)(n-2)\beta_{n-2}+2(n-1)\alpha_{n-1}+b\beta_{n-2} = 0;$$

aus ihnen ergiebt sich

$$\beta_1 = \frac{b\alpha_0}{2}, \quad \alpha_2 = -\frac{(b+2.1)b\alpha_0}{2^2.2!}, \quad \beta_3 = -\frac{(b+3.2)(b+2.1)b\alpha_0}{2^3.3!}, \quad \cdots,$$
$$\alpha_1 = -\frac{b\beta_0}{2}, \quad \beta_2 = -\frac{(b+2.1)b\beta_0}{2^2.2!}, \quad \alpha_3 = \frac{(b+3.2)(b+2.1)b\beta_0}{2^3.3!}, \quad \cdots$$

und die der Gleichung (69.) formal genügende Reihe R kann geschrieben werden

$$R = (\alpha_0\cos x+\beta_0\sin x)\left\{1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu b(b+2.1)(b+3.2)\ldots(b+2\nu(2\nu-1))}{2^{2\nu}(2\nu)!\,x^{2\nu}}\right\}$$
$$+(\alpha_0\sin x-\beta_0\cos x)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu b(b+2.1)(b+3.2)\ldots(b+(2\nu+1)2\nu)}{2^{2\nu+1}(2\nu+1)!\,x^{2\nu+1}}$$
$$= \alpha_0 R_m^{(1)}+\beta_0 R_m^{(2)},$$

wodurch die von α_0 und β_0 unabhängigen Reihen $R_m^{(1)}$, $R_m^{(2)}$ definirt sind; drückt man b durch m aus, so erhält man

$$R = (\alpha_0\cos x+\beta_0\sin x)\left\{1-\frac{(1-4m^2)(9-4m^2)}{2!(8x)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{(1-4m^2)(9-4m^2)(25-4m^2)(49-4m^2)}{4!(8x)^4}-\ldots\right\}$$
$$+(\alpha_0\sin x-\beta_0\cos x)\left\{\frac{1-4m^2}{8x}-\frac{(1-4m^2)(9-4m^2)(25-4m^2)}{3!(8x)^3}+\ldots\right\}.$$

Durch diese Reihe kann man nach dem erhaltenen Satze jedes Integral der Gleichung (69.), mithin auch, wenn u irgend ein Integral der *Bessel*schen Differentialgleichung ist, die Grösse $u\sqrt{x}$ asymptotisch darstellen für grosse reelle Werthe des Arguments. Einen speciellen Fall dieses Resultats bildet die von *Jacobi**) gegebene semiconvergente Entwickelung der *Bessel*schen Transcendente $J_n(x)$ mit ganzzahligem Index.

Will man ein gegebenes particuläres Integral der Gleichung (69.) durch die Reihe R darstellen, so sind die Constanten α_0 und β_0 durch eine besondere Betrachtung zu bestimmen; dazu dienen die Formeln (65.). Sucht man z. B. eine Darstellung der Function

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi)\,d\varphi,$$

welche der Gleichung (70.) bei der Annahme $m=0$ genügt, so ist $\sqrt{x}J_0(x)$ das entsprechende Integral der Gleichung (69.) und man hat in der Reihe R nach (65.) zu setzen

$$\alpha_0 = \lim\left\{\sqrt{x}J_0(x)\cos x-\sqrt{x}J_0'(x)\sin x-\frac{1}{2\sqrt{x}}J_0(x)\sin x\right\},$$
$$\beta_0 = \lim\left\{\sqrt{x}J_0(x)\sin x+\sqrt{x}J_0'(x)\cos x+\frac{1}{2\sqrt{x}}J_0(x)\cos x\right\},$$

oder, da die Grösse $\sqrt{x}J_0(x)$ nach § 3 bei wachsenden Werthen von x

---

*) *Jacobi,* Werke Bd. VII S. 174.

zwischen endlichen Grenzen bleibt,

$$\alpha_0 = \lim(\sqrt{x}J_0(x)\cos x - \sqrt{x}J_0'(x)\sin x),$$
$$\beta_0 = \lim(\sqrt{x}J_0(x)\sin x - \sqrt{x}J_0'(x)\cos x).$$

Die Bestimmung dieser Grenzwerthe leistet eine einfache Rechnung von *Poisson**), welche auf Grund der uns zur Verfügung stehenden Resultate leicht völlig streng formulirt werden kann.

Die Grössen α_0 und β_0 sind unmittelbar gegeben, wenn man für das darzustellende Integral der Gleichung (69.) schon einen asymptotischen Ausdruck von der Form $\alpha_0\cos x+\beta_0\sin x$ kennt; die Ableitung eines solchen ist analytisch nahezu identisch mit der Berechnung der in den Gleichungen (65.) auftretenden Grenzwerthe. Aus der Theorie der *Bessel*schen Functionen ist z. B. bekannt, dass

$$\sqrt{\pi x}J_0(x) = \cos x+\sin x+\varepsilon, \quad \lim\varepsilon = 0;$$

also folgt für das links stehende Integral der Gleichung (69.)

$$\alpha_0 = \beta_0 = 1,$$

und im Sinne der asymptotischen Darstellung

$$\sqrt{\pi x}J_0(x) = R_0^{(1)}+R_0^{(2)}, \tag{71.}$$

was die bekannte Entwickelung von *Poisson* ist. Unsere Theorie erlaubt nun aber eine ähnliche für jedes Integral der *Bessel*schen Gleichung abzuleiten; z. B. wenn immer noch $m=0$ ist, für das Integral

$$K_0(x) = \int_0^\infty \cos(x\cos i\varphi)\,d\varphi,$$

welches**) bei grossen Werthen von x die annähernde Darstellung

$$K_0(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}(\cos x-\sin x)$$

gestattet. Für die der Gleichung (68.) genügende Function $2\sqrt{\frac{x}{\pi}}K_0(x)$ hat man also

$$\alpha_0 = 1, \quad \beta_0 = -1$$

zu setzen, und es ergiebt sich die neue semiconvergente Entwickelung

$$K_0(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}(R_0^{(1)}-R_0^{(2)}). \tag{72.}$$

---

*) *Poisson,* a. a. O. S. 351 f.

**) *Heine,* Handbuch der Kugelfunctionen Bd. I (1878) S. 247.

Aus dieser Reihe und der für $J_0(x)$ gefundenen kann man ähnliche für die Grössen $J_n(x)$ und $K_n(x)$ mit ganzzahligem Index ableiten, wenn man bedenkt, dass die Reihe R nach § 6 wie eine endliche Summe gliedweise differentiirt werden kann. Es gelten nämlich allgemein die Formeln*)

$$(73.) \qquad J_n'(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x), \quad K_n'(x) = \frac{n}{x} K_n(x) - K_{n+1}(x),$$

wenn man particuläre Integrale der *Bessel*schen Differentialgleichung in folgender Weise definirt:

$$J_{2n}(x) = \frac{(-1)^n}{\pi} \int_0^\pi \cos(x\sin\varphi)\cos 2n\varphi\, d\varphi,$$

$$J_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{\pi} \int_0^\pi \sin(x\sin\varphi)\sin(2n+1)\varphi\, d\varphi,$$

$$K_n(x) = \frac{x^n}{1.2.3\ldots(2n-1)} \int_0^\infty e^{ix\cos i\varphi} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi.$$

Aus den Gleichungen (73.) folgt sofort

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_n(x)\sqrt{x}}{x^{n+\frac{1}{2}}}\right) = -\frac{J_{n+1}(x)\sqrt{x}}{x^{n+\frac{1}{2}}}, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{K_n(x)\sqrt{x}}{x^{n+\frac{1}{2}}}\right) = -\frac{K_{n+1}(x)\sqrt{x}}{x^{n+\frac{1}{2}}};$$

hat man daher die Functionen $\sqrt{x}J_n(x)$ und $\sqrt{x}K_n(x)$ durch Reihen von der Form R asymptotisch dargestellt, so ergeben sich, da diese gliedweise differentiirt werden können, Darstellungen derselben Form für $\sqrt{x}J_{n+1}(x)$ und $\sqrt{x}K_{n+1}(x)$.

Beginnt nun die das Product $\sqrt{x}J_n(x)$ darstellende Reihe R mit den Gliedern $\alpha_0\cos x + \beta_0\sin x$, hat man also die Formel

$$\frac{\sqrt{x}J_n(x)}{x^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{\alpha_0\cos x + \beta_0\sin x + \varepsilon}{x^{n+\frac{1}{2}}},$$

wobei nach § 6

$$\lim\varepsilon = \lim\varepsilon' = 0,$$

so folgt

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}J_n(x)}{x^{n+\frac{1}{2}}}\right) = \frac{\beta_0\cos x - \alpha_0\sin x + \varepsilon'}{x^{n+\frac{1}{2}}} - \frac{(n+\frac{1}{2})}{x^{n+\frac{3}{2}}}(\alpha_0\cos x + \beta_0\sin x + \varepsilon);$$

man kann daher setzen

$$\frac{\sqrt{x}J_{n+1}(x)}{x^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{-\beta_0\cos x + \alpha_0\sin x + \eta}{x^{n+\frac{1}{2}}},$$

---

*) *Heine*, a. a. O. S. 243.

wobei

$$\lim\eta = \lim\eta' = 0.$$

In der Darstellung von $\sqrt{x}J_{n+1}(x)$ durch die Reihe R sind demnach die Anfangsglieder $-\beta_0\cos x+\alpha_0\sin x$, und dieselbe Beziehung findet offenbar statt zwischen den Anfangsgliedern der in die Form R gebrachten Ausdrücke $\sqrt{x}K_n(x)$ und $\sqrt{x}K_{n+1}(x)$. Aus den Formeln (71.) und (72.) ergiebt sich speciell

$$\sqrt{\pi x}J_1(x) = -R_1^{(1)}+R_1^{(2)}, \quad 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}K_1(x) = R_1^{(1)}+R_1^{(2)};$$

hieraus in derselben Weise

$$\sqrt{\pi x}J_2(x) = -R_2^{(1)}-R_2^{(2)}, \quad 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}K_2(x) = -R_2^{(1)}+R_2^{(2)},$$

u. s. f.; allgemein im Sinne der asymptotischen Darstellung:

$$\sqrt{\pi x}J_{2n}(x) = (-1)^n(R_{2n}^{(1)}+R_{2n}^{(2)}), \quad \sqrt{\pi x}J_{2n+1}(x) = (-1)^n(-R_{2n+1}^{(1)}+R_{2n+1}^{(2)}),$$

$$2\sqrt{\frac{x}{\pi}}K_{2n}(x) = (-1)^n(R_{2n}^{(1)}-R_{2n}^{(2)}), \quad 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}K_{2n+1}(x) = (-1)^n(R_{2n+1}^{(1)}+R_{2n+1}^{(2)}).$$

Die Ausdrücke für die Functionen J sind die von *Jacobi* angegebenen, die übrigen scheinen neu zu sein.

Dorpat, November 1895.

Ueber die Reihenentwickelung der Integrale eines Systems von Differentialgleichungen in der Umgebung gewisser singulärer Stellen.

(Fortsetzung der Arbeit aus Band 116 S. 265—306.)

(Von Herrn *J. Horn* in Charlottenburg.)

Im 116. Band dieses Journals, Seite 265—306, habe ich mich mit der Reihenentwicklung der für $x = 0$ verschwindenden Integrale eines Systems von Differentialgleichungen

$$(E.) \qquad x\frac{dy_\alpha}{dx} = G_\alpha(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

beschäftigt, worin

$$G_\alpha(x, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}y_\beta + \sum A^{(\alpha)}_{\varkappa\varkappa_1\ldots\varkappa_n} x^\varkappa y_1^{\varkappa_1}\ldots y_n^{\varkappa_n} \qquad \begin{pmatrix}\varkappa = 1,\ \varkappa_1+\cdots+\varkappa_n = 0\\ \varkappa+\varkappa_1+\cdots+\varkappa_n > 1\end{pmatrix}$$

eine an der Stelle $x = 0,\ y_1 = 0,\ \ldots,\ y_n = 0$ verschwindende, in der Umgebung dieser Stelle reguläre Function von $x, y_1, \ldots, y_n$ darstellt, unter der Voraussetzung, dass die Determinante

$$\Delta(s) = |a_{\alpha\beta} - s\delta_{\alpha\beta}| \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$

lauter einfache Elementartheiler besitzt. In der vorliegenden Fortsetzung werden entsprechende Untersuchungen für den Fall mehrfacher Elementartheiler der Determinante $\Delta(s)$ angestellt.

Hat die Determinante $\Delta(s)$ die Elementartheiler $(s-a')^{e'}, \ldots, (s-a^{(r)})^{e^{(r)}}$ und sind $a', \ldots, a^{(m)}$ diejenigen unter den Grössen $a', \ldots, a^{(r)}$, welche positive reelle Theile besitzen, so wird dem Differentialgleichungssystem (E.) durch ein System von Reihen mit $e'+\cdots+e^{(m)}$ willkürlichen Constanten

$$y_\alpha = \sum_{(\lambda+\lambda_{11}+\cdots>0)} C^{(\alpha)}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots\lambda_{1e'},\ldots,\lambda_{m1}\ldots\lambda_{me^{(m)}}} x^\lambda t_{11}^{\lambda_{11}}\ldots t_{1e'}^{\lambda_{1e'}}\ldots t_{m1}^{\lambda_{m1}}\ldots t_{me^{(m)}}^{\lambda_{me^{(m)}}} \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

genügt, welche für hinreichend kleine Werthe von $|x|, |t_{11}| \ldots$ convergiren;

hierin ist

$$t_{i1} = x^{a^{(i)}}, \quad t_{i2} = x^{a^{(i)}}(-\log x), \quad \ldots, \quad t_{ie^{(i)}} = x^{a^{(i)}}(-\log x)^{e^{(i)}-1}, \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

falls zwischen $a', \ldots, a^{(m)}$ keine Beziehung

$$a^{(i)} = \varrho + \varrho' a^{(i')} + \varrho'' a^{(i'')} + \cdots$$

mit ganzen positiven Coefficienten $\varrho, \varrho', \varrho'' \ldots$ besteht; im Falle solcher Beziehungen hat man

$$t_{i1} = x^{a^{(i)}}(-\log x)^{\nu^{(i)}}, \quad t_{i2} = x^{a^{(i)}}(-\log x)^{\nu^{(i)}+1}, \quad \ldots, \quad t_{ie^{(i)}} = x^{a^{(i)}}(-\log x)^{\nu^{(i)}+e^{(i)}-1} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

zu setzen, wo $\nu', \ldots, \nu^{(m)}$ ganze positive Zahlen (einschl. Null) sind, welche von den zwischen $a', \ldots, a^{(m)}$ stattfindenden Beziehungen, sowie von den Zahlen $e', \ldots, e^{(m)}$ abhängen*).

Diese Sätze werden in § 6 und § 7 entwickelt; in § 8 werden sie auf ein System linearer Differentialgleichungen

$$(D.) \qquad x\frac{dy_\alpha}{dx} = \sum_{\beta=1}^{n}(a_{\alpha\beta} + a'_{\alpha\beta}x + \cdots)y_\beta \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

angewandt; in § 9 wird die Differentialgleichung $n$ter Ordnung

$$(C.) \qquad x\frac{d^n y}{dx^n} = G\Big(x,\ y,\ x\frac{dy}{dx},\ \ldots,\ x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\Big),$$

worin

$$G = c_1 x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + c_{n-1}x\frac{dy}{dx} + c_n y + \cdots$$

eine in der Umgebung der Nullwerthe der Argumente

$$x, \quad y, \quad x\frac{dy}{dx}, \quad \ldots, \quad x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

reguläre, für diese Nullwerthe verschwindende Function darstellt, unter der Voraussetzung behandelt, dass die Gleichung

$$s(s-1)\ldots(s-n+1) = c_1 s(s-1)\ldots(s-n+2) + \cdots + c_{n-1}s + c_n$$

mehrfache Wurzeln besitzt.

§ 6.

Wenn die aus dem Differentialgleichungssystem (E.) gebildete Determinante $\Delta(s)$ die Elementartheiler

$$(s-a')^{e'}, \quad (s-a'')^{e''}, \quad \ldots, \quad (s-a^{(r)})^{e^{(r)}}$$

besitzt, so kann das System (E.) durch eine lineare Tranformation der Ver-

*) Man sehe den genaueren Ausdruck des Satzes in § 7.

änderlichen $y_1, \ldots, y_n$ auf die folgende Normalform gebracht werden:

$$(1.)\quad \begin{cases} x\dfrac{dy_{a_1^{(i)}}}{dx} = a^{(i)}y_{a_1^{(i)}} + \Sigma A^{(a_1^{(i)})}_{\varkappa\varkappa_1\ldots\varkappa_n} x^{\varkappa} y_1^{\varkappa_1}\ldots y_n^{\varkappa_n}, \\ x\dfrac{dy_{a_2^{(i)}}}{dx} = a^{(i)}y_{a_2^{(i)}} + y_{a_1^{(i)}} + \Sigma A^{(a_2^{(i)})}_{\varkappa\varkappa_1\ldots\varkappa_n} x^{\varkappa} y_1^{\varkappa_1}\ldots y_n^{\varkappa_n}, \qquad (i=1,\ldots,r) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x\dfrac{dy_{a_{e^{(i)}}^{(i)}}}{dx} = a^{(i)}y_{a_{e^{(i)}}^{(i)}} + y_{a_{e^{(i-1)}}^{(i)}} + \Sigma A^{(a_{e^{(i)}}^{(i)})}_{\varkappa\varkappa_1\ldots\varkappa_n} x^{\varkappa} y_1^{\varkappa_1}\ldots y_n^{\varkappa_n}. \end{cases}$$

Die reellen Theile von $a', \ldots, a^{(m)}$ seien positiv, diejenigen von $a^{(m+1)}, \ldots, a^{(r)}$ negativ oder Null. Zwischen den Grössen $a', \ldots, a^{(m)}$, welche wir zunächst als verschieden voraussetzen, soll keine Beziehung von der Form

$$a^{(i)} = \varrho + \varrho_{i'}a^{(i')} + \varrho_{i''}a^{(i'')} + \cdots$$

bestehen, wo $\varrho, \varrho_{i'}, \varrho_{i''}, \ldots$, ganze positive Zahlen sind.

Setzt man

$$(2.)\qquad t_{i\varrho} = x^{a^{(i)}}(-\log x)^{\varrho-1}, \qquad \begin{pmatrix}\varrho=1,\ldots,e^{(i)}\\ i=1,\ldots,m\end{pmatrix}$$

so erhält man mit Rücksicht auf die Differentialgleichung

$$x\frac{dt_{i\varrho}}{dx} = a^{(i)}t_{i\varrho} - (\varrho-1)t_{i,\varrho-1}$$

für die Coefficienten der Reihe

$$(3.)\qquad y_a = \Sigma C^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots\lambda_{1e'},\ldots,\lambda_{m1}\ldots\lambda_{me^{(m)}}} x^{\lambda} t_{11}^{\lambda_{11}}\ldots t_{1e'}^{\lambda_{1e'}}\ldots t_{m1}^{\lambda_{m1}}\ldots t_{me^{(m)}}^{\lambda_{me^{(m)}}},$$

welche dem Differentialgleichungssystem (1.) genügen soll, die Recursionsformel

$$(4.)\quad \begin{cases} \Big(\lambda + \sum_{h=1}^{m}(\lambda_{h1}+\cdots+\lambda_{he^{(h)}})a^{(h)} - a^{(i)}\Big) C^{(a_\varrho^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots} \\ \qquad = \sum_{h=1}^{m}\sum_{\sigma=2}^{e^{(h)}}(\sigma-1)(\lambda_{h\sigma+1}) C^{(a_\varrho^{(i)})}_{\ldots\lambda_{h,\sigma-1},\lambda_{h\sigma+1}\ldots} + C^{(a_{\varrho-1}^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots} + G^{(a_\varrho^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots}\big(C^{(\bar a)}_{\bar\lambda,\bar\lambda_{11}\ldots}\big), \end{cases}$$

worin

$$G^{(a_\varrho^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots} = \Sigma A^{(a_\varrho^{(i)})}_{\varkappa\varkappa_1\ldots\varkappa_n} C^{(\bar a)}_{\bar\lambda,\bar\lambda_{11}\ldots} C^{(\bar{\bar a})}_{\bar{\bar\lambda},\bar{\bar\lambda}_{11}\ldots}\ldots$$

in einem Gliede $\varkappa_1+\cdots+\varkappa_n$ Factoren $C^{(\bar a)}_{\bar\lambda,\bar\lambda_{11}\ldots}$, $C^{(\bar{\bar a})}_{\bar{\bar\lambda},\bar{\bar\lambda}_{11}\ldots}$, $\ldots$ enthält, deren Indices die Bedingungen erfüllen:

$$\bar\lambda + \bar{\bar\lambda} + \cdots = \lambda - \varkappa,$$
$$\bar\lambda_{11} + \bar{\bar\lambda}_{11} + \cdots = \lambda_{11},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

so dass $G^{(a_\varrho^{(i)})}_{\lambda_1\lambda_{11},\dots}$ eine ganze rationale Function von Grössen $C^{(\bar a)}_{\bar\lambda,\bar\lambda_{11},\dots}$ darstellt, für welche

$$\bar\lambda \leqq \lambda, \quad \bar\lambda_{11} \leqq \lambda_{11}, \quad \dots,$$
$$\bar\lambda+\bar\lambda_{11}+\cdots < \lambda+\lambda_{11}+\cdots$$

ist. Das Glied $C^{(a_\varrho^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{11},\dots}$ auf der rechten Seite der Formel (4.) fällt im Falle $\varrho=1$ fort.

Wir wollen die Zahl

$$a = \lambda+\sum_{h=1}^{m}(\lambda_{h1}+\cdots+\lambda_{he^{(h)}})a^{(h)}$$

das Gewicht und die Zahl

$$\nu = \sum_{h=1}^{m}\sum_{\sigma=2}^{e^{(h)}}\lambda_{\sigma h}(\sigma-1)$$

den Rang des Reihengliedes

$$C^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11},\dots}x^\lambda t_{11}^{\lambda_{11}}\dots = C^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11},\dots}x^a(-\log x)^\nu$$

oder auch des Coefficienten $C^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11},\dots}$ oder des Indexsystems $(\lambda,\lambda_{11},\dots)$ nennen. Wir sagen weiter, das Gewicht $\bar a$ des Indexsystems $(\bar\lambda,\bar\lambda_{11},\dots)$ sei kleiner als das Gewicht a des Indexsystems $(\lambda,\lambda_{11},\dots)$, wenn $\bar a$ einen kleineren reellen und einen nicht grösseren imaginären Teil besitzt als a. Dann ist auf der rechten Seite der Recursionsformel (4.) $C^{(a_\varrho^{(i)})}_{\dots\lambda_{h,\sigma-1}-1,\lambda_{h\sigma}+1,\dots}$ vom Gewicht a, aber vom Rang $\nu+1$, während das Gewicht sämmtlicher Grössen $C^{(\bar a)}_{\bar\lambda,\bar\lambda_{11},\dots}$ kleiner als a ist. Wenn das Gewicht des Indexsystems $(\lambda,\lambda_{11},\dots)$ nicht gleich $a^{(i)}$ ist, ist $\lambda+\sum_{h=1}^{m}(\lambda_{h1}+\cdots+\lambda_{he^{(h)}})a^{(h)}-a^{(i)}$ von Null verschieden, und man erhält $C^{(a_\varrho^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{11},\dots}$ ausgedrückt durch Grössen von geringerem Gewicht, von gleichem Gewicht und höherem Rang, von gleichem Gewicht und Rang, aber von kleinerem oberen Index.

Der Coefficient von $C^{(a_\varrho^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{11},\dots}$ in der Formel (4.) wird nur dann gleich Null, wenn $\lambda_{i\nu}=1\,(\nu=1,\dots,e^{(i)})$, die übrigen Indices $\lambda,\lambda_{11},\dots$ gleich Null sind. Bezeichnet man den Coefficienten von $t_{i,\nu+1}=x^{a^{(i)}}(-\log x)^\nu$ in der Reihe für $y_{a_\varrho^{(i)}}(\varrho=1,\dots,e^{(i)})$ mit $c_\nu^{(a_\varrho^{(i)})}$, so enthält diese Reihe die folgenden Glieder vom Gewicht $a^{(i)}$:

$$(3'.) \qquad \sum_{\nu=0}^{e^{(i)}-1} c_\nu^{(a_\varrho^{(i)})}x^{a^{(i)}}(-\log x)^\nu,$$

zu deren Bestimmung die Recursionsformel dient:

$$(4'.) \qquad 0 = (\nu+1)c_{\nu+1}^{(a_\varrho^{(i)})} + c_\nu^{(a_{\varrho-1}^{(i)})}. \qquad \begin{pmatrix}\varrho = 1, \ldots, e^{(i)} \\ \nu = 0, 1, \ldots, e^{(i)}-1\end{pmatrix}$$

Aus derselben ergiebt sich

$$c_\nu^{(a_\varrho^{(i)})} = -\frac{1}{\nu} c_{\nu-1}^{(a_{\varrho-1}^{(i)})} = \frac{1}{\nu(\nu-1)} c_{\nu-2}^{(a_{\varrho-2}^{(i)})} = \cdots = \frac{(-1)^\sigma}{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\sigma+1)} c_{\nu-\sigma}^{(a_{\varrho-\sigma}^{(i)})};$$

hier ist $c_{\nu-\sigma}^{(a_{\varrho-\sigma}^{(i)})}$ wie in Formel (4'.) $c_\nu^{(a_{\varrho-1}^{(i)})}$ durch Null zu ersetzen, wenn $\varrho \leqq \sigma$ bezw. $\varrho = 1$ ist.

Für $\sigma = \nu$ hat man

$$c_\nu^{(a_\varrho^{(i)})} = \frac{(-1)^\nu}{\nu!} c_0^{(a_{\varrho-\nu}^{(i)})}.$$

Im Falle $\varrho \leqq \nu$ ist $c_\nu^{(a_\varrho^{(i)})} = 0$; die Grössen $c_\nu^{(a_\varrho^{(i)})}$ $(\varrho > \nu)$ drücken sich aus durch die $e^{(i)}$ Grössen

$$c_0^{(a_\varrho^{(i)})} = c_{i,e^{(i)}-\varrho+1}, \qquad (\varrho = 1, \ldots, e^{(i)})$$

welche willkürlich angenommen werden können. Vermittelst der Formeln (4.) und (4'.) ergeben sich also sämmtliche Coefficienten $C_{\lambda,\lambda_{11}\ldots}^{(a)}$ der Reihe (3.) als ganze rationale Functionen von $e'+\cdots+e^{(m)}$ willkürlichen Constanten

$$c_{i1} = c_0^{(a_{e^{(i)}}^{(i)})}, \quad \ldots, \quad c_{ie^{(i)}} = c_0^{(a_1^{(i)})}\text{*}). \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

Dass die Reihe (3.) für hinreichend kleine Werthe von $|x|$, $|t_{11}|$, ... convergirt, wird im nächsten Paragraphen unter allgemeineren Voraussetzungen bewiesen**).

---

*) Auf die Art der Abhängigkeit der Reihe von diesen Constanten wird in einem dritten Theil der Arbeit eingegangen.

**) Hier kann um so eher davon abgesehen werden, als § 6 ebenso wie § 1 im ersten Theile hauptsächlich den Zweck hat, den Uebergang zum folgenden Paragraphen zu vermitteln, *wo zwischen* $\alpha', \ldots, \alpha^{(m)}$ *Relationen bestehen.* Ueberdies ist, wie ich nach Vollendung der Arbeit aus dem (1896 erschienenen) Jahrbuch der Fortschritte der Mathematik für 1894 ersehe, von Herrn *Bendixson* in den Stockholmer Akademieberichten von 1894 das Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \mathfrak{P}_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \sum_\beta a_{\alpha\beta}x_\beta + \cdots \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$

unter der Voraussetzung behandelt, dass die Determinante $|a_{\alpha\beta} - s\delta_{\alpha\beta}|$ mehrfache Elementartheiler $(s-a')^{e'}$, $(s-a'')^{e''}$, ... besitzt, während Relationen zwischen a', a'', ... ausgeschlossen sind. Die Beweise sind allerdings von Herrn *Bendixson* nur für $n = 2$ geführt. Seine Darstellungsweise schliesst sich an *Poincarés* Dissertation an, welche mir, wie noch bemerkt sein möge, nicht zugänglich war, von deren Inhalt ich vielmehr nur aus anderen Arbeiten *Poincarés*, sowie aus *Picards* Traité d'Analyse Kenntniss habe.

Wir nehmen jetzt an, die Determinante $\Delta(s)$ habe die Elementartheiler

$$(s-a')^{e'_1}, \quad (s-a')^{e'_2}, \quad \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$(s-a^{(r)})^{e^{(r)}_1}, \quad (s-a^{(r)})^{e^{(r)}_2}, \quad \ldots\ldots$$

Durch eine lineare Transformation sei das Differentialgleichungssystem (E.) auf die Form gebracht:

$$(1^{\text{a}}.) \qquad \begin{cases} x\dfrac{dy_{a^{(i)}_{\varrho_1}}}{dx} = a^{(i)} y_{a^{(i)}_{\varrho_1}} + y_{a^{(i)}_{\varrho_1-1}} + \cdots, & (\varrho_1 = 1, \ldots, e^{(i)}_1) \\ x\dfrac{dy_{a^{(i)}_{\varrho_2}}}{dx} = a^{(i)} y_{a^{(i)}_{\varrho_2}} + y_{a^{(i)}_{\varrho_2-1}} + \cdots, & (\varrho_2 = 1, \ldots, e^{(i)}_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (i = 1, \ldots, r) \end{cases}$$

Die reellen Theile von $a', \ldots, a^{(m)}$ seien positiv, diejenigen von $a^{(m+1)}, \ldots, a^{(r)}$ negativ oder Null; zwischen $a', \ldots, a^{(m)}$ sollen keine Beziehungen bestehen.

Unter $e^{(i)}$ die grösste der Zahlen $e^{(i)}_1, e^{(i)}_2, \ldots$ verstehend, setzen wir

$$(2^{\text{a}}.) \qquad t_{i\varrho} = x^{a^{(i)}}(-\log x)^{\varrho-1}; \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m \\ \varrho = 1, \ldots, e^{(i)} \end{pmatrix}$$

durch Einsetzung der Reihe

$$(3^{\text{a}}.) \qquad y_\alpha = \Sigma C^{(\alpha)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots} x^\lambda t_{11}^{\lambda_{11}} \ldots \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

in das Differentialgleichungssystem (1ª.) ergiebt sich eine Recursionsformel von der Form (4.); zur Berechnung der Glieder vom Gewicht $a^{(i)}$ in den Reihen für $y_{a^{(i)}_{\varrho_1}}, y_{a^{(i)}_{\varrho_2}}, \ldots$

$$(3'_{\text{a}}.) \qquad \sum_{\nu=0}^{e^{(i)}-1} c^{(a)}_\nu x^{a^{(i)}} (-\log x)^\nu \qquad (a = a^{(i)}_{\varrho_1}, a^{(i)}_{\varrho_2}, \ldots)$$

dienen die Formeln

$$(4'_{\text{a}}.) \qquad \begin{cases} 0 = (\nu+1) c^{(a^{(i)}_{\varrho_1})}_{\nu+1} + c^{(a^{(i)}_{\varrho_1-1})}_\nu, & (\varrho_1 = 1, \ldots, e^{(i)}_1) \\ 0 = (\nu+1) c^{(a^{(i)}_{\varrho_2})}_{\nu+1} + c^{(a^{(i)}_{\varrho_2-1})}_\nu, & (\varrho_2 = 1, \ldots, e^{(i)}_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots; & \\ (\nu = 0, 1, \ldots, e^{(i)}-1; \ i = 1, \ldots, m) \end{cases}$$

wie oben ergiebt sich daraus

$$c^{(a^{(i)}_{\varrho_1})}_\nu = 0 \ (\varrho_1 \leqq \nu), \quad c^{(a^{(i)}_{\varrho_2})}_\nu = 0 \ (\varrho_2 \leqq \nu), \quad \ldots,$$

während sich die übrigen Grössen $c^{(a^{(i)}_{\varrho_1})}_\nu, c^{(a^{(i)}_{\varrho_2})}_\nu, \ldots$ durch die willkürlichen

Constanten

$$c_0^{(a_{\varrho_1}^{(i)})} \ (\varrho_1 = 1, \ldots, e_1^{(i)}), \quad c_0^{(a_{\varrho_2}^{(i)})} \ (\varrho_2 = 1, \ldots, e_2^{(i)}), \quad \ldots,$$

ausdrücken.

Wir haben den Satz:

Die Determinante

$$\Delta(s) = |a_{\alpha\beta} - s\delta_{\alpha\beta}| \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$

des Differentialgleichungssystems

$$x\frac{dy_\alpha}{dx} = \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}y_\beta + \Sigma A^{(\alpha)}_{\varkappa\varkappa_1\ldots\varkappa_n} x^\varkappa y_1^{\varkappa_1}\ldots y_n^{\varkappa_n} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$
$$(\varkappa = 1, \ \varkappa_1+\cdots+\varkappa_n = 0; \ \varkappa+\varkappa_1+\cdots+\varkappa_n > 1)$$

habe die Elementartheiler

$$(s-a^{(i)})^{e_1^{(i)}}, \quad (s-a^{(i)})^{e_2^{(i)}}, \quad \ldots \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

Die grösste der Zahlen $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \ldots$ sei mit $e^{(i)}$ bezeichnet. Die reellen Theile von $a', \ldots, a^{(m)}$ seien positiv, diejenigen von $a^{(m+1)}, \ldots, a^{(r)}$ negativ oder Null. Zwischen $a', \ldots, a^{(m)}$ bestehe keine Beziehung

$$a^{(i)} = \varrho + \varrho_{i'}a^{(i')} + \varrho_{i''}a^{(i'')} + \cdots$$

mit ganzen positiven Coefficienten. Dann wird das Differentialgleichungssystem, wenn man

$$t_{i1} = x^{a^{(i)}}, \quad t_{i2} = x^{a^{(i)}}(-\log x), \quad \ldots, \quad t_{ie^{(i)}} = x^{a^{(i)}}(-\log x)^{e^{(i)}-1} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

setzt, durch ein System von Reihen

$$y_\alpha = \Sigma C^{(\alpha)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots,\lambda_{1e'},\ldots,\lambda_{m1},\ldots,\lambda_{me^{(m)}}} x^\lambda t_{11}^{\lambda_{11}}\ldots t_{1e'}^{\lambda_{1e'}}\ldots t_{m1}^{\lambda_{m1}}\ldots t_{me^{(m)}}^{\lambda_{me^{(m)}}} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

befriedigt, welche $\sum_{i=1}^{m}(e_1^{(i)}+e_2^{(i)}+\cdots)$ willkürliche Grössen enthalten und für hinreichend kleine Werthe von $|x|, |t_{11}|, \ldots$ convergiren.

§ 7.

Es liege wieder das Differentialgleichungssystem vor:

$$(1.) \qquad x\frac{dy_{a_\varrho^{(i)}}}{dx} = a^{(i)}y_{a_\varrho^{(i)}} + y_{a_{\varrho-1}^{(i)}} + \Sigma A^{(a_\varrho^{(i)})}_{\varkappa\varkappa_1\ldots\varkappa_n} x^\varkappa y_1^{\varkappa_1}\ldots y_n^{\varkappa_n}.$$
$$(\varrho = 1, \ldots, e^{(i)}; \ i = 1, \ldots, r)$$

Die reellen Theile von $a', \ldots, a^{(m)}$ seien positiv, diejenigen von $a^{(m+1)}, \ldots, a^{(r)}$ Null oder negativ; zwischen den Grössen $a', \ldots, a^{(m)}$, welche wir zunächst als verschieden voraussetzen, mögen beliebige Beziehungen

$$a^{(i)} = \varrho + \varrho_{i'}a^{(i')} + \varrho_{i''}a^{(i'')} + \cdots$$

bestehen, worin die Coefficienten ganze positive Zahlen sind. Diejenigen unter den Grössen $a^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$, welche nicht in der Form $\tau + \tau_1 a' + \cdots + \tau_m a^{(m)}$ $(\tau_i = 0)$ dargestellt werden können, wo τ, τ_1, $\ldots$, τ_m ganze positive Zahlen sind, seien mit a', $\ldots$, $a^{(l)}$ bezeichnet; die übrigen Grössen $a^{(l+1)}, \ldots, a^{(m)}$ seien so angeordnet, dass die reellen Theile eine nicht abnehmende Reihe bilden, so dass nur Beziehungen von der Form

$$(\alpha.) \qquad a^{(i)} = \varrho_i + \varrho_{i1} a' + \cdots + \varrho_{i,i-1} a^{(i-1)}$$

in Betracht kommen. Jeder der Grössen $a^{(i)}$ wird eine Zahl $\nu^{(i)}$ zugeordnet. Wir setzen $\nu' = 0, \ldots, \nu^{(l)} = 0$ und definiren $\nu^{(i)}$ $(i > l)$ auf folgende Weise: es seien sämmtliche Beziehungen $(\alpha.)$ aufgestellt, auf deren linker Seite $a^{(i)}$ steht, und für jede die Zahl

$$\varrho_{i1}(\nu' + e' - 1) + \cdots + \varrho_{i,i-1}(\nu^{(i-1)} + e^{(i-1)} - 1)$$

gebildet; dann ist $\nu^{(i)}$ um 1 grösser als die grösste dieser Zahlen. Die Zahlen μ_i, μ_{i1}, $\ldots$, $\mu_{i,i-1}$ seien so gewählt, dass

$$(2.) \qquad \begin{cases} a^{(i)} = \mu_i + \mu_{i1} a' + \cdots + \mu_{i,i-1} a^{(i-1)}, \\ \nu^{(i)} = 1 + \mu_{i1}(\nu' + e' - 1) + \cdots + \mu_{i,i-1}(\nu^{(i-1)} + e^{(i-1)} - 1) \end{cases}$$

ist.

Die Functionen

$$(3.) \qquad t_{i\varrho} = x^{a^{(i)}}(-\log x)^{\nu^{(i)}+\varrho-1} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m \\ \varrho = 1, \ldots, e^{(i)} \end{pmatrix}$$

genügen den Differentialgleichungen

$$x\frac{dt_{i1}}{dx} = a^{(i)} t_{i1} - \nu^{(i)} x^{a^{(i)}}(-\log x)^{\nu^{(i)}-1},$$

$$x\frac{dt_{i\varrho}}{dx} = a^{(i)} t_{i\varrho} - (\nu^{(i)} + \varrho - 1) x^{a^{(i)}}(-\log x)^{\nu^{(i)}+\varrho-2}, \qquad (\varrho = 2, \ldots, e^{(i)})$$

welche mit Rücksicht auf (2.) die Form annehmen

$$(4.) \qquad \begin{cases} x\dfrac{dt_{i1}}{dx} = a^{(i)} t_{i1} - \nu^{(i)} x^{\mu_i} t_{1e'}^{\mu_{i1}} \ldots t_{i-1,e^{(i-1)}}^{\mu_{i,i-1}}, \\ x\dfrac{dt_{i\varrho}}{dx} = a^{(i)} t_{i\varrho} - (\nu^{(i)} + \varrho - 1) t_{i,\varrho-1}. \qquad (\varrho = 2, \ldots, e^{(i)}) \end{cases}$$

Wir suchen das System (1.) durch ein Reihensystem

$$(5.) \qquad y_\alpha = \Sigma C^{(\alpha)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots,\lambda_{1e'},\ldots,\lambda_{m1},\ldots,\lambda_{me^{(m)}}} x^\lambda t_{11}^{\lambda_{11}} \ldots t_{1e'}^{\lambda_{1e'}} \ldots t_{m1}^{\lambda_{m1}} \ldots t_{me^{(m)}}^{\lambda_{me^{(m)}}}$$

zu befriedigen. Die Zahl

$$a = \lambda + \sum_{h=1}^{m} (\lambda_{h1} + \cdots + \lambda_{he^{(h)}}) a^{(h)}$$

nennen wir das Gewicht und die Zahl

$$\nu = \sum_{h=1}^{m} \sum_{\sigma=1}^{e^{(h)}} \lambda_{h\sigma}(\nu^{(h)}+\sigma-1)$$

den Rang des Reihengliedes

$$C^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots} x^{\lambda} t_{11}^{\lambda_{11}} \ldots = x^{a}(-\log x)^{\nu}$$

oder des Indexsystems $(\lambda, \lambda_{11}, \ldots)$ oder auch des Coefficienten

$$C^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots} = (y_a)_{x^{\lambda} t_{11}^{\lambda_{11}} \ldots}.$$

Die Grössen

$$(y_a)_{t_{ie^{(i)}}}, \quad \ldots, \quad (y_a)_{t_{i1}}$$

sind vom Gewicht $a^{(i)}$ und bezw. vom Rang $\nu^{(i)}+e^{(i)}-1, \ldots, \nu^{(i)}$; ist $k \geqq 1$, so sind unter Umständen mehrere Indexsysteme vom Gewicht $a^{(i)}$ und vom Rang $\nu^{(i)}-k$

$$(\tau^{(k)}, \tau_{11}^{(k)}, \ldots, \tau^{(k)}_{i-1,e^{(i-1)}}, 0, \ldots, 0),$$
$$(\bar{\tau}^{(k)}, \bar{\tau}_{11}^{(k)}, \ldots, \bar{\tau}^{(k)}_{i-1,e^{(i-1)}}, 0, \ldots, 0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

vorhanden. Wir setzen voraus, dass in der Reihe für $y_{a^{(i)}_{\varrho}}$ $(\varrho = 1, \ldots, e^{(i)})$ ein Glied mit $x^{\tau^{(k)}} t_{11}^{\tau_{11}^{(k)}} \ldots$ vorkommt, dass aber die Glieder mit $x^{\bar{\tau}^{(k)}} t_{11}^{\bar{\tau}_{11}^{(k)}} \ldots, \ldots$ fehlen, dass also $(y_{a^{(i)}_{\varrho}})_{x^{\bar{\tau}^{(k)}} t_{11}^{\bar{\tau}_{11}^{(k)}} \ldots}, \ldots$ gleich Null ist; wenn wir

$$(y_{a^{(i)}_{\varrho}})_{x^{\tau^{(k)}} t_{11}^{\tau_{11}^{(k)}} \ldots} = c^{(a^{(i)}_{\varrho})}_{\nu^{(i)}-k}, \qquad (k = 1, \ldots, \nu^{(i)})$$

$$(y_{a^{(i)}_{\varrho}})_{t_{i\sigma}} = c^{(a^{(i)}_{\varrho})}_{\nu^{(i)}+\sigma-1} \qquad (\sigma = 1, \ldots, e^{(i)})$$

setzen, so enthält die Reihe für $y_{a^{(i)}_{\varrho}}$ $(\varrho = 1, \ldots, e^{(i)})$ die folgenden Glieder vom Gewicht $a^{(i)}$:

$$(5'.) \qquad \sum_{\nu=0}^{\nu^{(i)}+e^{(i)}-1} c_{\nu}^{(a^{(i)}_{\varrho})} x^{a^{(i)}}(-\log x)^{\nu}.$$

Schreibt man die Differentialgleichung (1.)

$$D_{a^{(i)}_{\varrho}}(y_1, \ldots, y_n) = 0$$

und ergiebt sich durch Einsetzen der Reihe (5.)

$$D_{a^{(i)}_{\varrho}}(y_1, \ldots, y_n) = \Sigma F^{(a^{(i)}_{\varrho})}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots} x^{\lambda} t_{11}^{\lambda_{11}} \ldots$$

so hat man zur Berechnung der Coefficienten $C^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}$ die Recursionsformel

$$F^{(a^{(i)}_\varrho)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots} = 0$$

oder

$$(6.)\quad \begin{cases} \left(\lambda + \sum_{h=1}^{m}(\lambda_{h1}+\cdots+\lambda_{he^{(h)}})a^{(h)} - a^{(i)}\right) C^{(a^{(i)}_\varrho)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots} \\ = \sum_{h=1}^{m} \nu^{(h)}(\lambda_{h1}+1) C^{(a^{(i)}_\varrho)}_{\lambda-\mu_h;\lambda_{11},\ldots,\lambda_{1e'}-\mu_{h1};\ldots,\lambda_{h-1,1},\ldots,\lambda_{h-1,e^{(h-1)}}-\mu_{h,h-1};\lambda_{h1}+1,\ldots} \\ + \sum_{h=1}^{m}\sum_{\sigma=2}^{e^{(h)}} (\nu^{(h)}+\sigma-1)(\lambda_{h\sigma}+1) C^{(a^{(i)}_\varrho)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots,\lambda_{h,\sigma-1}-1,\lambda_{h\sigma}+1,\ldots} \\ + C^{(a^{(i)}_{\varrho-1})}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots} + G^{(a^{(i)}_\varrho)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}(C^{(\bar{a})}_{\bar{\lambda},\bar{\lambda}_{11},\ldots}). \end{cases}$$

wo $G^{(a^{(i)}_\varrho)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}$ ebenso gebildet ist, wie der in gleicher Weise bezeichnete Ausdruck in der Recursionsformel (4.), § 6. Die Grössen $C^{(a^{(i)}_\varrho)}_{\lambda-\mu_h;\lambda_{11},\ldots,\lambda_{1e'}-\mu_{h1};\ldots}$ und $C^{(a^{(i)}_\varrho)}_{\ldots\lambda_{h,\sigma-1}-1,\lambda_{h\sigma}+1,\ldots}$ auf der rechten Seite von (6.) sind von demselben Gewicht wie $C^{(a^{(i)}_\varrho)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}$, aber von einem um 1 höheren Rang, während $C^{(\bar{a})}_{\bar{\lambda},\bar{\lambda}_{11},\ldots}$ geringeres Gewicht hat. Vermittelst der Formel (6.) drückt sich also die Grösse $C^{(a^{(i)}_\varrho)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}$ vom Gewicht a und vom Rang ν, falls a von $a^{(i)}$ verschieden ist, aus 1) durch Grössen von geringerem Gewicht, 2) durch Grössen vom Gewicht a und vom Rang $\nu+1$, 3) durch die Grösse $C^{(a^{(i)}_{\varrho-1})}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}$ vom Gewicht a und vom Rang ν, aber mit dem kleineren Index $\alpha^{(i)}_{\varrho-1}$, welche im Fall $\varrho = 1$ fortfällt.

Falls das Indexsystem $(\lambda, \lambda_{11}, \ldots)$ das Gewicht $a^{(i)}$ hat, ist die Formel (5.) durch eine andere zu ersetzen. Durch Differentiation der Glieder vom Gewicht $a^{(i)}$ in der Reihe $y_{a^{(i)}_\varrho}$ (5′.) findet man, dass die Reihe für $x\frac{dy_{a^{(i)}_\varrho}}{dx}$ die folgenden Glieder vom Gewicht $a^{(i)}$ enthält:

$$\sum_{\nu=0}^{e^{(i)}-1}(a^{(i)}c_\nu^{(a^{(i)}_\varrho)} - (\nu+1)c_{\nu+1}^{(a^{(i)}_\varrho)})x^{a^{(i)}}(-\log x)^\nu;$$

die rechte Seite der Differentialgleichung (1.) hat nach Einsetzung der Reihen (5.) als Coefficienten von $x^\lambda t_{11}^{\lambda_{11}}\ldots$:

$$a^{(i)}C^{(a^{(i)}_\varrho)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots} + C^{(a^{(i)}_{\varrho-1})}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots} + G^{(a^{(i)}_\varrho)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}.$$

$G^{(a^{(i)}_\varrho)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}$ ist Null, wenn $\lambda_{i\sigma} = 1$ $(\sigma = 1, \ldots, e^{(i)})$ ist, während die übrigen Indices

verschwinden, so dass der Coefficient von $t_{i\sigma}$ lautet:

$$a^{(i)} c^{(a_\varrho^{(i)})}_{\nu^{(i)}+\sigma-1} + c^{(a_{\varrho-1}^{(i)})}_{\nu^{(i)}+\sigma-1};$$

setzt man

$$x^{\tau^{(k)}} t_{11}^{\tau^{(k)}\,1\,1} \ldots = x^{\bar{\tau}^{(k)}} t_{11}^{\bar{\tau}^{(k)}\,1\,1} \ldots = \cdots = x^{a^{(i)}} (-\log x)^{\nu^{(i)}-k},$$

so erscheint diese Grösse, wenn man beachtet, dass

$$C^{(a_\varrho^{(i)})}_{\tau^{(k)}\,\tau_{1\,1\ldots}^{(k)}} = c^{(a_\varrho^{(i)})}_{\nu^{(i)}-k}, \quad C^{(a_\varrho^{(i)})}_{\bar{\tau}^{(k)}\,\bar{\tau}_{1\,1\ldots}^{(k)}} = 0, \quad \ldots$$

ist, und

$$G^{(a_\varrho^{(i)})}_{\tau^{(k)}\,\tau_{1\,1\ldots}^{(k)}} + G^{(a_\varrho^{(i)})}_{\bar{\tau}^{(k)}\,\bar{\tau}_{1\,1\ldots}^{(k)}} + \cdots = G^{(a_\varrho^{(i)})}_{\nu^{(i)}-k}$$

setzt, multiplicirt mit

$$a^{(i)} c^{(a_\varrho^{(i)})}_{\nu^{(i)}-k} + c^{(a_{\varrho-1}^{(i)})}_{\nu^{(i)}-k} + G^{(a_\varrho^{(i)})}_{\nu^{(i)}-k}.$$

Schreibt man die Glieder vom Gewicht $a^{(i)}$ in der Reihe $\Sigma F^{(a_\varrho^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots} x^\lambda t_{11}^{\lambda_{11}} \ldots$ in der Form

$$\sum_{\nu=0}^{\nu^{(i)}+e^{(i)}-1} f^{(a_\varrho^{(i)})}_\nu x^{a^{(i)}} (-\log x)^\nu,$$

so haben wir zur Bestimmung der Grössen $C^{(a_\varrho^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}$ vom Gewicht $a^{(i)}$ die Gleichung $f^{(a_\varrho^{(i)})}_\nu = 0$ oder

$$(6'.) \qquad \begin{cases} (\nu+1) c^{(a_\varrho^{(i)})}_{\nu+1} + c^{(a_{\varrho-1}^{(i)})}_{\nu} = 0, & (\nu = \nu^{(i)}, \ldots, \nu^{(i)}+e^{(i)}-1) \\ (\nu+1) c^{(a_\varrho^{(i)})}_{\nu+1} + c^{(a_{\varrho-1}^{(i)})}_{\nu} + G^{(a_\varrho^{(i)})}_{\nu} = 0, & (\nu = 0, 1, \ldots, \nu^{(i)}-1) \end{cases}$$

wo $G^{(a_\varrho^{(i)})}_\nu$ eine ganze Function solcher Grössen $C^{(\bar{a})}_{\bar{\lambda},\bar{\lambda}_{11},\ldots}$ ist, deren Gewicht kleiner ist als $a^{(i)}$. Aus den Gleichungen (6'.) für $\nu \geqq \nu^{(i)}$ ergiebt sich

$$c^{(a_\varrho^{(i)})}_\nu = -\frac{1}{\nu} c^{(a_{\varrho-1}^{(i)})}_{\nu-1} = \cdots = \frac{(-1)^\sigma}{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\sigma+1)} c^{(a_{\varrho-\sigma}^{(i)})}_{\nu-\sigma} \qquad (\nu-\sigma \geqq \nu^{(i)})$$

oder für $\nu - \sigma = \nu^{(i)}$

$$c^{(a_\varrho^{(i)})}_{\nu^{(i)}+\sigma} = \frac{(-1)^\sigma}{(\nu^{(i)}+\sigma)(\nu^{(i)}+\sigma-1)\ldots(\nu^{(i)}+1)} c^{(a_{\varrho-\sigma}^{(i)})}_{\nu^{(i)}};$$

$c^{(a_\varrho^{(i)})}_{\nu^{(i)}+\sigma}$ $(\varrho \leqq \sigma)$ verschwindet, während sich die Grössen $c^{(a_\varrho^{(i)})}_{\nu^{(i)}+\sigma}$ $(\varrho > \sigma)$ durch die $c^{(a_\varrho^{(i)})}_{\nu^{(i)}}$ ausdrücken. Aus den Gleichungen (6'.) für $\nu = 0, 1, \ldots, \nu^{(i)}-1$

berechnet man $c_1^{(a_\varrho^{(i)})}, c_2^{(a_\varrho^{(i)})}, \ldots, c_{\nu^{(i)}}^{(a_\varrho^{(i)})}$, während die Grössen

$$c_0^{(a_1^{(i)})}, \quad \ldots, \quad c_0^{(a_{e^{(i)}}^{(i)})}$$

unbestimmt bleiben. Sämmtliche Grössen $C_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots}^{(\alpha)}$ erscheinen demnach als ganze rationale Functionen der $e' + \cdots + e^{(m)}$ willkürlichen Constanten

$$c_0^{(a_\varrho^{(i)})}. \qquad (i = 1, \ldots, m;\ \varrho = 1, \ldots, e^{(i)})$$

Um die Convergenz der Reihe (5.) nachzuweisen, nehmen wir das Differentialgleichungssystem

$$(7.) \quad \begin{cases} x \dfrac{d\mathfrak{y}_{a_\varrho^{(i)}}}{dx} = (\mathfrak{a}^{(i)} - (\nu^{(i)} + \varrho - 1)\varepsilon)\mathfrak{y}_{a_\varrho^{(i)}} + \mathfrak{y}_{a_{\varrho-1}^{(i)}} \\ \qquad + \Sigma A_{\varkappa\varkappa_1 \ldots \varkappa_n}^{(a_\varrho^{(i)})} x^\varkappa \mathfrak{y}_1^{\varkappa_1} \ldots \mathfrak{y}_n^{\varkappa_n}, \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, r;\ \varrho = 1, \ldots, e^{(i)})$$

wofür wir kurz

$$\mathfrak{D}_{a_\varrho^{(i)}}(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n) = 0$$

schreiben; hierin ist

$$A_{\varkappa\varkappa_1 \ldots \varkappa_n}^{(\alpha)} = |A_{\varkappa\varkappa_1 \ldots \varkappa_n}^{(\alpha)}|,$$

$\mathfrak{a}^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$ ist eine positive Zahl, welche nicht grösser sein darf als der reelle Theil von $a^{(i)}$, ferner ist

$$\mathfrak{a}^{(i)} = \mu_i + \mu_{i1}\mathfrak{a}' + \cdots + \mu_{i,i-1}\mathfrak{a}^{(i-1)}$$

und $\mathfrak{a}^{(i)}$ $(i = m+1, \ldots, r)$ gleich dem negativen oder verschwindenden reellen Theil von $a^{(i)}$; $\nu^{(i)}$ $(i = m+1, \ldots, r)$ werde gleich Null angenommen; ε ist eine positive Zahl, welche jedenfalls so klein anzunehmen ist, dass auch

$$\mathfrak{a}^{(i)} - (\nu^{(i)} + \varrho - 1)\varepsilon \qquad (i = 1, \ldots, m;\ \varrho = 1, \ldots, e^{(i)})$$

positiv ist. Wenn zwischen $\mathfrak{a}', \ldots, \mathfrak{a}^{(m)}$ die Relation

$$\mathfrak{a}^{(i)} = \varrho_i + \varrho_{i1}\mathfrak{a}' + \cdots + \varrho_{i,i-1}\mathfrak{a}^{(i-1)}$$

besteht, kann eine Relation

$$\mathfrak{a}^{(i)} - (\nu^{(i)} + \varrho - 1)\varepsilon = \varrho_i + \sum_{h=1}^{i-1} \sum_{\sigma=1}^{e^{(h)}} \varrho_{ih\sigma}(\mathfrak{a}^{(h)} - (\nu^{(h)} + \sigma - 1)\varepsilon),$$

worin $\sum_{\sigma=1}^{e^{(h)}} \varrho_{ih\sigma} = \varrho_{ih}$ ist, nicht stattfinden, denn es müsste dann

$$\nu^{(i)} + \varrho - 1 = \sum_{h=1}^{i-1} \sum_{\sigma=1}^{e^{(h)}} \varrho_{ih\sigma}(\nu^{(h)} + \sigma - 1)$$

sein; die rechte Seite dieser Gleichung ist aber höchstens gleich

$$\sum_{h=1}^{i-1} \varrho_{ih}(\nu^{(h)} + e^{(h)} - 1)$$

und dieser Ausdruck höchstens gleich $\nu^{(i)}-1$. Dem Bestehen einer Relation

$$\mathfrak{a}^{(i)}-(\nu^{(i)}+\varrho-1)\varepsilon = \bar{\varrho}_i+\sum_{h=1}^{i-1}\sum_{\sigma=1}^{e^{(h)}}\bar{\varrho}_{ih\sigma}(\mathfrak{a}^{(h)}-(\nu^{(h)}+\sigma-1)\varepsilon),$$

ohne dass, wenn man $\sum_{h=1}^{e^{(h)}}\bar{\varrho}_{ih\sigma}=\bar{\varrho}_{ih}$ setzt, $\mathfrak{a}^{(i)}=\bar{\varrho}_i+\sum_{h=1}^{i-1}\bar{\varrho}_{ih}\mathfrak{a}^{(h)}$ ist, kann durch die Wahl der innerhalb gewisser Grenzen beliebig anzunehmenden Grössen $\mathfrak{a}', \ldots, \mathfrak{a}^{(m)}$ und ε vorgebeugt werden.

Setzt man

$$\mathfrak{z}_{i\varrho} = x^{\mathfrak{a}^{(i)}-(\nu^{(i)}+\varrho-1)\varepsilon}, \qquad \binom{i=1,\ldots,m}{\varrho=1,\ldots,e^{(i)}} \tag{8.}$$

so wird das System (7.) nach § 1 durch ein System von Reihen

$$\mathfrak{y}_\alpha = \Sigma\mathfrak{B}^{(\alpha)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots\lambda_{me^{(m)}}}x^\lambda\mathfrak{z}_{11}^{\lambda_{11}}\cdots\mathfrak{z}_{me_{(m)}}^{\lambda_{me^{(m)}}} \qquad (\alpha=1,\ldots,n) \tag{9.}$$

befriedigt, welche für hinreichend kleine Werthe von $|x|, |\mathfrak{z}_{11}|, \ldots$ convergiren. Durch Einsetzen der Reihen (9.) wird

$$\mathfrak{D}_{a_\varrho^{(i)}}(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n) = \Sigma\mathfrak{E}^{\left(a_\varrho^{(i)}\right)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}\ldots x^\lambda\mathfrak{z}_{11}^{\lambda_{11}}\ldots;$$

zur Berechnung der Coefficienten $\mathfrak{B}^{(\alpha)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}$ dient die Recursionsformel $\mathfrak{E}^{\left(a_\varrho^{(i)}\right)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}=0$ oder

$$\begin{aligned}&\Big(\lambda+\sum_{h=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{e^{(h)}}\lambda_{h\sigma}(\mathfrak{a}^{(h)}-(\nu^{(h)}+\sigma-1)\varepsilon)-(\mathfrak{a}^{(i)}-(\nu^{(i)}+\varrho-1)\varepsilon)\Big)\mathfrak{B}^{\left(a_\varrho^{(i)}\right)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}\\ &\qquad = \mathfrak{G}^{\left(a_\varrho^{(i)}\right)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}\left(\mathfrak{B}^{(\bar{a})}_{\bar{\lambda},\bar{\lambda}_{11},\ldots}\right),\end{aligned} \tag{10.}$$

wo $\mathfrak{G}^{\left(a_\varrho^{(i)}\right)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}$ analog $G^{\left(a_\varrho^{(i)}\right)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}$ in Formel (6.) gebildet ist. Die Grössen $\mathfrak{z}_{i\varrho}$ ersetzen wir nun durch die Functionen

$$\mathfrak{t}_{i\varrho} = x^{\mathfrak{a}^{(i)}-(\nu^{(i)}+\varrho-1)\varepsilon}\left(\frac{1-x^\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\nu^{(i)}+\varrho-1}, \qquad (i=1,\ldots,m;\ \varrho=1,\ldots,e^{(i)}) \tag{11.}$$

welche den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}x\frac{d\mathfrak{t}_{i1}}{dx} &= (\mathfrak{a}^{(i)}-\nu^{(i)}\varepsilon)\mathfrak{t}_{i1}-\nu^{(i)}x^{\mu_i}\mathfrak{t}_{1e'}^{\mu_{i1}}\ldots\mathfrak{t}_{i-1,e^{(i-1)}}^{\mu_{i,i-1}},\\ x\frac{d\mathfrak{t}_{i\varrho}}{dx} &= (\mathfrak{a}^{(i)}-(\nu^{(i)}+\varrho-1)\varepsilon)\mathfrak{t}_{i\varrho}-(\nu^{(i)}+\varrho-1)\mathfrak{t}_{i,\varrho-1} \qquad (\varrho=2,\ldots,e^{(i)})\end{aligned} \tag{12.}$$

genügen. Zwischen den $\mathfrak{z}_{i\varrho}$ und $\mathfrak{t}_{i\varrho}$ bestehen die Beziehungen

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}_{i\varrho} &= \sum_{k=1}^{\varrho}(\nu^{(i)}+\varrho-1)_{k-1}\varepsilon^{\nu^{(i)}+\varrho-k}\mathfrak{t}_{i,\varrho-k+1}\\ &+\sum_{k=1}^{\nu^{(i)}}(\nu^{(i)}+\varrho-1)_{\varrho+k-1}\varepsilon^{\nu^{(i)}-k}x^{\tau^{(k)}}\mathfrak{t}_{11}^{\tau_{11}^{(k)}}\ldots\mathfrak{t}_{i-1,e^{(i-1)}}^{\tau_{i-1,e^{(i-1)}}^{(k)}},\end{aligned} \tag{13.}$$

$$(14.)\quad \begin{cases} \varepsilon^{\nu^{(i)}+\varrho-1}\mathfrak{t}_{i\varrho} = \sum_{k=1}^{\varrho}(-1)^{k-1}(\nu^{(i)}+\varrho-1)_{k-1}\mathfrak{z}_{i,\varrho-k+1} \\ +\sum_{k=1}^{\nu^{(i)}}(-1)^{\varrho+k-1}(\nu^{(i)}+\varrho-1)_{\varrho+k-1}x^{\tau^{(k)}}\mathfrak{z}_{11}^{\tau_{11}^{(k)}}\cdots\mathfrak{z}_{i-1,e^{(i-1)}}^{\tau_{i-1,}^{(k)}{}^{(i-1)}}; \end{cases}$$

die rechte Seite von (13.) ist nämlich nach Einsetzung der Ausdrücke (11.)

$$\sum_{k=1}^{\varrho}(\nu^{(i)}+\varrho-1)_{k-1}x^{\mathfrak{a}^{(i)}-(\nu^{(i)}+\varrho-k)\varepsilon}(1-x^{\varepsilon})^{\nu^{(i)}+\varrho-k}$$

$$+\sum_{k=1}^{\nu^{(i)}}(\nu^{(i)}+\varrho-1)_{\varrho+k-1}x^{\mathfrak{a}^{(i)}-(\nu^{(i)}-k)\varepsilon}(1-x^{\varepsilon})^{\nu^{(i)}-k}$$

$$= x^{\mathfrak{a}^{(i)}-(\nu^{(i)}+\varrho-1)\varepsilon}\Big[\sum_{k=1}^{\varrho}(\nu^{(i)}+\varrho-1)_{k-1}x^{(k-1)\varepsilon}(1-x^{\varepsilon})^{\nu^{(i)}+\varrho-k}$$

$$+\sum_{k=1}^{\nu^{(i)}}(\nu^{(i)}+\varrho-1)_{\varrho+k-1}x^{(\varrho+k-1)\varepsilon}(1-x^{\varepsilon})^{\nu^{(i)}-k}\Big]$$

$$= x^{\mathfrak{a}^{(i)}-(\nu^{(i)}+\varrho-1)\varepsilon}\big(x^{\varepsilon}+(1-x^{\varepsilon})\big)^{\nu^{(i)}+\varrho-1} = x^{\mathfrak{a}^{(i)}-(\nu^{(i)}+\varrho-1)\varepsilon} = \mathfrak{z}_{i\varrho},$$

und die rechte Seite von (14.) ist nach Einsetzung der Ausdrücke (8.)

$$x^{\mathfrak{a}^{(i)}-(\nu^{(i)}+\varrho-1)\varepsilon}\Big[\sum_{k=1}^{\varrho}(-1)^{k-1}(\nu^{(i)}+\varrho-1)_{k-1}x^{(k-1)\varepsilon}$$

$$+\sum_{k=1}^{\nu^{(i)}}(-1)^{\varrho+k-1}(\nu^{(i)}+\varrho-1)_{\varrho+k-1}x^{(\varrho+k-1)\varepsilon}\Big]$$

$$= x^{\mathfrak{a}^{(i)}-(\nu^{(i)}+\varrho-1)\varepsilon}(1-x^{\varepsilon})^{\nu^{(i)}+\varrho-1} = \varepsilon^{\nu^{(i)}+\varrho-1}\mathfrak{t}_{i\varrho}.$$

Zufolge der Substitution (13.) geht die Reihe (9.) über in die Reihe

$$(15.)\qquad \mathfrak{y}_a = \Sigma\mathfrak{C}^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots,\lambda_{me^{(m)}}}x^{\lambda}\mathfrak{t}_{11}^{\lambda_{11}}\ldots\mathfrak{t}_{me^{(m)}}^{\lambda_{me^{(m)}}},$$

welche für hinreichend kleine Werthe von $|x|$, $|\mathfrak{t}_{11}|\ldots$ convergent ist; durch die Substitution (13.) oder durch Einsetzung der Reihen (15.) erhält man

$$\mathfrak{D}_{a_\varrho^{(i)}}(\mathfrak{y}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{y}_n) = \Sigma\mathfrak{E}^{(a_\varrho^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}x^{\lambda}\mathfrak{z}_{11}^{\lambda_{11}}\ldots = \Sigma\mathfrak{F}^{(a_\varrho^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}x^{\lambda}\mathfrak{t}_{11}^{\lambda_{11}}\ldots$$

und hat zur Berechnung der $\mathfrak{C}^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}$ die Recursionsformel

$$(16.)\quad \begin{cases} \Big(\lambda+\sum_{h=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{e^{(h)}}\lambda_{h\sigma}\big(\mathfrak{a}^{(h)}-(\nu^{(h)}+\sigma-1)\varepsilon\big)-\big(\mathfrak{a}^{(i)}-(\nu^{(i)}+\varrho-1)\varepsilon\big)\Big)\mathfrak{C}^{(a_\varrho^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots} \\ \qquad = \sum_{h=1}^{m}\nu^{(h)}(\lambda_{h1}+1)\mathfrak{C}^{(a_\varrho^{(i)})}_{\lambda-\mu_h;\lambda_{11},\ldots,\lambda_{1e'}-\mu_{h1};\ldots;\lambda_{h1}+1,\ldots} \\ \qquad +\sum_{h=1}^{m}\sum_{\sigma=2}^{e^{(h)}}(\nu^{(h)}+\sigma-1)(\lambda_{h\sigma}+1)\mathfrak{C}^{(a_\varrho^{(i)})}_{\lambda,\ldots\lambda_{h,\sigma-1}-1,\lambda_{h\sigma}+1,\ldots} \\ \qquad +\mathfrak{C}^{(a_{\varrho-1}^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}+\mathfrak{G}^{(a_\varrho^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}\big(\mathfrak{C}^{(\bar{a})}_{\bar{\lambda},\bar{\lambda}_{11},\ldots}\big). \end{cases}$$

Wir führen jetzt die Zahlen

$$\mathfrak{a} = \lambda + \sum_{h=1}^{m} \sum_{\sigma=1}^{e^{(h)}} \lambda_{h\sigma} \mathfrak{a}^{(h)}$$

$$\nu = \sum_{h=1}^{m} \sum_{\sigma=1}^{e^{(h)}} \lambda_{h\sigma} (\nu^{(h)} + \sigma - 1)$$

als Gewicht und Rang des Ausdrucks $x^\lambda \mathfrak{z}_{11}^{\lambda_{11}} \ldots$ oder das Ausdrucks $x^\lambda \mathfrak{t}_{11}^{\lambda_{11}} \ldots$ oder auch des Indexsystems $(\lambda, \lambda_{11}, \ldots)$ ein. In Formel (13.) wie in Formel (14.) sind alle Glieder von gleichem Gewicht, so dass aus den Gliedern der Reihe (9.) vom Gewicht $\mathfrak{a}$ auch nur Glieder vom Gewicht $\mathfrak{a}$ der Reihe (15.) hervorgehen; es ist daher

$$(17.) \qquad \sum_{(\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{r})} \mathfrak{B}^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots} x^\lambda \mathfrak{z}_{11}^{\lambda_{11}} \ldots = \sum_{(\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{r})} \mathfrak{C}^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots} x^\lambda \mathfrak{t}_{11}^{\lambda_{11}} \ldots,$$

$$(18.) \qquad \sum_{(\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{r})} \mathfrak{E}^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots} x^\lambda \mathfrak{z}_{11}^{\lambda_{11}} = \sum_{(\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{r})} \mathfrak{F}^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots} x^\lambda \mathfrak{t}_{11}^{\lambda_{11}} \ldots,$$

wenn man, unter $\mathfrak{r}$ eine beliebige positive Zahl verstehend, sämmtliche Summen nur über diejenigen Indexsysteme $(\lambda, \lambda_{11}, \ldots)$ erstreckt, deren Gewicht $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{r}$ ist.

Aus der Gleichung (17.) erhält man durch Einsetzung der Ausdrücke (14.) für die $\mathfrak{t}_{i\varrho}$ und Vergleichung der Coefficienten von $x^\lambda \mathfrak{z}_{11}^{\lambda_{11}} \ldots$ eine Gleichung von der Form

$$(19.) \qquad \mathfrak{B}^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots} = \varepsilon^{-\nu} \mathfrak{C}^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots} + \mathfrak{L}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}(\mathfrak{C}^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}),$$

wo $\mathfrak{L}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}$ eine lineare homogene Function solcher Grössen $\mathfrak{C}^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}$ bedeutet, deren Gewicht gleich $\mathfrak{a}$, deren Rang grösser als ν ist. Wir setzen für $\mathfrak{C}^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}$ $(\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{r})$ beliebige positive Werthe und verstehen unter $\mathfrak{B}^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}$ $(\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{r})$ die Zahlen, welche sich aus den Gleichungen (19.) berechnen; unter Zugrundelegung dieser Werthe berechnen wir die übrigen Grössen $\mathfrak{B}^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}$ $(\mathfrak{a} > \mathfrak{r})$ vermittelst der Recursionsformel (10.); die so berechnete Reihe (9.), welche nach einem am Schluss von § 1 bewiesenen Satze für hinreichend kleine absolute Beträge von $x, \mathfrak{z}_{11}, \ldots$ convergent ist, genügt der Differentialgleichung

$$(7'.) \qquad \begin{cases} x \dfrac{d\mathfrak{y}_{a_\varrho^{(i)}}}{dx} = (\mathfrak{a}^{(i)} - (\nu^{(i)} + \varrho - 1)\varepsilon)\mathfrak{y}_{a_\varrho^{(i)}} + \mathfrak{y}_{a_{\varrho-1}^{(i)}} + \sum A^{(a_\varrho^{(i)})}_{\varkappa\varkappa_1\ldots\varkappa_n} x^\varkappa \mathfrak{y}_1^{\varkappa_1} \ldots \mathfrak{y}_n^{\varkappa_n} \\ \qquad\qquad + \sum_{(\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{r})} \mathfrak{E}^{(a_\varrho^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots} x^\lambda \mathfrak{z}_{11}^{\lambda_{11}} \ldots \end{cases}$$

oder wegen (18.)

$$(7''.)\quad \begin{cases} x\dfrac{d\mathfrak{y}_{a_\varrho^{(i)}}}{dx} = (\mathfrak{a}^{(i)}-(\nu^{(i)}+\varrho-1)\varepsilon)\mathfrak{y}_{a_\varrho^{(i)}}+\mathfrak{y}_{a_{\varrho-1}^{(i)}}+\Sigma A^{(a_\varrho^{(i)})}_{\varkappa\varkappa_1\ldots\varkappa_n}x^{\varkappa}\mathfrak{y}_1^{\varkappa_1}\ldots\mathfrak{y}_n^{\varkappa_n} \\ \qquad\qquad +\sum_{(\mathfrak{a}\leqq\mathfrak{r})}\mathfrak{F}^{(a_\varrho^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots}x^{\lambda}\mathfrak{t}^{\lambda}_{11}{}^{1}\ldots . \end{cases}$$

Die auf die soeben beschriebene Weise gebildete Reihe (9.), welche dem System (7'.) genügt, geht durch die Substitution (13.) über in eine Reihe von der Form (15.), für welche sich aus der Differentialgleichung (7''.) die Recursionsformel für $\mathfrak{S}^{(a_\varrho^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots}$ $(\mathfrak{a}>\mathfrak{r})$ ergiebt, während die $\mathfrak{S}^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots}$ $(\mathfrak{a}\leqq\mathfrak{r})$ die willkürlich vorgeschriebenen Werthe haben. Wir können also sagen:

Die Reihe (15.) ist auch dann für hinreichend kleine Werthe von $|x|$, $|\mathfrak{t}_{11}|$, ... convergent, wenn man $\mathfrak{S}^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots}$ $(\mathfrak{a}\leqq\mathfrak{r})$ beliebig annimmt und die Recursionsformel (16.) nur zur Berechnung der Coefficienten $\mathfrak{S}^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots}$ $(\mathfrak{a}>\mathfrak{r})$ benutzt.

Nimmt man $\mathfrak{r}$ so gross, dass für $\mathfrak{a}>\mathfrak{r}$ der Coefficient von $\mathfrak{S}^{(a_\varrho^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots}$ auf der linken Seite der Recursionsformel (16.) positiv ist und nimmt man die willkürlich zu wählenden Grössen $\mathfrak{S}^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots}$ $(\mathfrak{a}\leqq\mathfrak{r})$ positiv an, so ergeben sich für sämmtliche Grössen $\mathfrak{S}^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots}$ positive Werthe.

Wir beweisen zwei weitere Hülfssätze:

a) Es sind zwei positive Zahlen $\mathfrak{r}$ und g so vorhanden, dass für $\mathfrak{a}>\mathfrak{r}$

$$\left|Q^{(a_\varrho^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots}\right|<g$$

ist, wenn man setzt:

$$Q^{(a_\varrho^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots}=\frac{\lambda+\sum_{h=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{e^{(h)}}\lambda_{h\sigma}(\mathfrak{a}^{(h)}-(\nu^{(h)}+\sigma-1)\varepsilon)-\mathfrak{a}^{(i)}+(\nu^{(i)}+\varrho-1)\varepsilon}{\lambda+\sum_{h=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{e^{(h)}}\lambda_{h\sigma}a^{(h)}-a^{(i)}}.$$

Wir nehmen $\mathfrak{r}$ so gross an, dass für $\mathfrak{a}>\mathfrak{r}$

$$\lambda+\sum_{h=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{e^{(h)}}\lambda_{h\sigma}(\mathfrak{a}^{(h)}-(\nu^{(h)}+\sigma-1)\varepsilon)-p^{(i)}>f,$$

wo f irgend eine positive Zahl bedeutet und $p^{(i)}$ der reelle Theil von $a^{(i)}$ ist; dann ist wegen $\mathfrak{a}^{(h)}\leqq p^{(h)}$ $(h=1,\ldots,m)$:

$$\lambda+\sum_{h=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{e^{(h)}}\lambda_{h\sigma}(\mathfrak{a}^{(h)}-(\nu^{(h)}+\sigma-1)\varepsilon)-\mathfrak{a}^{(i)}+(\nu^{(i)}+\varrho-1)\varepsilon>f$$

und

$$\lambda + \sum_{h=1}^{m} \sum_{\sigma=1}^{e^{(h)}} \lambda_{h\sigma} p^{(h)} - p^{(i)} > f;$$

letzterer Ausdruck ist aber der reelle Theil des Nenners von $Q^{(a_\varrho^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{1\,1},\ldots}$, und da der absolute Betrag nicht kleiner ist als der reelle Theil, so ist für $\mathfrak{a} > \mathfrak{r}$

$$\left| \lambda + \sum_{h=1}^{m} \sum_{\sigma=1}^{e^{(h)}} \lambda_{h\sigma} a^{(h)} - a^{(i)} \right| > f.$$

Wir schreiben

$$Q^{(a_\varrho^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{1\,1}\ldots} = \frac{\lambda + \sum_{h=1}^{m} \sum_{\sigma=1}^{e^{(h)}} \lambda_{h\sigma} (\mathfrak{a}^{(h)} - (\nu^{(h)} + \sigma - 1)\varepsilon) - p^{(i)}}{\lambda + \sum_{h=1}^{m} \sum_{\sigma=1}^{e^{(h)}} \lambda_{h\sigma} a^{(h)} - a^{(i)}} + \frac{p^{(i)} - \mathfrak{a}^{(i)} + (\nu^{(i)} + \varrho - 1)\varepsilon}{\lambda + \sum_{h=1}^{m} \sum_{\sigma=1}^{e^{(h)}} \lambda_{h\sigma} a^{(h)} - a^{(i)}};$$

der absolute Betrag des ersten Bruches kann den Werth 1 nicht übersteigen, da sein Zähler nicht grösser sein kann als $\lambda + \sum_{h=1}^{m} \sum_{\sigma=1}^{e^{(h)}} \lambda_{h\sigma} p^{(h)} - p^{(i)}$, der reelle Theil des Nenners; der absolute Betrag des zweiten Bruches ist kleiner als

$$\frac{p^{(i)} - \mathfrak{a}^{(i)} + (\nu^{(i)} + \varrho - 1)\varepsilon}{f}.$$

Wenn man

$$g \geqq 1 + \frac{p^{(i)} - \mathfrak{a}^{(i)} + (\nu^{(i)} + \varrho - 1)\varepsilon}{f}$$

annimmt, ist

$$\left| Q^{(a_\varrho^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{1\,1},\ldots} \right| < g \quad \text{für} \quad \mathfrak{a} > \mathfrak{r},$$

w. z. b. w.

b) Ist $\mathfrak{a} > \mathfrak{r}$ und

$$\left| C^{(a_\varrho^{(i)})}_{\bar{\lambda},\bar{\lambda}_{1\,1},\ldots} \right| < \mathfrak{G}^{(a_\varrho^{(i)})}_{\bar{\lambda},\bar{\lambda}_{1\,1},\ldots} \cdot g^{2e\bar{\mathfrak{a}} - \bar{\nu} - 2e + \bar{\varrho}}$$

für $\bar{\mathfrak{a}} < \mathfrak{a}$, sowie für $\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$, $\bar{\nu} > \nu$ und schliesslich für $\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$, $\bar{\nu} = \nu$, $\bar{\varrho} > \varrho$, so ist auch

$$\left| C^{(a_\varrho^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{1\,1},\ldots} \right| < \mathfrak{G}^{(a_\varrho^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{1\,1},\ldots} \cdot g^{2e\mathfrak{a} - \nu - 2e + \varrho}.$$

Hierbei ist e die grösste der Zahlen $e', \ldots, e^{(m)}$.

Der Voraussetzung nach ist (vgl. Formel (6.) und (16.))

$$\left| C^{(a_\varrho^{(i)})}_{\ldots\lambda_{h,\sigma-1}-1,\lambda_{h\sigma}+1,\ldots} \right| < \mathfrak{G}^{(a_\varrho^{(i)})}_{\ldots\lambda_{h,\sigma-1}-1,\lambda_{h\sigma}+1,\ldots} \cdot g^{2e\mathfrak{a} - \nu - 2e + \varrho - 1},$$

$$\left| C^{(a_{\varrho-1}^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{1\,1},\ldots} \right| < \mathfrak{G}^{(a_{\varrho-1}^{(i)})}_{\lambda,\lambda_{1\,1},\ldots} \cdot g^{2e\mathfrak{a} - \nu - 2e + \varrho - 1},$$

ferner ist

$$\left|C^{(\bar{a})}_{\bar{\lambda},\bar{\lambda}_{11},\ldots}C^{(\bar{a})}_{\bar{\lambda},\bar{\lambda}_{11},\ldots}\ldots\right| < \mathfrak{G}^{(\bar{a})}_{\bar{\lambda},\bar{\lambda}_{11},\ldots}\mathfrak{G}^{(\bar{a})}_{\bar{\lambda},\bar{\lambda}_{11},\ldots}\ldots \times g^{2e\left(\lambda-\varkappa+\sum\sum\lambda_{h\sigma}a^{(h)}\right)-\sum\sum\lambda_{h\sigma}(\nu^{(h)}+\sigma-1)-2e(\varkappa_1+\cdots+\varkappa_n)+(\varkappa_1+\cdots+\varkappa_n)e}\ ^{*});$$

der Exponent von g,

$$2e\mathfrak{a}-\nu-e(2\varkappa+\varkappa_1+\cdots+\varkappa_n),$$

ist wegen $2\varkappa+\varkappa_1+\cdots+\varkappa_n \geqq 2$ höchstens gleich

$$2e\mathfrak{a}-\nu-2e \leqq 2e\mathfrak{a}-\nu-2e+\varrho-1.$$

Mithin ist die rechte Seite der Recursionsformel (6.) dem absoluten Betrage nach kleiner als die rechte Seite der Recursionsformel (16.) multiplicirt mit $g^{2e\mathfrak{a}-\nu-2e+\varrho-1}$, woraus unter Berücksichtigung des Hülfssatzes a) folgt:

$$\left|C^{\left(a^{(i)}_{\varrho}\right)}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots}\right| < \mathfrak{G}^{\left(a^{(i)}_{\varrho}\right)}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots}\cdot g^{2e\mathfrak{a}-\nu-2e+\varrho},$$

w. z. b. w.

Wenn man, nachdem die Werthe der Constanten $c_0^{\left(a^{(i)}_{\varrho}\right)}$ festgesetzt sind, die willkürlich anzunehmenden positiven Grössen $\mathfrak{G}^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots}$ $(\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{r})$ so wählt, dass

$$\left|C^{\left(a^{(i)}_{\varrho}\right)}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots}\right| < \mathfrak{G}^{\left(a^{(i)}_{\varrho}\right)}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots}\cdot g^{2e\mathfrak{a}-\nu-2e+\varrho} \qquad (\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{r})$$

ist, so ist nach Hülfssatz b) allgemein für alle Werthe λ, λ_{11}, ...

$$\left|C^{\left(a^{(i)}_{\varrho}\right)}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots}\right| < \mathfrak{G}^{\left(a^{(i)}_{\varrho}\right)}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots}\cdot g^{2e\mathfrak{a}-\nu-2e+\varrho} < \mathfrak{G}^{\left(a^{(i)}_{\varrho}\right)}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots}\cdot g^{2e\mathfrak{a}} = \mathfrak{G}^{\left(a^{(i)}_{\varrho}\right)}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots}\cdot g^{2e\left(\lambda+\sum\sum\lambda_{h\sigma}a^{(h)}\right)}.$$

Wenn die positiven Zahlen r, r_{11}, ... so gewählt sind, dass die Reihe (15.) für $|x|=r$, $|t_{11}|=r_{11}$, ... convergirt, so ist, wenn man

$$|x| \leqq \frac{r}{g^{2e}}, \quad |t_{11}| \leqq \frac{r_{11}}{g^{2e\mathfrak{a}'}}, \quad \ldots$$

annimmt,

$$|C^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots}x^{\lambda}t_{11}^{\lambda_{11}}\ldots| < \mathfrak{G}^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots}g^{2e\left(\lambda+\sum\sum\lambda_{h\sigma}a^{(h)}\right)}\cdot\left(\frac{r}{g^{2e}}\right)^{\lambda}\left(\frac{r_{11}}{g^{2e\mathfrak{a}'}}\right)^{\lambda_{11}}\cdots = \mathfrak{G}^{(a)}_{\lambda,\lambda_{11}\ldots}r^{\lambda}r_{11}^{\lambda_{11}}\ldots.$$

Demnach ist die Reihe (5.) convergent, wenn die absoluten Beträge von x, t_{11}, ... die angegebenen Bedingungen erfüllen.

Wir lassen jetzt die Voraussetzung, dass in dem Differentialgleichungssystem (1.) a', ..., $a^{(m)}$ verschieden seien, fallen, indem wir

*) Das letzte Glied des Exponenten ist vergrössert, indem ϱ für jeden Factor durch e ersetzt wurde.

unter Abänderung der Bezeichnung ein System von folgender Form zu Grunde legen:

$$(1^{a}.)\qquad \begin{cases} x\dfrac{dy_{a^{(i)}_{\varrho_1}}}{dx} = a^{(i)} y_{a^{(i)}_{\varrho_1}} + y_{a^{(i)}_{\varrho_1 - 1}} + \cdots, & (\varrho_1 = 1, \ldots, e^{(i)}_1) \\ x\dfrac{dy_{a^{(i)}_{\varrho_2}}}{dx} = a^{(i)} y_{a^{(i)}_{\varrho_2}} + y_{a^{(i)}_{\varrho_2 - 1}} + \cdots, & (\varrho_2 = 1, \ldots, e^{(i)}_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ & (i = 1, \ldots, r) \end{cases}$$

Die grösste der Zahlen $e^{(i)}_1, e^{(i)}_2, \ldots$ bezeichnen wir mit $e^{(i)}$. Zwischen den Grössen $a', \ldots, a^{(m)}$ mit positiven reellen Theilen bestehen irgend welche Beziehungen

$$a^{(i)} = \varrho_i + \varrho_{i1} a' + \cdots + \varrho_{i,i-1} a^{(i-1)};$$

die Zahl $\nu^{(i)}$ wird um 1 grösser angenommen als die grösste der Zahlen

$$\varrho_i + \varrho_{i1}(\nu' + e' - 1) + \cdots + \varrho_{i,i-1}(\nu^{(i-1)} + e^{(i-1)} - 1).$$

Das System (1ª.) wird durch ein System von Reihen von der Form (5.) befriedigt, worin nur $e^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$ die soeben angegebene Bedeutung hat. An die Stelle der Recursionsformel (6.) für $C^{(a^{(i)}_{\varrho})}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}$ treten ebenso gebildete Formeln für $C^{(a^{(i)}_{\varrho_1})}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}$, $C^{(a^{(i)}_{\varrho_2})}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots}$, ... Für die Glieder vom Gewicht $a^{(i)}$ in den Reihen für $y_{a^{(i)}_{\varrho_1}}$, $y_{a^{(i)}_{\varrho_2}}$, ...

$$\sum_{\nu=0}^{\nu^{(i)}+e^{(i)}-1} c^{(a)}_{\nu} x^{a^{(i)}} (-\log x)^{\nu} \qquad \left(a = a^{(i)}_{\varrho_1}, a^{(i)}_{\varrho_2} \ldots\right)$$

gelten die Formeln

$$(6'_{n}.)\qquad \begin{cases} (\nu+1) c^{(a^{(i)}_{\varrho_1})}_{\nu+1} + c^{(a^{(i)}_{\varrho_1 - 1})}_{\nu} = 0, & \\ (\nu+1) c^{(a^{(i)}_{\varrho_2})}_{\nu+1} + c^{(a^{(i)}_{\varrho_2 - 1})}_{\nu} = 0, & (\nu = \nu^{(i)}, \ldots, \nu^{(i)} + e^{(i)} - 1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ (\nu+1) c^{(a^{(i)}_{\varrho_1})}_{\nu+1} + c^{(a^{(i)}_{\varrho_1 - 1})}_{\nu} + G^{(a^{(i)}_{\varrho_1})}_{\nu} = 0, & \\ (\nu+1) c^{(a^{(i)}_{\varrho_2})}_{\nu+1} + c^{(a^{(i)}_{\varrho_2 - 1})}_{\nu} + G^{(a^{(i)}_{\varrho_2})}_{\nu} = 0, & (\nu = 0, 1, \ldots, \nu^{(i)} - 1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{cases}$$

Die Grössen $c^{(a^{(i)}_{\varrho_1})}_{0}$ $(\varrho_1 = 1, \ldots, e^{(i)}_1)$, $c^{(a^{(i)}_{\varrho_2})}_{0}$ $(\varrho_2 = 1, \ldots, e^{(i)}_2)$, ... sind willkürlich anzunehmen, so dass die Zahl der unbestimmten Constanten $\sum_{i=1}^{m}(e^{(i)}_1 + e^{(i)}_2 + \cdots)$

beträgt. Der oben gegebene Convergenzbeweis erfährt keine wesentliche Aenderung.

Die Determinante

$$\Delta(s) = |a_{\alpha\beta} - s\delta_{\alpha\beta}| \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$

des Differentialgleichungssystems

$$x\frac{dy_\alpha}{dx} = \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}y_\beta + \Sigma A^{(\alpha)}_{\varkappa\varkappa_1\ldots\varkappa_n} x^\varkappa y_1^{\varkappa_1}\ldots y_n^{\varkappa_n} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

habe die Elementartheiler

$$(s-a^{(i)})^{e_1^{(i)}}, \quad (s-a^{(i)})^{e_2^{(i)}}, \quad \ldots \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

Die grösste der Zahlen $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \ldots$ ***werde mit*** $e^{(i)}$ ***bezeichnet. Die reellen Theile von*** $a', \ldots, a^{(m)}$ ***seien positiv, diejenigen von*** $a^{(m+1)}, \ldots, a^{(r)}$ ***negativ oder Null. Zwischen den Grössen*** $a', \ldots, a^{(m)}$ ***dürfen beliebige Beziehungen***

$$(\varrho.) \qquad a^{(i)} = \varrho_i + \varrho_{i1}a' + \cdots + \varrho_{i,i-1}a^{(i-1)}$$

mit ganzen positiven Coefficienten bestehen. Den Grössen $a', \ldots, a^{(m)}$ ***werden ganze positive Zahlen (einschl. Null)*** $\nu', \ldots, \nu^{(m)}$ ***zugeordnet. Wenn*** $a^{(i)}$ ***nicht auf der linken Seite einer der Gleichungen*** $(\varrho.)$ ***auftritt, ist*** $\nu^{(i)} = 0$ ***zu setzen; andernfalls wird aus jeder Gleichung, auf deren linker Seite*** $a^{(i)}$ ***steht, die Zahl*** $\varrho_{i1}(\nu'+e'-1)+\cdots+\varrho_{i,i-1}(\nu^{(i-1)}+e^{(i-1)}-1)$ ***gebildet und*** $\nu^{(i)}$ ***um 1 grösser angenommen als die grösste dieser Zahlen. Dann wird das Differentialgleichungssystem, wenn man***

$$t_{i1} = x^{a^{(i)}}(-\log x)^{\nu^{(i)}}, \quad t_{i2} = x^{a^{(i)}}(-\log x)^{\nu^{(i)}+1}, \quad \ldots,$$
$$t_{ie^{(i)}} = x^{a^{(i)}}(-\log x)^{\nu^{(i)}+e^{(i)}-1} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

setzt, durch ein System von Reihen

$$y_\alpha = \Sigma C^{(\alpha)}_{\lambda,\lambda_{11},\ldots,\lambda_{1e'},\ldots,\lambda_{m1},\ldots,\lambda_{me^{(m)}}} x^\lambda t_{11}^{\lambda_{11}}\ldots t_{1e'}^{\lambda_{1e'}}\ldots t_{m1}^{\lambda_{m1}}\ldots t_{me^{(m)}}^{\lambda_{me^{(m)}}} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

befriedigt, welche $\sum_{i=1}^{m}(e_1^{(i)}+e_2^{(i)}+\cdots)$ ***willkürliche Grössen enthalten und für hinreichend kleine Werthe von*** $|x|, |t_{11}|, \ldots$ ***convergiren.***

§ 8.

Die in § 4 angestellten Betrachtungen über Systeme linearer Differentialgleichungen sollen jetzt auf den Fall ausgedehnt werden, dass die Determinante $\Delta(s) = |a_{\alpha\beta} - s\delta_{\alpha\beta}|$ mehrfache Elementartheiler besitzt. Das System sei auf die Form gebracht:

$$(1.) \qquad x\frac{dy_{a_\varrho^{(i)}}}{dx} = a^{(i)}y_{a_\varrho^{(i)}} + y_{a_{\varrho-1}^{(i)}} + \sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\varkappa=1}^{\infty} a^{(\varkappa)}_{a_\varrho^{(i)},\beta}x^\varkappa y_\beta; \qquad (i = 1, \ldots, m;\ \varrho = 1, \ldots, e^{(i)})$$

zwischen den zunächst als verschieden vorausgesetzten Grössen $a', \ldots, a^{(m)}$ mit positiven reellen Theilen dürfen beliebige Beziehungen bestehen. Zur Bestimmung der Coefficienten des dem System (1.) nach § 7 genügenden Reihensystems

$$(2.) \qquad y_a = \Sigma C_{a,\nu}^{(a)} x^a (-\log x)^\nu \qquad (a = 1, \ldots, n)$$

dient die Recursionsformel

$$(3.) \qquad (a-a^{(i)}) C_{a,\nu}^{(a_\varrho^{(i)})} = (\nu+1) C_{a,\nu+1}^{(a_\varrho^{(i)})} + C_{a,\nu}^{(a_{\varrho-1}^{(i)})} + \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\varkappa \geqq 1} a_{a_\varrho^{(i)},\beta}^{(\varkappa)} C_{a-\varkappa,\nu}^{(\beta)}$$

bezw.

$$(3'.) \qquad 0 = (\nu+1) C_{a^{(i)},\nu+1}^{(a_\varrho^{(i)})} + C_{a^{(i)},\nu}^{(a_{\varrho-1}^{(i)})} + \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\varkappa \geqq 1} a_{a_\varrho^{(i)},\beta}^{(\varkappa)} C_{a^{(i)}-\varkappa,\nu}^{(\beta)}.$$

Wir beweisen den Satz:

„$C_{a,\nu}^{(a_\varrho^{(i)})}$ ist gleich Null, wenn $\nu \geqq e^{(i_1)} + e^{(i_2)} + \cdots + e^{(i\delta)}$ ist, vorausgesetzt, dass $a^{(i_1)}, a^{(i_2)}, \ldots, a^{(i\delta)}$ diejenigen unter den Grössen $a', \ldots, a^{(m)}$ sind, welche in der Reihe $a, a-1, a-2, \ldots$ enthalten sind."

Dabei denken wir uns $a^{(i_1)}, a^{(i_2)}, \ldots, a^{(i\delta)}$ so geordnet, dass die reellen Theile zunehmen. Es sei zunächst a von $a^{(i)}$ verschieden, und der Satz sei für die Gewichte $a-1, a-2, \ldots$, für das Gewicht a und den Rang $\nu+1$, ferner für die Grössen $C_{a,\nu}^{(a_{\varrho-1}^{(i)})}$ bewiesen. Dann gilt er auch für $C_{a,\nu}^{(a_\varrho^{(i)})}$. $C_{a,\nu}^{(a_\varrho^{(i)})}$ ist nämlich nach (3.) eine lineare homogene Function von $C_{a,\nu+1}^{(a_\varrho^{(i)})}$, $C_{a,\nu}^{(a_{\varrho-1}^{(i)})}$ und verschiedenen Grössen $C_{a-\varkappa,\nu}^{(\beta)}$. Wenn $\nu \geqq e^{(i_1)} + \cdots + e^{(i\delta)}$ ist, so gilt dasselbe für $\nu+1$, und es ist $C_{a,\nu+1}^{(a_\varrho^{(i)})} = 0$ und $C_{a,\nu}^{(a_{\varrho-1}^{(i)})} = 0$. Sind $a^{(i_1)}, \ldots, a^{(i\gamma)}$ die in der Reihe $a-\varkappa, a-\varkappa-1, \ldots$ $(\varkappa \geqq 1)$ enthaltenen Grössen $a^{(i)}$, so ist $\gamma \leqq \delta$, also jedenfalls $\nu \geqq e^{(i_1)} + \cdots + e^{(i\gamma)}$ und demnach auf Grund der Voraussetzung $C_{a-\varkappa,\nu}^{(\beta)} = 0$. Nach (3.) ist $C_{a,\nu}^{(a_\varrho^{(i)})} = 0$. Durch wiederholte Anwendung dieser Schlussweise ergiebt sich aus der Gültigkeit des Satzes für die Gewichte $a-1, a-2, \ldots$ seine Gültigkeit für das Gewicht a. Es sei jetzt $a = a^{(i)}$, und wir zeigen, dass der Satz für das Gewicht $a^{(i)}$ gilt, wenn er für die Gewichte $a^{(i)}-1, a^{(i)}-2, \ldots$ bewiesen ist. Aus (3'.)

$$C_{a^{(i)},\nu}^{(a_\varrho^{(i)})} = -\frac{1}{\nu} C_{a^{(i)},\nu-1}^{(a_{\varrho-1}^{(i)})} - \frac{1}{\nu} \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\varkappa \geqq 1} a_{a_\varrho^{(i)},\beta}^{(\varkappa)} C_{a^{(i)}-\varkappa,\nu-1}^{(\beta)}$$

in Verbindung mit den entsprechenden Ausdrücken für $C_{a^{(i)},\nu-1}^{(a_{\varrho-1}^{(i)})}, \ldots, C_{a^{(i)},\nu-\varrho+1}^{(a_1^{(i)})}$

ergiebt sich $C^{\binom{a_\varrho^{(i)}}{}}_{a^{(i)},\nu}$ als lineare homogene Function von

$$C^{(\beta)}_{a^{(i)}-\varkappa,\nu-1},\quad C^{(\beta)}_{a^{(i)}-\varkappa,\nu-2},\quad \ldots,\quad C^{(\beta)}_{a^{(i)}-\varkappa,\nu-\varrho}.$$

Wenn $\nu \geqq e^{(i_1)}+\cdots+e^{(i\delta)}$ ist, wo $a^{(i_1)}, \ldots, a^{(i\delta-1)}, a^{(i\delta)}=a^{(i)}$ die in der Reihe $a^{(i)}, a^{(i)}-1, a^{(i)}-2, \ldots$ vorkommenden Grössen $a', \ldots, a^{(m)}$ sind, so enthält die Reihe $a^{(i)}-\varkappa, a^{(i)}-\varkappa-1, \ldots$ $(\varkappa>0)$ die Grössen $a^{(i_1)}, \ldots, a^{(i\gamma)}$, wo $\gamma<\delta$ ist, weil $a^{(i)}=a^{(i\delta)}$ fehlt; die Zahlen $\nu-1, \ldots, \nu-\varrho$ sind wegen $\varrho \leqq e^{(i)}$ nicht kleiner $e^{(i_1)}+\cdots+e^{(i\gamma)}$, und es ist der Voraussetzung nach $C^{(\beta)}_{a^{(i)}-\varkappa,\nu-1}=0, \ldots, C^{(\beta)}_{a^{(i)}-\varkappa,\nu-\varrho}=0$. Folglich ist $C^{\binom{a_\varrho^{(i)}}{}}_{a^{(i)},\nu}=0$.

Wenn noch gezeigt wird, dass der Satz für das Gewicht a auch dann gilt, wenn die Zahlen $a-1, a-2, \ldots$ nicht in der Form

$$\lambda+\sum_{h=1}^{m}(\lambda_{h1}+\cdots+\lambda_{he^{(h)}})a^{(h)}$$

darstellbar sind, also nicht als Gewichte auftreten können, so folgt aus dem Vorangehenden seine allgemeine Gültigkeit. Für Grössen a von dieser Beschaffenheit wird die Formel (3.)

$$(a-a^{(i)})C^{\binom{a_\varrho^{(i)}}{}}_{a,\nu} = (\nu+1)C^{\binom{a_\varrho^{(i)}}{}}_{a,\nu+1}+C^{\binom{a_{\varrho-1}^{(i)}}{}}_{a,\nu}.$$

Wenn a von $a^{(i)}$ verschieden ist, ergiebt sich hieraus $C^{\binom{a_\varrho^{(i)}}{}}_{a,\nu}=0$, falls $C^{\binom{a_\varrho^{(i)}}{}}_{a,\nu+1}=0$ und $C^{\binom{a_{\varrho-1}^{(i)}}{}}_{a,\nu}=0$ ist. Für $\varrho=1$ und $\nu=\bar{\nu}$, wo $\bar{\nu}$ den grössten mit dem Gewicht a verbundenen Rang bedeutet, schreibt sich die Formel (3.)

$$(a-a^{(i)})C^{\binom{a_1^{(i)}}{}}_{a,\bar{\nu}} = 0;$$

aus $C^{\binom{a_1^{(i)}}{}}_{a,\bar{\nu}}=0$ folgt nach dem vorhergehenden $C^{\binom{a_\varrho^{(i)}}{}}_{a,\nu}=0$. Im Falle $a=a^{(i)}$ lautet die Formel (3′.)

$$0 = (\nu+1)C^{\binom{a_\varrho^{(i)}}{}}_{a^{(i)},\nu+1}+C^{\binom{a_{\varrho-1}^{(i)}}{}}_{a^{(i)},\nu}.$$

Aus derselben ergiebt sich

$$C^{\binom{a_\varrho^{(i)}}{}}_{a,\nu} = -\frac{1}{\nu}C^{\binom{a_{\varrho-1}^{(i)}}{}}_{a^{(i)},\nu-1} = \cdots = \frac{(-1)^{\varrho-1}}{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\varrho)}C^{\binom{a_1^{(i)}}{}}_{a^{(i)},\nu-\varrho+1};$$

es ist $C^{\binom{a_\varrho^{(i)}}{}}_{a,\nu}=0$ für $\nu>\varrho-1$, also jedenfalls für $\nu>e^{(i)}-1$; die Reihe $a^{(i)}, a^{(i)}-1, \ldots$ enthält der jetzigen Annahme nach nur die einzige Grösse $a^{(i)}$, und da $C^{(a)}_{a^{(i)},\nu}$ für $\nu \geqq e^{(i)}$ verschwindet, so ist der Satz für $a=a^{(i)}$ bewiesen, falls keine der Zahlen $a^{(i)}-1, a^{(i)}-2, \ldots$ eine Gewichtszahl ist.

Ist

$$\begin{aligned} a^{(i_2)} &= \mu_2 + a^{(i_1)}, \\ a^{(i_3)} &= \mu_3 + a^{(i_2)}, \\ &\cdots\cdots \\ a^{(i_\delta)} &= \mu_\delta + a^{(i_{\delta-1})}, \\ a &= \mu + a^{(i_\delta)}, \end{aligned}$$

wo $\mu_2, \ldots, \mu_\delta$ und μ ganze positive Zahlen sind, während die Reihe a, $a-1$, $a-2$, ... ausser $a^{(i_1)}, \ldots, a^{(i_\delta)}$ keine weiteren Zahlen $a^{(i)}$ enthält, so kann die Reihe für y_a nur die folgenden Glieder vom Gewicht a enthalten:

$$x^a, \quad x^a(-\log x), \quad \ldots, \quad x^a(-\log x)^{e^{(i_1)}+e^{(i_2)}+\cdots+e^{(i_\delta)}-1};$$

dagegen kommen Glieder vom Gewicht a überhaupt nicht vor, wenn a nicht die Form $\mu + a^{(i)}$ hat. Bei Systemen linearer Differentialgleichungen wird demnach das Auftreten von Logarithmen nur bedingt durch Beziehungen von der Form $a^{(i)} = \varrho + a^{(h)}$ (ϱ ganze positive Zahl).

Hat das Differentialgleichungssystem die allgemeinste Gestalt

$$(1^a.)\quad \left\{ \begin{aligned} x\frac{dy_{a^{(i)}_{\varrho_1}}}{dx} &= a^{(i)} y_{a^{(i)}_{\varrho_1}} + y_{a^{(i)}_{\varrho_1-1}} + \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\varkappa \geqq 1} a^{(\varkappa)}_{a^{(i)}_{\varrho_1},\beta} x^\varkappa y_\beta, && (\varrho_1 = 1, \ldots, e^{(i)}_1) \\ x\frac{dy_{a^{(i)}_{\varrho_2}}}{dx} &= a^{(i)} y_{a^{(i)}_{\varrho_2}} + y_{a^{(i)}_{\varrho_2-1}} + \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\varkappa \geqq 1} a^{(\varkappa)}_{a^{(i)}_{\varrho_2},\beta} x^\varkappa y_\beta, && (\varrho_2 = 1, \ldots, e^{(i)}_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &(i = 1, \ldots, r) \end{aligned} \right.$$

so erhält man dasselbe Resultat, wenn man nur unter $e^{(i)}$ die grösste der Zahlen $e^{(i)}_1, e^{(i)}_2, \ldots$ versteht.

Auf eine genaue Untersuchung der Reihenentwickelungen für Systeme linearer Differentialgleichungen soll hier nicht eingegangen werden (vgl. Math. Ann. Bd. 39, S. 391 ff.).

§ 9.

Wir betrachten jetzt die Differentialgleichung $n$ter Ordnung

$$(1.)\quad \left\{ \begin{aligned} x^n \frac{d^n y}{dx^n} &= c_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + c_{n-1} x \frac{dy}{dx} + c_n y \\ &\quad + \sum A_{\varkappa\varkappa_1\ldots\varkappa_n} x^\varkappa y^{\varkappa_1} \ldots \left(x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)^{\varkappa_n} \\ &(\varkappa = 1,\ \varkappa_1 = \cdots = \varkappa_n = 0;\ \varkappa + \varkappa_1 + \cdots + \varkappa_n > 1) \end{aligned} \right.$$

unter der Voraussetzung, dass die Gleichung

$$(2.)\qquad s(s-1)\ldots(s-n+1) = c_1 s(s-1)\ldots(s-n+2)+\cdots+c_{n-1}s+c_n$$

mehrfache Wurzeln besitzt, etwa die e'-fache Wurzel a', ..., die $e^{(r)}$-fache Wurzel $a^{(r)}$. Dann hat die Determinante $\Delta(s)$ des Systems (3.), § 5, durch welches die Differentialgleichung (1.) ersetzt werden kann, die Elementartheiler $(s-a')^{e'}$, ..., $(s-a^{(r)})^{e^{(r)}}$. Die reellen Theile von a', ..., $a^{(m)}$ seien positiv, diejenigen von $a^{(m+1)}$, ..., $a^{(r)}$ negativ oder Null. Zwischen a', ..., $a^{(m)}$ mögen wie in § 7 beliebige Beziehungen bestehen, und es seien die Zahlen ν', ..., $\nu^{(m)}$ wie dort bestimmt. Dann wird die Differentialgleichung (1.) nach § 7 durch eine Reihe

$$(3.)\qquad y_a = \Sigma C_{\lambda,\lambda_{11},\ldots,\lambda_{1e'},\ldots,\lambda_{m1},\ldots,\lambda_{me^{(m)}}} x^{\lambda} t_{11}^{\lambda_{11}}\ldots t_{1e'}^{\lambda_{1e'}}\ldots t_{m1}^{\lambda_{m1}}\ldots t_{me^{(m)}}^{\lambda_{me^{(m)}}},$$

$$t_{i\varrho} = x^{a^{(i)}}(-\log x)^{\nu^{(i)}+\varrho-1} \qquad (i=1,\ldots,m;\ \varrho=1,\ldots,e^{(i)})$$

befriedigt, welche von $e'+\cdots+e^{(m)}$ willkürlichen Constanten abhängt und für hinreichend kleine Werthe von $|x|$, $|t_{11}|$, ... convergirt. Wir setzen

$$(4.)\qquad \begin{cases} \lambda+\sum_{h=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{e^{(h)}}\lambda_{h\sigma}a^{(h)} = a, \\ \sum_{h=1}^{m}\lambda_{h\sigma}(\nu^{(h)}+\sigma-1) = \nu; \end{cases}$$

wir nehmen an, dass sämmtliche Glieder der Reihe (3.) vom Gewicht a und vom Rang ν in ein einziges $C_{a,\nu}x^a(-\log x)^\nu$ zusammengefasst seien, so dass wir eine Reihe

$$(5.)\qquad y = \Sigma C_{a,\nu}x^a(-\log x)^\nu$$

haben, deren Coefficienten direct aus der Differentialgleichung (1.) berechnet werden sollen. Unter Anwendung derselben Bezeichnung wie in § 5 erhalten wir die Recursionsformel ((10.), § 5)

$$(6.)\qquad \Delta(a)C_{a,\nu} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Delta^{(k)}(a)f_k(\nu+k)C_{a,\nu+k}+G_{a,\nu}(C_{\bar{a},\bar{\nu}}\ldots),$$

wobei

$$G_{a,\nu} = \Sigma A_{\varkappa\varkappa_1\ldots\varkappa_n} f_{\bar{\varrho}}(a)f_{\bar{\bar{\varrho}}}(a)\ldots C_{\bar{a},\bar{\nu}}C_{\bar{\bar{a}},\bar{\bar{\nu}}}\ldots$$

gesetzt ist. Eine Abänderung der früheren Rechnung tritt nur für $a=a^{(i)}$ ein. Jetzt ist $a=a^{(i)}$ eine $e^{(i)}$-fache Wurzel der Gleichung $\Delta(a)=0$; man hat also

$$\Delta(a^{(i)})=0,\quad \Delta'(a^{(i)})=0,\quad \ldots,\quad \Delta^{(e^{(i)}-1)}(a_i)=0;\quad \Delta^{(e^{(i)})}(a^{(i)})\neq 0,$$

und die Formel (6.) wird für $a = a^{(i)}$

$$(6'.) \qquad 0 = \sum_{k=e^{(i)}}^{n} (-1)^{k-1} \Delta^{(k)}(a^{(i)}) f_k(\nu+k) C_{a^{(i)},\nu+k} + G_{a^{(i)},\nu};$$

für $\nu \geqq \nu^{(i)}$ wird $G_{a^{(i)},\nu} = 0$ und die Formel gegenstandslos; aus Formel (6'.) für $\nu = 0, 1, \ldots, \nu^{(i)}-1$ berechnet man $C_{a^{(i)},e^{(i)}}, \ldots, C_{a^{(i)},\nu^{(i)}+e^{(i)}-1}$, während die $e^{(i)}$ Grössen

$$C_{a^{(i)},0}, \quad C_{a^{(i)},1}, \quad \ldots, \quad C_{a^{(i)},e^{(i)}-1}$$

willkürlich anzunehmen sind.

Die aus der Differentialgleichung

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = c_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + c_{n-1} x \frac{dy}{dx} + c_n y + \sum A_{\varkappa \varkappa_1 \ldots \varkappa_n} x^{\varkappa} y^{\varkappa_1} \ldots \left(x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)^{\varkappa_n}$$
$$(\varkappa = 1,\ \varkappa_1 = \cdots = \varkappa_n = 0;\ \ \varkappa + \varkappa_1 + \cdots + \varkappa_n > 1)$$

gebildete Gleichung nten Grades

$$s(s-1)\ldots(s-n+1) = c_1 s(s-1)\ldots(s-n+2) + \cdots + c_{n-1} s + c_n$$

habe die $e^{(i)}$-fache Wurzel $a^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, r)$. Zwischen den Grössen $a', \ldots, a^{(m)}$, deren reelle Theile positiv sind, während diejenigen von $a^{(m+1)}, \ldots, a^{(r)}$ negativ oder Null seien, mögen beliebige Beziehungen bestehen, aus welchen die Zahlen $\nu', \ldots, \nu^{(m)}$ wie in § 7 ermittelt seien. Dann wird die Differentialgleichung, wenn man

$$t_{i1} = x^{a^{(i)}}(-\log x)^{\nu^{(i)}}, \quad t_{i2} = x^{a^{(i)}}(-\log x)^{\nu^{(i)}+1}, \quad \ldots, \quad t_{ie^{(i)}} = x^{a^{(i)}}(-\log x)^{\nu^{(i)}+e^{(i)}-1}$$

setzt, durch eine Reihe

$$y = \sum C_{\lambda,\lambda_{11},\ldots,\lambda_{1e'},\ldots,\lambda_{m1},\ldots,\lambda_{me^{(m)}}} x^{\lambda} t_{11}^{\lambda_{11}} \ldots t_{1e'}^{\lambda_{1e'}} \ldots t_{m1}^{\lambda_{m1}} \ldots t_{me^{(m)}}^{\lambda_{me^{(m)}}}$$

befriedigt, welche $e' + \cdots + e^{(m)}$ willkürliche Grössen enthält und für hinreichend kleine Werthe von $|x|, |t_{11}|, \ldots$ convergent ist.

Charlottenburg, 1. August 1895.

Ueber die Reduction algebraischer Systeme auf die kanonische Form.

(Von Herrn *Kurt Hensel*.)

Es sei y eine algebraische Function $n$ter Ordnung von x und $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ihre n conjugirten Werthe; ferner bedeuten

$$Y^{(1)}, \quad Y^{(2)}, \quad \ldots, \quad Y^{(n)}$$

n beliebige rationale Functionen von x und y und es mögen allgemein $Y_1^{(i)}, Y_2^{(i)}, \ldots, Y_n^{(i)}$ die n conjugirten Werthe sein, welche man erhält, wenn man in $Y^{(i)}$ y der Reihe nach durch $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ersetzt.

In einer soeben veröffentlichten Arbeit*) habe ich die algebraischen Systeme

$$(1.) \qquad S = (Y_k^{(i)}) = \begin{pmatrix} Y_1^{(1)}, & Y_1^{(2)}, & \ldots, & Y_1^{(n)} \\ Y_2^{(1)}, & Y_2^{(2)}, & \ldots, & Y_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_n^{(1)}, & Y_n^{(2)}, & \ldots, & Y_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

untersucht und nachgewiesen, dass ihre Elementartheiler $e_1(x), e_2(x), \ldots, e_n(x)$ sämmtlich sog. *Wurzelfunctionen* sind, dass sie nämlich aus Producten von Linearfactoren $(x-a)^\delta$ bestehen, deren Exponenten positive oder negative rationale Brüche sind.

Es sei nun allgemein:

$$d_i(x) = (Y_1^{(i)}, Y_2^{(i)}, \ldots, Y_n^{(i)}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

der grösste gemeinsame Theiler der n zu $Y^{(i)}$ conjugirten algebraischen Functionen, so dass also:

$$(2.) \qquad Y_k^{(i)} = d_i(x).Z_k^{(i)} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

gesetzt werden kann, und die n conjugirten Functionen $(Z_1^{(i)}, Z_2^{(i)}, \ldots, Z_n^{(i)})$

*) Ueber einen neuen Fundamentalsatz in der Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen, dieses Journal Bd. 115, S. 254—294.

ganze algebraische Functionen ohne gemeinsamen Theiler sind, so sind, wie a. a. O. dargelegt wurde, auch diese n Theiler $(d_1(x), \ldots, d_n(x))$ Wurzelfunctionen von x; ersetzt man nun die Elemente des Systemes $(Y_k^{(i)})$ durch ihre in (2.) gegebenen Ausdrücke, so ergiebt sich die Compositionsgleichung:

$$(Y_k^{(i)}) = (Z_k^{(i)})(d_i(x)), \tag{3.}$$

wo

$$(d_i(x)) = \begin{pmatrix} d_1(x), & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & d_2(x), & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, & d_n(x) \end{pmatrix}$$

dasjenige Diagonalsystem bedeutet, dessen Diagonalelemente jene n Theiler $(d_1(x), d_2(x), \ldots, d_n(x))$ sind.

Da somit das zu untersuchende System $(Y_k^{(i)})$ aus dem Diagonalsystem $(d_i(x))$ durch Composition mit dem *ganzen* System $(Z_k^{(i)})$ hervorgeht, mithin ein Vielfaches von jenem System ist, so sind auch nach einem wichtigen Satze der Determinantentheorie*) die Elementartheiler von $(Y_k^{(i)})$ Vielfache der entsprechenden Theiler des Diagonalsystemes $(d_i(x))$.

Von besonderer Wichtigkeit ist nun der Fall, wo sich das System $(Z_k^{(i)})$ auf ein Einheitssystem reducirt, wo also seine Determinante

$$|Z_k^{(i)}|$$

eine von Null verschiedene Constante ist. In diesem Falle ist nämlich auch umgekehrt $(d_i(x))$ ein Vielfaches von $(Y_k^{(i)})$, d. h. das algebraische System $(Y_k^{(i)})$ ist dem Diagonalsysteme $(d_i(x))$ von Wurzelfunctionen äquivalent, und besitzt somit dieselben Elementartheiler, wie dieses. Ein solches System habe ich in der oben erwähnten Arbeit ein *kanonisches* genannt, und habe dort auch schon den wichtigen Satz ausgesprochen, dass jedes algebraische System $(Y_k^{(i)})$ rational in ein äquivalentes kanonisches System transformirt werden kann; jedoch habe ich a. a. O. den Beweis nur für den Fall gegeben, dass man sich auf die Untersuchung einer einzigen Stelle $(x = a)$ beschränkt, dass man also nur die Potenzen des zugehörigen Linearfactors $(x-a)$ betrachtet, welche in den n Elementartheilern enthalten sind. Ich will in dieser Arbeit den vollständigen Beweis dieses Satzes mittheilen, und zu diesem Zwecke aus dem früher gegebenen Beweise die-

*) Ein einfacher Beweis dieses Satzes findet sich in meiner Arbeit im 114. Bande dieses Journals S. 109—115.

jenigen Schlüsse in einer einfacheren und weiter gehenden Fassung recapituliren, welche für das Folgende von Wichtigkeit sind.

Es sei $x = a$ eine beliebige Stelle und

$$(x-a)^{\delta_1}, \quad (x-a)^{\delta_2}, \quad \ldots, \quad (x-a)^{\delta_n}$$

die Potenzen des zu a gehörigen Linearfactors $(x-a)$, welche bezw. in $d_1(x)$, $d_2(x)$, ..., $d_n(x)$ enthalten sind, welche also aus der ersten, zweiten, ..., $n$ten Colonne des Systemes $(Y_k^{(i)})$ durch einfache Division entfernt werden können. Ich denke mir die n Functionen $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$ von vorn herein so geordnet, dass die rationalen Exponenten $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ ihrer Grösse nach auf einander folgen, dass also allgemein $\delta_i \leqq \delta_{i+1}$ ist. Dann ist jede Unterdeterminante einer beliebigen $l$ten Ordnung von $(Y_k^{(i)})$ mindestens durch die Potenz $(x-a)^{\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_l}$ theilbar, weil ja diese oder eine noch höhere Potenz von $(x-a)$ aus ihren Verticalreihen herausgehoben werden kann. Ist also D_l der grösste gemeinsame Theiler aller Unterdeterminanten $l$ter Ordnung und $(x-a)^{\Delta_l}$ die in ihm enthaltene Potenz von $(x-a)$, so ist stets:

$$\Delta_l \geqq \delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_l. \qquad (l = 1, 2, \ldots, n)$$

Ist nun zunächst für einen bestimmten Werth von l $\Delta_l = \delta_1+\cdots+\delta_l$, so ist der aus den l ersten Functionen $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(l)})$ bestehende Theil des Systemes $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$ bereits kanonisch, in Bezug auf die Stelle a, denn dividirt man die l Verticalreihen der zugehörigen Matrix

$$S_l = (Y_k^{(1)}, \ldots, Y_k^{(l)}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

der Reihe nach durch die Potenzen $(x-a)^{\delta_1}, \ldots, (x-a)^{\delta_l}$, so hat die so sich ergebende Matrix

$$\left(\frac{Y_k^{(1)}}{(x-a)^{\delta_1}}, \ldots, \frac{Y_k^{(l)}}{(x-a)^{\delta_l}}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

für die Stelle a den Charakter eines Einheitssystemes, weil ihre Elemente in Bezug auf jene Stelle ganz, und weil ihre Unterdeterminanten der höchsten Ordnung nicht mehr sämmtlich durch eine positive Potenz von $(x-a)$ theilbar sind.

Ist demnach für alle Werthe von l $\Delta_l = \delta_1+\cdots+\delta_l$, so ist das ganze System in Bezug auf die Stelle a kanonisch; soll dies also nicht der Fall sein, so muss für einen jener Exponenten, etwa für Δ_r

$$\Delta_r > \delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_r$$

sein, während für alle früheren $\Delta_l = \delta_1 + \cdots + \delta_l$ ist. Besteht nun diese Ungleichheit für Δ_r, so kann man, wie a. a. O. S. 271—274 gezeigt wurde $r-1$ ganze rationale Functionen $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_{r-1}(x)$ von x so bestimmen, dass die Function

$$\overline{Y}^{(r)} = a_1(x)\,Y^{(1)} + \cdots + a_{r-1}(x)\,Y^{(r-1)} + Y^{(r)}$$

nebst ihren conjugirten $(\overline{Y}_1^{(r)}, \ldots, \overline{Y}_n^{(r)})$ durch eine Potenz $(x-a)^{\overline{\delta}_r}$ theilbar ist, deren Exponent $\overline{\delta}_r$ grösser ist als δ_r. Ersetzt man nun in dem Systeme $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)})$ $Y^{(r)}$ durch $\overline{Y}^{(r)}$, so ist also $\delta_1 + \cdots + \delta_{r-1} + \overline{\delta}_r > \delta_1 + \cdots + \delta_{r-1} + \delta_r$; ist auch für dieses noch $\Delta_r > \delta_i + \cdots + \overline{\delta}_r$, so kann man auf $Y^{(1)}, \ldots, Y^{(r-1)}, \overline{Y}^{(r)}$ genau das vorhin beschriebene Verfahren wieder anwenden und hiermit so lange fortfahren, bis man ein System erhält, dessen r erste Elemente kanonisch sind. Ordnet man dann dieses System wieder nach der Grössenfolge der zugehörigen Exponenten und wendet dasselbe Verfahren auf die so erhaltene Matrix an, so erhält man schliesslich ein äquivalentes System, dessen Elemente in Bezug auf die Stelle a sämmtlich kanonisch sind. Da dasselbe Verfahren offenbar auch auf ein beliebiges System von rational unabhängigen Functionen $Y^{(1)}, \ldots, Y^{(\nu)}$ anwendbar ist, deren Anzahl ν gleich oder kleiner als n ist, so kann das bis jetzt gefundene Resultat folgendermassen ausgesprochen werden:

> Ist $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(\nu)})$ ein beliebiges System von ν rational unabhängigen Functionen von (x, y) und sind $(x-a)^{\varepsilon_1}$, $(x-a)^{\varepsilon_2}$, ..., $(x-a)^{\varepsilon_\nu}$ die Potenzen eines gegebenen Linearfactors, welche in den ν Elementartheilern der zugehörigen Matrix
>
> $$(Y_k^{(i)}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, \nu \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$
>
> enthalten sind, so kann man das System $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(\nu)})$ in ein äquivalentes kanonisches System $(\overline{Y}^{(1)}, \ldots, \overline{Y}^{(\nu)})$ transformiren, dessen Elemente der *R*eihe nach durch jene Elementartheiler $(x-a)^{\varepsilon_1}$, ..., $(x-a)^{\varepsilon_\nu}$ algebraisch theilbar sind.

Es sei nun $(Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots, Y^{(\nu)})$ ein algebraisches System von ν Elementen, welches bereits in Bezug auf eine Anzahl von Stellen

$$a', \quad a'', \quad \ldots, \quad a^{(\varrho)}$$

kanonisch ist, so stelle ich mir jetzt die Aufgabe, dasselbe so umzuformen, dass es ausser für diese noch für eine weitere Stelle $x = a$ kanonisch werde,

für welche es diese Eigenschaft vorher nicht hatte. Diese Transformation kann nun genau auf die vorher angegebene Weise ausgeführt werden, wenn man die folgende einfache Bemerkung hinzunimmt:

Es seien

$$E_1(x) = (x-a')^{\varepsilon'_1}(x-a'')^{\varepsilon''_1}\ldots(x-a^{(\varrho)})^{\varepsilon^{(\varrho)}_1},$$

$$E_\nu(x) = (x-a')^{\varepsilon'_\nu}(x-a'')^{\varepsilon''_\nu}\ldots(x-a^{(\varrho)})^{\varepsilon^{(\varrho)}_\nu}$$

der erste und der letzte (νte) Elementartheiler des Systemes $(Y_k^{(1)}, \ldots, Y_k^{(\nu)})$ in Bezug auf die Stellen $a', \ldots, a^{(\varrho)}$ und $\mathfrak{E}(x)$ irgend eine rationale *ganze* Function von x, welche ein Vielfaches des Quotienten $\frac{E_\nu(x)}{E_1(x)}$ jener beiden Elementartheiler ist und nur an den Stellen a', a'', $\ldots$, $a^{(\varrho)}$ verschwindet. Dann geht das System $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(\nu)})$ in ein äquivalentes und für die Stellen $(a^{(1)}, \ldots, a^{(\varrho)})$ ebenfalls kanonisches System über, wenn man irgend eines seiner Elemente $Y^{(l)}$ durch ein anderes

$$(3.)\quad \bar{Y}^{(l)} = Y^{(l)} + \mathfrak{E}(x)(a_1 Y^{(1)} + \cdots + a_{l-1} Y^{(l-1)} + a_{l+1} Y^{(l+1)} + \cdots + a_\nu Y^{(\nu)})$$

ersetzt, wo $a_1, \ldots, a_{l-1}, a_{l+1}, \ldots, a_\nu$ beliebig gewählte ganze Functionen von x sind. Denn erstens sind die beiden Systeme $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(l)}, \ldots, Y^{(\nu)})$ und $(Y^{(1)}, \ldots, \bar{Y}^{(l)}, \ldots, Y^{(\nu)})$ äquivalent, weil jedes in das andere durch eine umkehrbare Substitution mit ganzen Coefficienten übergeht, und zweitens ist das zweite System kanonisch, wenn es das erste war, weil $\bar{Y}^{(l)}$ genau dieselben gebrochenen Potenzen von $(x-a'), \ldots, (x-a^{(\varrho)})$ enthält wie $Y^{(l)}$. In der That, sind $d_1, d_2, \ldots, d_\nu$ die auf die betrachteten Stellen bezüglichen Theiler von $Y^{(1)}, \ldots, Y^{(\nu)}$, so ist jedes der Producte $\mathfrak{E}(x)Y^{(i)}$ durch d_l theilbar, denn wegen der Bedeutung von $\mathfrak{E}(x)$ ist

$$\frac{\mathfrak{E}(x)Y^{(i)}}{d_l} = \frac{E_\nu(x).d_i(x)}{E_1(x).d_l(x)}G = \frac{E_\nu}{d_l}\cdot\frac{d_i}{E_1}\cdot G,$$

wo G eine ganze Grösse bezeichnet, d. h. jeder einzelne der drei Factoren jenes Productes ist für sich algebraisch ganz, weil jeder Theiler d_l in dem letzten Elementartheiler E_ν enthalten und umgekehrt jeder Theiler d_i durch den ersten Elementartheiler E_1 theilbar ist. Also ist in dem Ausdrucke (3.) von $\bar{Y}^{(l)}$ jeder Summand, mithin auch $\bar{Y}^{(l)}$ selbst durch $d^{(l)}$ theilbar, d. h. die aufgestellte Behauptung ist vollständig bewiesen.

Um nun das für die Stellen $(a', \ldots, a^{(\varrho)})$ kanonische System $(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(\nu)})$ in ein solches zu transformiren, welches auch für eine $(\varrho+1)$-te Stelle a

kanonisch ist, denke ich mir seine Elemente wieder von vorn herein so geordnet, dass die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\nu$ der in $Y^{(1)}, \ldots, Y^{(\nu)}$ enthaltenen Potenzen von $(x-a)$ ihrer Grösse nach auf einander folgen. Ist dann wieder r der niedrigste Index, für welchen

$$\Delta_r > \delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_r,$$

für welchen also alle Determinanten höchster Ordnung der aus den Elementen

$$\left(\frac{Y_k^{(1)}}{(x-a)^{\delta_1}}, \ldots, \frac{Y_k^{(r)}}{(x-a)^{\delta_r}}\right)$$

gebildeten Matrix für $x=a$ sämmtlich verschwinden, so gilt genau dasselbe von der Matrix:

$$\left(\mathfrak{E}(x)\cdot\frac{Y_k^{(1)}}{(x-a)^{\delta_1}}, \ldots, \mathfrak{E}(x)\cdot\frac{Y_k^{(r-1)}}{(x-a)^{\delta_{r-1}}}, \frac{Y_k^{(r)}}{(x-a)^{\delta_r}}\right),$$

denn ihre Determinanten $r$ter Ordnung unterscheiden sich von den entsprechenden der vorigen Matrix nur um den für $x=a$ nicht verschwindenden Factor $(\mathfrak{E}(x))^{r-1}$. Nach dem im Anfange dieser Arbeit bewiesenen Satze kann man also auch für diese zweite Matrix $r-1$ ganze Functionen $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}$ so finden, dass die Functionen:

$$\bar{Y}^{(r)} = Y^{(r)}+\mathfrak{E}(x).(a_1 Y^{(1)}+\cdots+a_{r-1}Y^{(r-1)})$$

durch eine höhere Potenz von $(x-a)$ als die δ_r-te theilbar ist, und nach der oben gemachten Bemerkung enthält $\bar{Y}^{(r)}$ genau dieselben gebrochenen Potenzen von $(x-a'), \ldots, (x-a^{(\varrho)})$ wie $Y^{(r)}$. Das neue System $(Y^{(1)}, \ldots, \bar{Y}^{(r)}, \ldots, Y^{(\nu)})$ ist also in Bezug auf die ϱ ersten Stellen $(a', \ldots, a^{(\varrho)})$ ebenfalls kanonisch, enthält aber den Linearfactor $(x-a)$ öfter als das ursprüngliche System; man gelangt daher durch Fortsetzung desselben Verfahrens zuletzt zu einem auch in Bezug auf die Stelle a kanonischen Systeme. Formt man also das System in der hier dargelegten Weise in Bezug auf alle Stellen um, für welche es noch nicht kanonisch ist, und beachtet dabei, dass die Anzahl aller jener Stellen offenbar endlich ist, so erhält man zuletzt ein für jede Stelle kanonisches System.

Ist also $(Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots, Y^{(n)})$ ein beliebiges unabhängiges System algebraischer Functionen, welche einem beliebigen Körper $n$ter Ordnung angehören, so kann man dasselbe durch eine umkehrbare Substitution

$$Y^{(i)} = \Sigma a_{ik}(x)\bar{Y}^{(k)}$$

mit ganzen Coefficienten in ein kanonisches System $(\bar{Y}^{(1)}, \ldots, \bar{Y}^{(n)})$ trans-

formiren. Sind dann $\bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_n$ die grössten in den algebraischen Functionen jenes Systemes enthaltenen Wurzelfunctionen, so kann aus den Colonnen der zugehörigen Determinante $|Y^{(i)}|$ das Product $d_1 . d_2 \ldots d_n$ durch einfache Division herausgehoben werden, und die übrigbleibende Determinante $\left| \frac{Y_k^{(i)}}{d_i(x)} \right|$ reducirt sich auf eine von Null verschiedene Constante.

Besonders einfach gestaltet sich die hier für beliebige ganze oder gebrochene Systeme durchgeführte Untersuchung in dem wichtigen speciellen Falle, dass das vorgelegte System das folgende ist

$$(1, y, y^2, \ldots, y^{n-1})$$

und y eine beliebige *ganze* algebraische Function von x bedeutet. Hier gilt nämlich der folgende allgemeine Satz:

Sind $E_0(x), E_1(x), \ldots, E_{n-1}(x)$ die n Elementartheiler des ganzen algebraischen Systemes

$$(1, y_i, y_i^2, \ldots, y_i^{n-1}), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

so kann man stets n ganze Functionen von y

$$(4.) \quad \begin{cases} f_0 &= 1, \\ f_1 &= a_{10} + y, \\ f_2 &= a_{20} + a_{21} y + y^2, \\ \vdots & \\ f_{n-1} &= a_{n-1,0} + a_{n-1,1} y + a_{n-1,2} y^2 + \cdots + y^{n-1} \end{cases}$$

mit ganzen Functionen von x als Coefficienten so bestimmen, dass $f_0(y), f_1(y), \ldots, f_{n-1}(y)$ der Reihe nach durch die Elementartheiler $E_0(x), E_1(x), \ldots, E_{n-1}(x)$ algebraisch theilbar sind, und dass sich also die Determinante des ganzen algebraischen Systemes

$$\left(\frac{f_0(y_i)}{E_0}, \frac{f_1(y_i)}{E_1}, \ldots, \frac{f_{n-1}(y_i)}{E_{n-1}} \right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

auf eine von Null verschiedene Constante reducirt.

Die Richtigkeit dieses Satzes für die erste Function $f_0(y) = 1$ ist evident, weil offenbar auch der erste Elementartheiler des Systemes $(1, y_i, \ldots, y_i^{n-1})$ d. h. der grösste gemeinsame Theiler aller seiner n^2 Elemente offenbar gleich Eins ist. Um ihn daher allgemein zu beweisen, nehme ich an, die r ersten Functionen $f_0, f_1, \ldots, f_{r-1}$ seien bereits in der verlangten Weise so bestimmt, dass sie bezw. durch $E_0, E_1, \ldots, E_{r-1}$ theil-

bar sind, und zeige, dass und wie man dann f_r gleichfalls finden kann. Wählt man nun für die $n-r$ letzten Functionen der Reihe nach

$$yf_{r-1}, \quad y^2f_{r-1}, \quad \ldots, \quad y^{n-r}f_{r-1},$$

so sind diese ebenfalls von der in (4.) angegebenen Gestalt, jede von ihnen ist mindestens durch E_{r-1}, und ist auch durch die vorhergehende theilbar. Also sind in diesem Systeme

$$f_0, \quad \ldots, \quad f_{r-1}, \quad yf_{r-1}, \quad \ldots, \quad y^{n-r}f_{r-1}$$

die in ihnen enthaltenen Theiler für jeden Linearfactor $(x-a)$ nach der Grösse ihrer Exponenten geordnet, und man kann daher auf dem oben angegebenen Wege eine Function

$$f_r = yf_{r-1}+b_1f_{r-1}+b_2f_{r-2}+\cdots+b_rf_0$$

so bestimmen, dass das System $(f_0, f_1, \ldots, f_{r-1}, f_r)$ ein kanonisches ist, und zwar ist die in f_r enthaltene Wurzelfunction sicher ein Vielfaches des Theilers von f_{r-1}. Fährt man nun in derselben Weise fort, so gelangt man zuletzt zu einem kanonischen System $(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$ der oben angegebenen Art, von deren Theilern $E_0, E_1, \ldots, E_{n-1}$ jeder ein Vielfaches des vorhergehenden ist; jene Theiler sind daher in der That die Elementartheiler des Systemes $(f_i(y_k))$ oder des mit ihm äquivalenten Systemes $(1, y_i, y_i^2, \ldots, y_i^{n-1})$ und damit ist dieser Satz vollständig bewiesen. (Vgl. auch die Arbeit des Herrn *K. Fischer* in diesem Bande des Journals).

Das so gefundene System von algebraischen Functionen eines Gattungsbereiches ist von fundamentaler Bedeutung für alle Fragen in der Theorie der algebraischen Curven und algebraischen Functionen, denn mit seiner Hülfe kann die Untersuchung der Singularitäten aller Curven jener Klasse, sowohl die der Doppelpunkte als die der Verzweigungspunkte ohne jede weitere Ueberlegung allein auf die trivialen Singularitäten jener n Wurzelfunctionen $E_0(x)$, $E_1(x)$, $\ldots$, $E_n(x)$ reducirt werden. Aus ihnen kann man ferner unmittelbar ein Fundamentalsystem für den Gattungsbereich oder Körper der rationalen Functionen von x und y finden. Ist nämlich allgemein $[E(x)]$ die grösste *rationale* Function von x, welche in der Wurzelfunction $E(x)$ enthalten ist, so bilden die n Functionen

$$\frac{f_0}{[E_0]}, \quad \frac{f_1}{[E_1]}, \quad \ldots, \quad \frac{f_{n-1}}{[E_{n-1}]}$$

ein Fundamentalsystem für jenen Bereich und zwar ein kanonisches Fundamentalsystem, denn dasselbe ist ein kanonisches System ganzer algebraischer

Functionen des Bereiches, dessen Elementartheiler mit denen des Diagonalsystemes $\left(\frac{E_i}{[E_i]}\right)$ zusammenfallen, also reducirte Wurzelfunctionen in dem Sinne meiner Arbeit im 115. Bande dieses Journals sind. (Vgl. a. a. O. S. 256.)

Die Elementartheiler $E_0, E_1, \ldots, E_{n-1}$ des Systemes $(1, y_i, \ldots, y_i^{n-1})$ können noch in einer anderen Weise definirt und hieraus eine interessante Eigenschaft derselben abgeleitet werden. Ist nämlich

$$\bar{f}_r(y) = y^r + b_1 y^{r-1} + \cdots + b_r$$

irgend eine ganze Function $r$ten Grades von y mit ganzen *oder gebrochenen* Coefficienten $b_1, \ldots, b_r$ und ist $\overline{E}_r(x)$ der grösste gemeinsame Theiler der n conjugirten Functionen $(\bar{f}_r(y_1), \bar{f}_r(y_2), \ldots, \bar{f}_r(y_n))$ also mit anderen Worten die grösste in $f_r(y)$ enthaltene Wurzelfunction, so ist $\overline{E}_r(x)$ nothwendig ein Divisor des Elementartheilers $E_r(x)$. Vergleicht man nämlich die beiden Systeme von gleicher Determinante

$(f_0(y_i), \ldots, f_{r-1}(y_i), \bar{f}_r(y_i), \ldots, f_{n-1}(y_i))$ und $(f_0(y_i), \ldots, f_r(y_i), \ldots, f_{n-1}(y_i))$,

so tritt aus den Colonnen der ersten der Factor $E_0 \ldots \overline{E}_r \ldots E_{n-1}$, aus denen der zweiten $E_0 \ldots E_r \ldots E_{n-1}$ heraus und die Determinante des zweiten Systemes ist jenem zweiten Producte genau gleich. Setzt man also die Determinanten beider Systeme einander gleich, so ergiebt sich:

$$E_0 \ldots \overline{E}_r \ldots E_{n-1} . G = E_0 \ldots E_r \ldots E_{n-1},$$

also

$$\frac{E_r}{\overline{E}_r} = G,$$

wo G eine ganze algebraische Function bedeutet. Da nun E_r selbst die grösste in der Function $f_r(y)$ enthaltene Wurzelfunction ist, so kann dieses Resultat auch so ausgesprochen werden:

> Der Elementartheiler $E_r(x)$ des Systemes $(1, y_i, \ldots, y_i^{n-1})$ ist das kleinste gemeinsame Vielfache derjenigen Wurzelfunctionen, welche in allen Functionen $r$ten Grades
>
> $$y^r + b_1(x) y^{r-1} + \cdots + b_r(x)$$
>
> mit ganzen oder gebrochenen Coefficienten enthalten sind.

Aus dieser Eigenschaft der Functionen $E_r(x)$ folgt nun unmittelbar der folgende merkwürdige Satz:

Sind E_h und E_k irgend welche Elementartheiler des Systemes $(1, y, \ldots, y^{n-1})$, so ist der Elementartheiler E_{h+k} stets durch das Product $E_h . E_k$ theilbar.

Oder allgemeiner:

Jeder Quotient

$$\frac{E_{h+k+\cdots+l}}{E_h . E_k \ldots E_l}$$

ist stets algebraisch ganz, also der Zähler ist durch den Nenner theilbar.

Ist zunächst $h+k+\cdots+l \geqq n$, so ist der Satz selbstverständlich richtig, weil die auf E_{n-1} folgenden Elementartheiler des Systemes $n$ter Ordnung sämmtlich gleich Null sind. Um die Richtigkeit desselben Satzes für $h+k+\cdots+l < n$ einzusehen, braucht man nur das Product:

$$f_h(y) f_k(y) \ldots f_l(y)$$

zu bilden, denn dieses ist eine ganze Function des Grades $(h+k+\cdots+l)$ von y, in welcher der Coefficient der höchsten Potenz von y gleich Eins ist, und welche mindestens durch das Product $E_h(x) . E_k(x) \ldots E_l(x)$ theilbar ist; hieraus folgt nämlich sofort, dass der Theiler $E_{h+k+\cdots+l}(x)$ ein Vielfaches jenes Productes sein muss.

In seiner schönen Abhandlung „über die Discriminante algebraischer Functionen einer Variablen“ (dieses Journal Bd. 91 S. 301—334, *L. Kroneckers* gesammelte Werke Bd. II S. 193—236) hat *Kronecker* eine Anzahl von Resultaten hergeleitet, von denen die hier bewiesenen Sätze eine wesentliche Verallgemeinerung sind. *Kronecker* kennt und betrachtet nur die algebraische Theilbarkeit einer algebraischen Function $f(y, x)$ durch eine *rationale* ganze Function $N(x)$ von x allein, aber nicht ihre Theilbarkeit durch eine *Wurzelfunction* von x, und der Zielpunkt seiner Untersuchungen ist die Aufstellung eines Systemes $F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$ von ganzen Functionen vom 0ten, 1ten, ..., $(n-1)$-ten Grade, für welche jene *rationalen* Theiler von möglichst hohem Grade in x sind. Auf diese Weise kann er also nicht die Elementartheiler $E_i(x)$ des Systemes $(1, y_i, \ldots, y_i^{n-1})$ selbst, sondern nur die in ihnen enthaltenen grössten rationalen Theiler $[E_i(x)]$ erhalten, denn zur Lösung dieser weiter gehenden Aufgabe braucht man eben jene Erweiterung des Begriffes der Theilbarkeit, die in meiner vorigen Arbeit entwickelt worden ist. Ebenso stimmen auch die von ihm gefundenen Functionen $F_i(y)$ mit den hier auf-

gestellten $f_i(y)$ nicht überein, sondern sind unter ihnen enthalten, denn die letzteren sind nicht nur durch die rationalen Functionen $[E_i(x)]$, sondern durch die Wurzelfunction $E_i(x)$, also durch Vielfache von jenen theilbar; ausserdem beweist er nur die *Existenz* der von ihm benutzten Functionen, ohne aber ein Verfahren zu ihrer Herleitung anzugeben.

Dadurch dass *Kronecker* die Elemente seines Systemes $(F_0, F_1, \ldots, F_{n-1})$ durch die in ihnen enthaltenen rationalen Functionen $[E_0]$, $[E_1]$, $\ldots$, $[E_{n-1}]$ dividirt, gelangt er zu einem reducirten System $\left(\frac{F_0}{[E_0]}, \frac{F_1}{[E_1]}, \ldots, \frac{F_{n-1}}{[E_{n-1}]}\right)$, welches ein Fundamentalsystem für den Bereich $\mathfrak{G}(x, y)$, dessen Discriminante also die Gattungsdiscriminante von $\mathfrak{G}(x, y)$ ist, und hierdurch gelingt es ihm zwar, die Untersuchung der Doppelpunkte von der der Verzweigungspunkte der zugehörigen *Riemann*schen Fläche zu trennen, aber er erledigt nicht die Frage nach jenen Verzweigungspunkten selbst, denn diese fällt eben mit derjenigen nach den Elementartheilern $\frac{E_i(x)}{[E_i(x)]}$ der Gattungsdiscriminante zusammen*), welche bei der *Kronecker*schen Auffassung überhaupt garnicht aufgeworfen werden konnte.

Berlin, den 12. November 1895.

---

*) Vgl. meine Arbeit „Ueber die Ordnungen der Verzweigungspunkte einer *Riemann*schen Fläche". Sitzungsberichte der Berliner Akademie v. J. 1895 S. 933—943.

Ueber das Fundamentalsystem und die Discriminante der Gattungen algebraischer Zahlen, welche aus Wurzelgrössen gebildet sind.

(Von Herrn *Georg Landsberg* in Heidelberg.)

In der Theorie der Gattungen algebraischer Zahlen steht an vorderster Stelle die Bestimmung des Fundamentalsystemes und der Discriminante. Während aber im allgemeinen Falle die Lösung dieser Aufgabe eine grosse Anzahl complicirter und schwer durchführbarer Operationen erfordert, so lassen sich bei denjenigen Gattungen, welche aus *reinen* Gleichungen hervorgehen, die Kriterien des Fundamentalsystemes in eine sehr einfache und durchsichtige Form setzen. Diesen Fall behandeln wir im Folgenden; die Untersuchung dürfte auch darum einiges Interesse bieten, weil die Abweichung, welche die Theorie der algebraischen Zahlen gegenüber der in dieser Hinsicht einfacheren Theorie der algebraischen Functionen zeigt, hier besonders deutlich zum Ausdruck kommt.

Vorausgeschickt werde die folgende Bemerkung. Wenn in einer ganzzahligen algebraischen Gleichung:

$$(1.) \qquad F(x) = x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} \cdots \pm c_n = 0,$$

deren Wurzeln die ganzen algebraischen Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sein mögen, die Coefficienten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ nicht ***sämmtlich*** durch eine reelle Primzahl p theilbar sind, so haben die $n+1$ Zahlen:

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, p)$$

keinen gemeinsamen Theiler, weder einen wirklichen noch einen idealen. Denn ist c_h nicht durch p theilbar, so kann man zwei ganze Zahlen r und s so bestimmen, dass

$$1 = rp + sc_h = rp + s(\xi_1\xi_2\ldots\xi_h + \xi_1\xi_2\ldots\xi_{h-1}\xi_{h+1} + \cdots)$$

ist, und es lässt sich also die Eins und folglich jede ganze algebraische

Zahl linear und homogen durch p, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ mit ganzen algebraischen Zahlcoefficienten darstellen*).

Wenn aber $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sämmtlich durch die Primzahl p theilbar sind, so haben $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ mit einer beliebig hohen Potenz von p einen Theiler gemein, welcher einer Potenz von p mit *gebrochenem* Exponenten äquivalent ist**). Bildet man nämlich die Gleichung, welcher die n Zahlen $\frac{\xi_h}{p^\delta}$ genügen:

$$(2.) \qquad x^n - \frac{c_1}{p^\delta} x^{n-1} + \frac{c_2}{p^{2\delta}} x^{n-2} - \cdots \pm \frac{c_n}{p^{n\delta}} = 0,$$

so sind ihre Wurzeln dann und nur dann ganze algebraische Zahlen, wenn die Coefficienten $\frac{c_r}{p^{r\delta}}$ ganze Zahlen sind. Erscheint also die Primzahl p in den Primzahlzerlegungen der Coefficienten

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_n$$

resp. mit den Exponenten

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n$$

behaftet und wählt man δ gleich der kleinsten der Zahlen

$$\frac{\alpha_1}{1}, \quad \frac{\alpha_2}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha_n}{n},$$

so ist jede der Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ durch p^δ theilbar, und wenn $\delta = \frac{\alpha_h}{h}$ ist, so ist $\frac{c_h}{p^{h\delta}}$ eine ganze rationale Zahl, welche nicht mehr durch p theilbar ist. Also giebt es, analog wie vorher, zwei ganze Zahlen r und s, so dass

$$1 = rp + s\frac{c_h}{p^{h\delta}} = rp + s\left(\frac{\xi_1}{p^\delta}\frac{\xi_2}{p^\delta}\cdots\frac{\xi_h}{p^\delta} + \cdots\right)$$

ist, woraus hervorgeht, dass die ganzen Zahlen $\frac{\xi_1}{p^\delta}, \frac{\xi_2}{p^\delta}, \ldots, \frac{\xi_n}{p^\delta}$ und die Primzahl p keinen gemeinsamen Theiler mehr haben. Die so ermittelte gebrochene Potenz von p kann passend als *„der grösste gemeinschaftliche*

*) Vgl. für diese Begriffsbestimmung eines Systemes von Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler ***Dirichlet-Dedekind,*** Zahlentheorie, 4. Aufl. § 174.

) Die Theilbarkeit durch gebrochene Potenzen eines Primfactors wurde in der Theorie der algebraischen Functionen zur Grundlage der Untersuchung gemacht durch Herrn ***Hensel*; s. insbesondere dessen Arbeit: Ueber einen neuen Fundamentalsatz in der Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen. Dieses Journal Bd. 115, S. 254.

Theiler von n conjugirten Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *nach dem Modul p*" bezeichnet und soll

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)_p = p^\delta$$

geschrieben werden. Dann stützen wir uns im Folgenden auf den Hülfssatz:

Wenn der grösste gemeinschaftliche Theiler von $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *nach dem Modul p gleich* p^δ *ist, so ist für jede ganze Zahl r der grösste gemeinschaftliche Theiler von* $\xi_1^r, \xi_2^r, \ldots, \xi_n^r$ *nach dem Modul p gleich* $p^{r\delta}$. *Es ist also:*

$$(\xi_1^r, \xi_2^r, \ldots, \xi_n^r)_p = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)_p^r.$$

Zum Beweise bilde man die Gleichung, welcher die n Grössen $\xi_1^r, \xi_2^r, \ldots, \xi_n^r$ genügen:

$$G(x) = x^n - d_1 x^{n-1} + d_2 x^{n-2} - \cdots \pm d_n = 0. \tag{3.}$$

Nun ist:

$$F(x) = (x-\xi_1)\ldots(x-\xi_n), \quad G(x) = (x-\xi_1^r)\ldots(x-\xi_n^r);$$

bezeichnet man also mit ω eine primitive $r$te Einheitswurzel, so ist:

$$(-1)^{n(r-1)} G(x^r) = F(x)F(\omega x)F(\omega^2 x)\ldots F(\omega^{r-1} x). \tag{4.}$$

Setzt man in dieser identischen Gleichung $x = p^\delta x'$, so wird jeder einzelne der r Factoren $F(\omega^\varrho x)$ durch $p^{n\delta}$, die rechte Seite der Gleichung also durch $p^{rn\delta}$ theilbar. Folglich ist auch $G(p^{r\delta} x'^r)$ durch $p^{rn\delta}$ theilbar, und da

$$G(p^{r\delta} x'^r) = p^{nr\delta} x'^{nr} - d_1 p^{(n-1)r\delta} x'^{(n-1)r} + d_2 p^{(n-2)r\delta} x'^{(n-2)r} - \cdots \pm d_n$$

ist, so muss d_ν durch $p^{\nu r\delta}$ theilbar sein, also ist in der That jede der Zahlen $\xi_1^r, \xi_2^r, \ldots, \xi_n^r$ durch $p^{r\delta}$ theilbar. Aus der Identität (4.) folgt aber auch, dass $p^{r\delta}$ die ***höchste*** Potenz von p ist, welche in allen Zahlen $\xi_1^r, \xi_2^r, \ldots, \xi_n^r$ enthalten ist. Es sei nämlich h der *grösste* Index, für welchen $\delta = \frac{a_h}{h}$ ist, so dass also c_{h+i} für jedes i aus der Reihe 1, 2, …, $n-h$ durch eine höhere Potenz von p als $p^{(h+i)\delta}$ theilbar ist. Führt man nun auf der rechten Seite der Gleichung (4.) die Multiplication aus, so findet man:

$$d_h = c_h^r + \Sigma A c_{g_1} c_{g_2} \ldots c_{g_r},$$

worin A ein ganzer Zahlcoefficient, $g_1, g_2, \ldots, g_r$ aber irgend welche Indices der Reihe 0, 1, 2, …, n sind, welche für jedes einzelne Glied der Summe der Bedingung

$$g_1 + g_2 + \cdots + g_r = rh$$

genügen müssen. Hieraus folgt, dass wenigstens einer der Indices $g_1, g_2, \ldots, g_r$ grösser als h, und dass folglich jedes einzelne der in der Summe enthaltenen

Glieder durch eine höhere Potenz von p als $p^{rh\delta}$ theilbar ist, während das Glied c_h^r die Potenz $p^{rh\delta}$ und keine höhere Potenz von p enthält. Es ist also in der That d_h *genau* durch $p^{rh\delta}$ theilbar, w. z. b. w.

Wenden wir uns jetzt zur Bestimmung des Fundamentalsystemes und der Discriminante der durch die irreductible binomische Gleichung

$$x^\lambda - a = 0 \tag{5.}$$

charakterisirten Gattung, so beschränken wir uns auf den Fall, auf welchen sich die anderen ohne Schwierigkeit zurückführen lassen, dass λ, die Ordnung der Gattung, eine Primzahl ist. Ist nun ω eine Wurzel der Gleichung (5.), so können wir zunächst aus jeder Potenz von ω die grösste ganze *rationale* Zahl, welche in ihr als Factor enthalten ist, herausheben*). Bezeichnen wir also die grösste rationale in ω^r enthaltene ganze Zahl mit $[\omega^r]$, so bilden wir die Reihe der Zahlen:

$$\xi_0 = 1, \quad \xi_1 = \frac{\omega}{[\omega]}, \quad \xi_2 = \frac{\omega^2}{[\omega^2]}, \quad \ldots, \quad \xi_{\lambda-1} = \frac{\omega^{\lambda-1}}{[\omega^{\lambda-1}]}. \tag{6.}$$

Hiernach dürfen wir offenbar ω von vornherein von allen denjenigen Primzahlen befreit denken, für welche der zugehörige Potenzexponent durch λ theilbar ist. Um nun zu entscheiden, ob diese Zahlen ein Fundamentalsystem bilden, berechnen wir zunächst ihre Discriminante $\Delta(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{\lambda-1})$, d. i. das Quadrat der von den Grössen ξ und ihren Conjugirten gebildeten Determinante:

$$\left| 1, \quad \alpha^g \frac{\omega}{[\omega]}, \quad \alpha^{2g} \frac{\omega^2}{[\omega^2]}, \quad \ldots, \quad \alpha^{(\lambda-1)g} \frac{\omega^{\lambda-1}}{[\omega^{\lambda-1}]} \right|, \quad (g = 0, 1, 2, \ldots, \lambda-1)$$

worin α eine primitive λte Einheitswurzel bedeutet. Nun ist bekanntlich

$$|1, \quad \alpha^g, \quad \alpha^{2g}, \quad \ldots, \quad \alpha^{(\lambda-1)g}|^2 = (-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-1)(\lambda-2)} \lambda^\lambda, \quad (g = 0, 1, 2, \ldots, \lambda-1)$$

und wenn eine Primzahl p in a in der $r$ten Potenz enthalten ist, so ist sie in dem Producte

$$\frac{\omega}{[\omega]} \cdot \frac{\omega^2}{[\omega^2]} \cdots \frac{\omega^{\lambda-1}}{[\omega^{\lambda-1}]}$$

in der Potenz p^ϱ enthalten, worin

$$\varrho = \tfrac{1}{2} r(\lambda-1) - E\left(\frac{r}{\lambda}\right) - E\left(\frac{2r}{\lambda}\right) - \cdots - E\left(\frac{(\lambda-1)r}{\lambda}\right)$$

*) In der analogen Aufgabe der Theorie der algebraischen Functionen ist mit der Reduction auf das System (6.) die Bestimmung des Fundamentalsystems vollendet, während hier eine weitere Reduction nothwendig werden kann. Vgl. die oben citirte Arbeit des Herrn *Hensel*.

ist. Da aber r zu λ relativ prim ist, so ist

$$E\left(\frac{hr}{\lambda}\right)+E\left(\frac{(\lambda-h)r}{\lambda}\right) = r-1,$$

folglich ist

$$2\varrho = r(\lambda-1)-(r-1)(\lambda-1) = \lambda-1$$

von r ganz unabhängig, und man erhält hiernach:

(7.) $$\Delta(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{\lambda-1}) = (-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-1)(\lambda-2)}(\mathrm{sgn}.a)^{\lambda-1}\lambda^{\lambda}\Pi p^{\lambda-1},$$

worin das Product über alle in a enthaltenen Primzahlen p zu erstrecken ist. Vorausgesetzt nun, dass die Zahlen $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{\lambda-1}$ kein Fundamentalsystem der Gattung bilden, so handelt es sich darum, alle diejenigen Primzahlen q zu finden, für welche die λ conjugirten Congruenzen:

(8.) $$u_0\xi_0+u_1\alpha^g\xi_1+u_2\alpha^{2g}\xi_2+\cdots+u_{\lambda-1}\alpha^{(\lambda-1)g}\xi_{\lambda-1} \equiv 0 \pmod{q} \quad (g = 0, 1, \ldots, \lambda-1)$$

durch ganze rationale Zahlen u befriedigt werden können, welche nicht sämmtlich durch q theilbar sind. Eine derartige Primzahl q muss offenbar in der Discriminante $\Delta(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{\lambda-1})$ enthalten sein; es sind also nur die in a aufgehenden Primzahlen p und die Primzahl λ zu untersuchen.

Ist nun p zunächst eine in a enthaltene und von λ verschiedene Primzahl, so folgt aus den Congruenzen (8.), wenn man sie mit α^{-gh} multiplicirt und über g von 0 bis $\lambda-1$ summirt, dass auch $\lambda u_h\xi_h$ durch p theilbar sein muss. Die n Congruenzen

$$\lambda u_0\xi_0 \equiv 0, \quad \lambda u_1\xi_1 \equiv 0, \quad \lambda u_2\xi_2 \equiv 0, \quad \ldots, \quad \lambda u_{\lambda-1}\xi_{\lambda-1} \equiv 0 \pmod{p}$$

können aber, da die Grössen ξ_h nur noch durch *echt* gebrochene Potenzen von p theilbar sind, durch ganze rationale Zahlen allein in der Weise befriedigt werden, dass die u_h sämmtlich durch p theilbar sind; folglich bilden die ξ_h bereits rücksichtlich dieser Primzahlen p ein Fundamentalsystem, und die Gattungsdiscriminante enthält dieselben Primzahlen in gleich hoher Potenz wie die Discriminante Δ.

Die Primzahl λ erfordert aber andere Hülfsmittel der Untersuchung. Ist *erstens* a durch λ theilbar, so beweist man leicht, dass dann die Zahlen ξ auch rücksichtlich der Primzahl λ ein Fundamentalsystem bilden. Enthält nämlich a λ in der $r$ten Potenz und bestimmt man s durch die Congruenz $rs \equiv 1 \pmod{\lambda}$, so enthalten die Zahlen:

$$\xi_0, \quad \xi_s, \quad \xi_{2s}, \quad \ldots, \quad \xi_{(\lambda-1)s},$$

(wobei die Indices nur mod.λ in Betracht kommen), die Primzahl λ resp.

in den Potenzen:

$$\lambda^0, \quad \lambda^{\frac{1}{\lambda}}, \quad \lambda^{\frac{2}{\lambda}}, \quad \ldots, \quad \lambda^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}.$$

Um also die Congruenz:

$$u_0\xi_0+u_s\xi_s+u_{2s}\xi_{2s}+\cdots+u_{(\lambda-1)s}\xi_{(\lambda-1)s} \equiv 0 \pmod{\lambda}$$

zu befriedigen, müssen successive $u_0, u_s, u_{2s}, \ldots, u_{(\lambda-1)s}$ durch λ theilbar gemacht werden, woraus die Behauptung folgt.

Wenn aber *zweitens* a zu λ relativ prim ist, so kann die zu untersuchende Congruenz:

$$u_0\xi_0+u_1\xi_1+u_2\xi_2+\cdots+u_{\lambda-1}\xi_{\lambda-1} \equiv 0 \pmod{\lambda}$$

durch die äquivalente Congruenz:

$$u_0.1+u_1\omega+u_2\omega^2+\cdots+u_{\lambda-1}\omega^{\lambda-1} \equiv 0 \pmod{\lambda}$$

ersetzt werden, weil die fortgelassenen Nenner zu λ relativ prim sind, beide Congruenzen also gleichzeitig durch rationale Zahlen $u_0, u_1, \ldots, u_{\lambda-1}$ befriedigt werden können. Die letztere Congruenz ist aber wiederum, wie man unmittelbar sieht, völlig äquivalent der Congruenz:

$$(9.) \quad u_0.1+u_1(\omega-a)+u_2(\omega-a)^2+\cdots+u_{\lambda-1}(\omega-a)^{\lambda-1} \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

welche wir des näheren zu untersuchen haben. Bilden wir nun die Gleichung, welcher die Zahl $v=\omega-a$ genügt, so lautet dieselbe:

$$(v+a)^\lambda-a = v^\lambda+\frac{\lambda}{1}av^{\lambda-1}+\frac{\lambda.\lambda-1}{1.2}a^2v^{\lambda-2}+\cdots+\frac{\lambda}{1}a^{\lambda-1}v+(a^\lambda-a)=0.$$

Da in dieser Gleichung alle Coefficienten durch λ theilbar sind, so haben nach den früheren Bemerkungen die λ conjugirten Grössen $v_1, v_2, \ldots, v_\lambda$ einen gemeinschaftlichen Theiler nach dem Modul λ, und wenn man die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\lambda$ bestimmt, mit welchen die Primzahl λ in den Coefficienten der Gleichung erscheint, so findet man:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{\lambda-1} = 1, \quad \alpha_\lambda \gtreqless 1,$$

und zwar gilt für α_λ das obere oder das untere Zeichen, je nachdem $a^\lambda-a$ bloss durch λ oder auch durch λ^2 theilbar ist. Folglich ist

$$\frac{\alpha_1}{1}=1, \quad \frac{\alpha_2}{2}=\frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha_{\lambda-1}}{\lambda-1}=\frac{1}{\lambda-1}, \quad \frac{\alpha_\lambda}{\lambda} \gtreqless \frac{1}{\lambda},$$

und die kleinste dieser Zahlen ist also im Falle des Gleichheitszeichens $\frac{1}{\lambda}$, im Falle des Ungleichheitszeichens $\frac{1}{\lambda-1}$. Je nachdem also $a^\lambda-a$ bloss

durch λ oder durch λ^2 theilbar ist, ist

$$(v_1, v_2, \ldots, v_\lambda)_\lambda = \lambda^{\frac{1}{\lambda}} \quad \text{oder} \quad = \lambda^{\frac{1}{\lambda-1}},$$

und nach dem am Anfange bewiesenen Hülfssatze ist, diesen beiden Fällen entsprechend

$$(v_1^r, v_2^r, \ldots, v_\lambda^r)_\lambda = \lambda^{\frac{r}{\lambda}} \quad \text{oder} \quad = \lambda^{\frac{r}{\lambda-1}}.$$

In dem ersten Falle, wenn $\frac{a^\lambda - a}{\lambda}$ zu λ relativ prim ist, schliesst man jetzt, ganz wie vorher, dass die Zahlen

$$(10.) \qquad 1, \quad \omega - a, \quad (\omega-a)^2, \quad \ldots, \quad (\omega-a)^{\lambda-1}$$

ein Fundamentalsystem für den Modul λ, also $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{\lambda-1}$ ein absolutes Fundamentalsystem bilden. Ist aber $a^\lambda - a$ durch λ^2 theilbar, so ist $(\omega-a)^{\lambda-1}$ durch λ theilbar, daher wird das System (10.) reducirbar und an seine Stelle muss das System treten

$$(11.) \quad 1, \quad \omega - a, \quad (\omega-a)^2, \quad \ldots, \quad (\omega-a)^{\lambda-2}, \quad \frac{(\omega-a)^{\lambda-1}}{\lambda},$$

dessen Discriminante

$$\left| 1, \quad v_h, \quad v_h^2, \quad \ldots, \quad v_h^{\lambda-2}, \quad \frac{v_h^{\lambda-1}}{\lambda} \right|^2 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

nur noch den Factor $\lambda^{\lambda-2}$ enthält. Erwägt man noch, dass in der letzten Determinante die 2te, 3te, ..., $(\lambda-1)$-te Colonne resp. die Factoren $\lambda^{\frac{1}{\lambda-1}}$, $\lambda^{\frac{2}{\lambda-1}}, \ldots, \lambda^{\frac{\lambda-2}{\lambda-1}}$ haben, so folgt weiter, dass die Determinante

$$\left| 1, \quad \frac{v_h}{\lambda^{\frac{1}{\lambda-1}}}, \quad \frac{v_h^2}{\lambda^{\frac{2}{\lambda-1}}}, \quad \ldots, \quad \frac{v_h^{\lambda-2}}{\lambda^{\frac{\lambda-2}{\lambda-1}}}, \quad \frac{v_h^{\lambda-1}}{\lambda} \right| \qquad (h = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

zu λ relativ prim ist und dass also die sämmtlichen Determinanten zweiter Ordnung des Systemes von λ Zeilen und 2 Colonnen

$$\left(1, \quad \frac{v_h^{\lambda-1}}{\lambda}\right) \qquad (h = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

nach dem Modul λ keinen gemeinsamen Theiler haben können. Diese Bemerkung führt aber zu dem Schlusse, dass das reducirte System (11.) in der That ein Fundamentalsystem für den Modul λ bilden muss. Soll nämlich die Congruenz

$$u_0 + u_1(\omega-a) + u_2(\omega-a)^2 + \cdots + u_{\lambda-2}(\omega-a)^{\lambda-2} + u_{\lambda-1}\frac{(\omega-a)^{\lambda-1}}{\lambda} \equiv 0 \pmod{\lambda}$$

in ganzen rationalen Zahlen u lösbar sein, so muss zunächst

$$u_0+u_{\lambda-1}\frac{(\omega-a)^{\lambda-1}}{\lambda}\equiv 0 \pmod{\lambda^{\frac{1}{\lambda-1}}}$$

oder

$$u_0+u_{\lambda-1}\frac{v_h^{\lambda-1}}{\lambda}\equiv 0 \pmod{\lambda^{\frac{1}{\lambda-1}}} \quad \text{für} \quad h=1,\ 2,\ \ldots,\ \lambda$$

sein, und dies ist, weil die Determinanten des Systemes (12.) keinen gemeinsamen Theiler nach dem Modul λ haben, nur in der Weise möglich, dass u_0 und $u_{\lambda-1}$ durch $\lambda^{\frac{1}{\lambda-1}}$, also als rationale Zahlen auch durch λ theilbar sind. Nachdem dies bewiesen, schliesst man jetzt, genau wie früher, dass der Reihe nach auch $u_1, u_2, \ldots, u_{\lambda-2}$ den Factor λ besitzen müssen.

Das Resultat der letzten Untersuchung ist der Satz:

Ist λ eine Primzahl und a zu λ relativ prim, so bilden in der durch die Gleichung $\omega^\lambda = a$ constituirten Gattung die Zahlen $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{\lambda-2}, \omega^{\lambda-1}$ ***oder die Zahlen***

$$1,\quad \omega,\quad \omega^2,\quad \ldots,\quad \omega^{\lambda-2},\quad \frac{(\omega-a)^{\lambda-1}}{\lambda}$$

ein Fundamentalsystem für den Modul λ, je nachdem $\frac{a^{\lambda-1}-1}{\lambda}$ ***zu λ relativ prim ist oder nicht. Im ersten Falle ist die Gattungsdiscriminante gleich***

$$(-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-1)(\lambda-2)}(\mathrm{sgn.}a)^{\lambda-1}\lambda^\lambda \Pi p^{\lambda-1},$$

im zweiten

$$(-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-1)(\lambda-2)}(\mathrm{sgn.}a)^{\lambda-1}\lambda^{\lambda-2} \Pi p^{\lambda-1},$$

worin das Product über alle in a enthaltenen Primzahlen zu erstrecken ist.

Für $\lambda=2$ hat man das wohlbekannte Resultat, dass in der Gattung der mit $\sqrt{a}$ gebildeten Zahlen, 1 und $\sqrt{a}$ nur dann ein Fundamentalsystem für den Modul 2 bilden, wenn $a\equiv 2$ oder $\equiv 3 \pmod 4$ ist; wie man sieht, gelten gleich einfache Kriterien für beliebige Gattungen, welche aus Wurzelgrössen gebildet sind.

Zur Theorie der *Euler*schen Transformirten einer homogenen linearen Differentialgleichung der *Fuchs*schen Klasse.

(Von Herrn *Ludwig Schlesinger*.)

Euler war der Erste, der die Lösung einer gewissen besonderen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung (die im Wesentlichen auf die Differentialgleichung der *Gauss*schen Reihe hinauskommt) in der Form eines bestimmten Integrals

$$\int_{\alpha}^{\beta} w(z-x)^{\xi-1}\,dx$$

darstellte, wo ξ von z und x, α, β von x unabhängig sind und w eine blosse Function von x bedeutet. Ich habe in einer in den Comptes Rendus der Pariser Akademie vom 24. Juni 1895*) veröffentlichten Note und ausführlicher in einer Arbeit**) nachgewiesen, dass sich die Lösung jeder homogenen linearen Differentialgleichung durch ein Integral von der Form

$$(\alpha.) \qquad \int_{A} w(z-x)^{\xi-1}\,dx$$

darstellen lässt, wo A einen geeignet gewählten Integrationsweg, w die Lösung einer gewissen homogenen linearen Differentialgleichung mit ebenfalls rationalen Coefficienten bedeutet, die sich, wenn die zu integrirende Differentialgleichung vorgelegt ist, unmittelbar in expliciter Form angeben lässt. Wir wollen diese Hülfsdifferentialgleichung, nach der Analogie einer von Herrn *Poincaré* benutzten Bezeichnungsweise (Transformé de *Laplace*), die *Euler*sche *Transformirte* der vorgelegten Differentialgleichung nennen***).

*) Tome 120, p. 1396.

**) Dieses Journal Band 116 S. 97 ff.

***) In der interessanten Abhandlung von Herrn *Mellin* (Acta Societatis Fennicae Tome 21, Nr. 6 (1896)), die mir (am 19. Februar 1896) durch die Güte des Herrn Ver-

Es war (a. a. O. Nr. IV) gezeigt worden, dass die *Euler*sche Transformirte einer gegebenen linearen Differentialgleichung reductibel wird und sich durch eine Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung ersetzen lässt, sofern der unendlich ferne Punkt keine Unbestimmtheitsstelle für die vorgelegte Differentialgleichung ist, und dass sich die gegenseitige Beziehung zwischen einer Differentialgleichung und ihrer *Euler*schen Transformirten besonders einfach gestaltet, wenn in der gegebenen Differentialgleichung der Grad des Coefficienten der höchsten Ableitung mit der Ordnung der Differentialgleichung übereinstimmt. Unter der letzteren Annahme wurde u. A. für eine Differentialgleichung, die der *Fuchs*schen Klasse angehört, ein Fundamentalsystem in der Form (α.) aufgestellt und die Substitution bestimmt, die dasselbe bei einem Umlaufe der unabhängigen Variablen um einen singulären Punkt erfährt.

In der vorliegenden Note soll mit Zuhülfenahme dieser Substitutionen die Frage erörtert werden, wie zwei Differentialgleichungen zu einander stehen, deren *Euler*sche Transformirte im Sinne von *Riemann**) zu derselben Klasse gehören; im Zusammenhange damit wird dann auch die Reductibilitätsfrage eingehender untersucht und eine Anwendung der erlangten Ergebnisse auf die *Tissot-Pochhammer*sche, und insbesondere auf diejenigen Differentialgleichungen gegeben, denen nach Herrn *Fuchs***) die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung Genüge leisten.

Es möge gestattet sein, meine erwähnte Arbeit (dieses Journal Bd. 116) als „Abh." unter Hinzufügung der Nummer oder der Seitenzahl des Bandes zu citiren.

---

fassers zugekommen ist, wird (§ 8) diese *Euler*sche Transformirte ebenfalls aufgestellt, nachdem (§ 7) ähnlich wie in meinen erwähnten Arbeiten auch die *Laplace*sche Transformirte mit Zuhülfenahme der *Lagrange*schen Beziehung zwischen adjungirten Differentialausdrücken hergeleitet worden ist. Meine Arbeit in Band 116 dieses Journals hatte eben erst die Presse verlassen, dagegen scheint die Note in den Comptes Rendus der Aufmerksamkeit des Herrn *Mellin* entgangen zu sein.

Während der Drucklegung der vorliegenden Arbeit empfing ich (am 2. Juni 1896) durch die Güte des Herrn *Pincherle* seine mir leider bis dahin unbekannt gebliebene schöne Abhandlung (Memoria della R. Accademia di Bologna, 1892, Serie V, Tomo II, S. 523 ff.), worin für Differentialgleichungen der *Fuchs*schen Klasse die *Euler*sche Transformirte aufgestellt und gezeigt wird, dass ihre Gruppe durch die Gruppe der vorgelegten Differentialgleichung bestimmt ist.

*) Gesammelte Werke, 2. Aufl. (1892), Nachlass, S. 380 ff.

**) Dieses Journal Bd. 71, S. 113 ff.

I.

Wir gehen wie in den Nummern V—VIII der Abh. von einer Differentialgleichung $m$ter Ordnung der *Fuchs*schen Klasse

$$(A.) \qquad D_x(y) = P_m(x)\frac{d^m y}{dx^m} + P_{m-1}(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + P_0(x)y = 0$$

aus, für welche

$$P_m(x) = \prod_{k=1}^{\sigma}(x-a_k)^{\alpha_k}, \qquad \sum_{k=1}^{\sigma}\alpha_k = m$$

ist. Die adjungirte Differentialgleichung

$$(A'.) \qquad D'_x(w) = 0$$

von (A.) ist dann die *Euler*sche Transformirte der Differentialgleichung

$$(E.) \qquad E_z(u) = Q_m(z)\frac{d^m u}{dz^m} + Q_{m-1}(z)\frac{d^{m-1}u}{dz^{m-1}} + \cdots + Q_0(z)u = 0$$

d. h. es ist

$$(C.) \qquad D_x\big((z-x)^{\xi-1}\big) = E_z\big((z-x)^{\xi-1}\big).$$

Wir hatten in der Abh. die Schleifen s_0, s_1, s_2, ..., s_σ betrachtet, die von einem regulären Punkte $x=\zeta$ aus um die Punkte z, a_1, a_2, ..., a_σ der x-Ebene herum gelegt waren, ohne etwas näheres über den Verlauf dieser Schleifen in der x-Ebene festzusetzen. Da wir es hier mit der Betrachtung der *Gesammtheit* der Fundamentalsubstitutionen zu thun haben werden, so ist es nöthig, die Lage jener Schleifen genauer zu präcisiren. Wir denken uns nämlich aus der x-Ebene die Punkte

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\sigma, \quad z, \quad \zeta$$

durch kleine Curven ausgesondert und die so entstehende mehrfach zusammenhängende Fläche durch die von diesen Punkten aus nach dem Unendlichen hingelegten Querschnitte

$$l_1, \quad l_2, \quad \ldots, \quad l_\sigma, \quad l_0, \quad \bar{l}$$

in eine einfach zusammenhängende zerschnitten. Die Schleife s_k möge dann von ζ ausgehend in der zerschnittenen Fläche bis in die Umgebung von a_k, beziehungsweise für $k=0$ bis in die Umgebung von z verlaufen, dann den Querschnitt l_k in positiver Richtung (d. h. vom positiven Ufer nach dem negativen Ufer hin) überschreiten und wieder in der zerschnittenen Fläche nach ζ zurückkehren. Die Bezeichnung sei so gewählt, dass wir die Begrenzung der durch die Schnitte

$$l_1, \quad l_2, \quad \ldots, \quad l_\sigma, \quad \bar{l}$$

zerschnittenen Fläche im positiven Sinne durchlaufend, längs des positiven Ufers von l_1 von a_1 nach ∞, dann längs des negativen Ufers von l_2 nach a_2, dann längs des positiven Ufers von l_2 nach ∞ u. s. w. endlich längs des positiven Ufers von l_σ von a_σ nach ∞, längs des negativen Ufers von $\bar{l}$ nach ζ, längs des positiven Ufers von $\bar{l}$ nach ∞ und längs des negativen Ufers von l_1 nach a_1 zurückgelangen. Die Lage von z fixiren wir dann, indem wir z. B. voraussetzen, z und der Querschnitt l_0 seien innerhalb der durch

$$l_i, \quad s_i, \quad s_{i+1}, \quad l_{i+1}$$

begrenzten Parcelle der x-Ebene gelegen.

Lassen wir dann z einen Umlauf vollziehen, der nur den Querschnitt l_k einmal in positivem Sinne überschreitet, so können wir nicht mehr wie in der Abh. (S. 115) voraussetzen, dass die Schleifen s_ν für $\nu \neq k$ ungeändert bleiben, sondern es werden sich, wenn $k < i$ ist, die Schleifen

$$s_\nu \quad \text{für} \quad \nu = k+1, \quad \ldots, \quad i-1, \quad i$$

verwandeln in

$$s_0 s_k s_0^{-1} s_k^{-1} s_\nu s_k s_0 s_k^{-1} s_0^{-1},$$

ferner gehen s_0 und s_k über in

$$s_0 s_k s_0 s_k^{-1} s_0^{-1} \quad \text{beziehungsweise} \quad s_0 s_k s_0^{-1},$$

während die übrigen Schleifen

$$s_1, \quad \ldots, \quad s_{k-1}, \quad s_{i+1}, \quad \ldots, \quad s_\sigma$$

ungeändert bleiben. Wenn dagegen $k > i+1$ ist, so verwandelt sich s_0 und s_k in

$$s_k s_0 s_k^{-1} \quad \text{beziehungsweise} \quad s_k s_0 s_k s_0^{-1} s_k^{-1},$$

und die Schleifen

$$s_\nu \quad \text{für} \quad \nu = i+1, \quad i+2, \quad \ldots, \quad k-i$$

gehen über in

$$s_k s_0 s_k^{-1} s_0^{-1} s_\nu s_0 s_k s_0^{-1} s_k^{-1};$$

die übrigen Schleifen bleiben wieder ungeändert.

Wenn wir also die in der Abh. eingeführten Bezeichnungen festhalten und jetzt durch ein vorgesetztes θ_k dasjenige bezeichnen, worin eine Function von x beziehungsweise z übergeht, wenn die unabhängige Variable den Querschnitt l_k für $k = 1, 2, \ldots, \sigma$ einmal in positivem Sinne überschreitet, so erfahren die m Lösungen

$$u_{\nu\alpha} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \sigma; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \alpha_\sigma)$$

von (E.), die linearen Substitutionen (vergl. Abh. S. 128)

$$(\beta.)\qquad \begin{cases} \theta_k u_{k\alpha} = \varepsilon\varepsilon_{k\alpha} u_{k\alpha}, & (\alpha = 1, 2, \ldots, a_k) \\ \theta_k u_{\nu\alpha} = u_{\nu\alpha} - (1-\varepsilon_{\nu\alpha}) \sum_{\lambda=1}^{a_k} c_{\alpha\lambda}^{(\nu k)} u_{k\lambda}, & \begin{pmatrix} \nu = k+1, k+2, \ldots, i \\ \alpha = 1, 2, \ldots, a_\nu \end{pmatrix} \\ \theta_k u_{\mu\alpha} = u_{\mu\alpha} - \varepsilon(1-\varepsilon_{\mu\alpha}) \sum_{\lambda=1}^{a_k} c_{\alpha\lambda}^{(\mu k)} u_{k\lambda}, & \begin{pmatrix} \mu = i+1, i+2, \ldots, k-1 \\ \alpha = 1, 2, \ldots, a_\mu \end{pmatrix} \end{cases}$$

wo jetzt die „Uebergangssubstitution" der Differentialgleichung (A'.)

$$w_{\nu\alpha} = \sum_{\lambda=1}^{m} c_{\alpha\lambda}^{(\nu k)} w_{k\lambda} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m;\ \nu \neq k)$$

einem Wege entspricht, der zwischen den singulären Punkten a_ν und a_k *ganz innerhalb der zerschnittenen x-Ebene* verläuft.

Wir hatten in der Nr. VIII der Abh., aus den Ergebnissen der in der Nr. VII (unter der stillschweigenden Voraussetzung, dass die Fundamentalsubstitutionen der Differentialgleichung (A.) mit einander vertauschbar sind) durchgeführten Untersuchung den Schluss gezogen, dass die m Lösungen $u_{\nu\alpha}$ von (E.) *im allgemeinen* linear unabhängig sind*). Da die $u_{\nu\alpha}$ bei *jedem* geschlossenen Umlaufe von z in lineare homogene Functionen ihrer selbst übergehen und sich überall bestimmt verhalten, so können wir, wenn nur $\mu\ (< m)$ der $u_{\nu\alpha}$ linear unabhängig sind, eine lineare Differentialgleichung μter Ordnung ($\bar{\text{E}}$.) mit in z rationalen Coefficienten aufstellen, der die sämmtlichen $u_{\nu\alpha}$ genügen und die alle ihre Lösungen mit (E.) gemein hat. Die Differentialgleichung (E.) ist also in diesem Falle *reductibel,* und wir können die Differentialgleichung ($\bar{\text{E}}$.) als diejenige ansehen, deren *Euler*sche Transformirte durch (A'.) dargestellt wird.

Im Folgenden setzen wir (E.) als irreductibel voraus.

II.

Bedeutet Δ einen Integrationsweg, der sowohl die Integrale w von (A'.) als auch den Ausdruck

$$(z-x)^{\xi-1}$$

ungeändert lässt, der also jedenfalls die Gleichung

$$\int_\Delta \frac{d}{dx} D_x\big((z-x)^{\xi-1},\ w\big)dx = 0$$

---

*) S. 127 der Abh., Zeile 15 v. u. lies $\gamma = -(1-\varepsilon_{k\nu})$ statt $\gamma = 1-\varepsilon_{k\nu}$.

befriedigt, so ist (vergl. Abh. S. 109)

$$u = \int_A w(z-x)^{\xi-1}dx$$

eine Lösung von (E.). Differentiiren wir dieselbe ν-mal, indem wir unter dem Integralzeichen differentiiren, so kommt

$$\frac{d^\nu u}{dz^\nu} = (\xi-1)(\xi-2)\ldots(\xi-\nu)\int_A w(z-x)^{\xi-\nu-1}dx,$$

und es ist folglich die νte Ableitung der Lösung u von (E.) *eine Lösung derjenigen Differentialgleichung $m$ter Ordnung, die wir erhalten, wenn wir in* (E.) *an die Stelle von ξ setzen $\xi-\nu$.*

Wir wollen im Folgenden, wenn es sich als nöthig erweist, in die Bezeichnung der Differentialgleichung (E.) auch noch die Grösse ξ mit aufnehmen, also statt (E.) schreiben

$$(E_\xi.) \qquad E_z(u;\ \xi) = Q_m(z,\ \xi)\frac{d^m u}{dz^m} + \cdots + Q_0(z,\ \xi)u = 0.$$

Es lässt sich dann direct zeigen, dass die Differentialgleichung

$$(E_{\xi+1}.) \quad E_z(U;\ \xi+1) = Q_m(z,\ \xi+1)\frac{d^m U}{dz^m} + \cdots + Q_0(z,\ \xi+1)U = 0$$

so beschaffen ist, dass die Ableitungen

$$(1.) \qquad u = \frac{dU}{dz}$$

ihrer Lösungen die Differentialgleichung (E_ξ.) befriedigen.

In der That folgt, wenn wir (E_ξ.) nach z differentiiren und beachten, dass $Q_0(z,\ \xi)$ zufolge der über die Differentialgleichung (A.) gemachten Voraussetzungen eine von z unabhängige Grösse ist, für U die Gleichung

$$Q_m(z,\ \xi)\frac{d^m U}{dz^m} + \sum_{\nu=0}^{m-1}[Q'_{\nu+1}(z,\ \xi)+Q_\nu(z,\ \xi)]\frac{d^\nu U}{dz^\nu} = 0$$

und diese ist mit ($E_{\xi+1}$.) identisch, wie man mit Hülfe der Formel (vergl. Abh. S. 109, Gleichung (1.))

$$(2.) \qquad Q_\nu(z,\ \xi) = (-1)^\nu \sum_{k=\nu}^{m} \frac{(\xi-1)(\xi-2)\ldots(\xi-k)}{(\xi-1)(\xi-2)\ldots(\xi-\nu)}\frac{P_k^{(k-\nu)}(z)}{(k-\nu)!}$$

sofort erkennen kann.

Betrachtet man allgemein die Differentialgleichung

$$(E_{\xi+\nu}.) \qquad E_z(\mathfrak{U};\ \xi+\nu) = 0$$

wo ν eine positive ganze Zahl bedeutet, so sind ihre Lösungen in der Form

$$\mathfrak{U} = \int_{(A)} w(z-x)^{\xi+\nu-1} dx$$

darstellbar, und die νten Ableitungen derselben genügen der Differentialgleichung (E_ξ.), d. h. es ist

$$u = \frac{d^\nu \mathfrak{U}}{dz^\nu}.$$

Daraus folgt, dass alle Differentialgleichungen (E_ξ.) *und* (E_η.), *in denen sich* ξ *und* η *nur um eine ganze Zahl unterscheiden im Sinne von Riemann zur selben Klasse gehören.*

Von der Thatsache ausgehend, dass die m Integrale $u_{i\alpha}$ ein Fundamentalsystem von (E_ξ.) darstellen, kann man dies auch aus den Formeln (β.) erschliessen.

In der That haben zunächst die Differentialgleichungen (E_ξ.) für jeden Werth von ξ nur die singulären Stellen

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\sigma, \quad \infty.$$

Die Substitutionen (β.), welche das Fundamentalsystem $u_{i\alpha}$ von (E_ξ.) erfährt, wenn z Umläufe um diese singulären Stellen beschreibt, bleiben ungeändert, wenn man ξ um ganze Zahlen vermehrt oder vermindert, da sie das ξ nur in der Form

$$\varepsilon = e^{2\pi\xi\sqrt{-1}}$$

enthalten. Da (E_ξ.) überdies zur *Fuchs*schen Klasse gehört, so folgt hieraus die Richtigkeit unserer Behauptung.

Die Beziehung zwischen den abhängigen Variablen der Differentialgleichungen (E_ξ.) und ($E_{\xi+1}$.) kann man auch leicht in der Form darstellen, dass U durch u und seine Ableitungen ausgedrückt erscheint. Es ist nämlich nach (1.)

$$\frac{d^{m-1}u}{dz^{m-1}} = \frac{d^m U}{dz^m},$$

also mit Rücksicht auf die Differentialgleichung ($E_{\xi+1}$.), wenn man den constanten Factor $-Q_0(z, \xi+1)$ unterdrückt,

$$(3.) \quad U = Q_m(z, \xi+1)\frac{d^{m-1}u}{dz^{m-1}} + Q_{m-1}(z, \xi+1)\frac{d^{m-2}u}{dz^{m-2}} + \cdots + Q_1(z, \xi+1)u.$$

III.

Gehen wir statt von der Differentialgleichung (A.) von einer Differentialgleichung (B.) aus, die mit (A.) im Sinne von Herrn *Poincaré**) zur selben ***Art*** (espèce) gehört, d. h. deren abhängige Variable in der Form

$$r_0 y + r_1 \frac{dy}{dx} + \cdots + r_{m-1} \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$$

darstellbar ist, wo $r_0, r_1, \ldots, r_{m-1}$ beliebige rationale Functionen von x bedeuten, so gehören, wie leicht einzusehen ist, auch die adjungirten Differentialgleichungen (A′.) und (B′.) von (A.) und (B.) zur selben Art, d. h. die abhängige Variable $\mathfrak{w}$ von (B′.) wird in der Form

$$(1.) \qquad \mathfrak{w} = g_0 w + g_1 \frac{dw}{dx} + \cdots + g_{m-1} \frac{d^{m-1}w}{dx^{m-1}}$$

darstellbar sein, wo auch die $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}$ rationale Functionen von x bedeuten.

Wir fragen nun, wie müssen diese rationalen Functionen beschaffen sein, damit auch die Differentialgleichung (E.), deren *Euler*sche Transformirte (A′.) ist, mit der Differentialgleichung

$$(F.) \qquad F_z(\mathfrak{u}) = 0,$$

deren *Euler*sche Transformirte (B′.) ist, zur selben Art gehört. Es handelt sich dann um die Untersuchung der Ausdrücke

$$\int_{(J)} \mathfrak{w}(z-x)^{\eta-1} dx,$$

wo $\mathfrak{w}$ durch die Gleichung (1.) gegeben und die Differenz $\eta - \xi$ eine positive ganze Zahl ist.

Wir setzen der Einfachheit wegen voraus, dass die rationalen Functionen $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}$ ***von z unabhängig*** sind. Bezeichnen wir dann die den $w_{i\alpha}$ entsprechenden Integrale von (B′.) durch $\mathfrak{w}_{i\alpha}$, so dass also

$$\mathfrak{w}_{i\alpha} = g_0 w_{i\alpha} + g_1 \frac{dw_{i\alpha}}{dx} + \cdots + g_{m-1} \frac{d^{m-1}w_{i\alpha}}{dx^{m-1}}$$

ist, und setzen

$$\mathfrak{u}_{i\alpha} = \int_{s_i s_0 s_i^{-1} s_0^{-1}} \mathfrak{w}_{i\alpha}(z-x)^{\eta-1} dx,$$

---

*) Acta Mathematica Bd. 5, S. 212. In seiner Abhandlung (Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1888, II, S. 1275) bezeichnet Herr ***Fuchs*** zwei in diesem Sinne zur selben Art gehörige Differentialgleichungen als zur selben Klasse gehörig. Wir behalten für den Klassenbegriff die (engere) ***Riemann***sche Definition bei.

so befriedigen diese Ausdrücke bei geeigneter Wahl von η die Differentialgleichung (F.), und es werden die Substitutionen, welche die $u_{i\alpha}$ bei Umläufen von z um die Punkte

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\sigma$$

erleiden, mit den entsprechenden Substitutionen der $u_{i\alpha}$ übereinstimmen, wenn

1) die Differentialgleichungen (A'.) und (B'.) nicht nur zur selben Art, sondern auch zur selben Klasse gehören, und

2) die den Integralen von (A'.)

$$w_{i\alpha} \qquad (\alpha = \sigma_i + 1, \ldots, m; \; i = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

(vergl. Abh. S. 112) entsprechenden Integrale $w_{i\alpha}$ von (B'.) in der Umgebung von $x = a_i$ auch regulär sind.

In diesem Falle lässt sich nämlich zunächst jedes über einen beliebigen geschlossenen Weg A, der den zu Beginn der Nr. II erwähnten Bedingungen Genüge leistet, erstreckte Integral

$$\int_A w(z-x)^{\eta-1} dx$$

aus Integralen, die über die Schleifen $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_\sigma$ erstreckt sind, zusammensetzen. Das wäre nicht möglich, wenn (B'.) mit (A'.) nicht zur selben Klasse, sondern nur zur selben Art gehörte; denn dann besässe (B'.) ausser den

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\sigma, \quad \infty$$

noch andere ***wesentlich*** singuläre Stellen (im Sinne von Herrn ***Fuchs****)), in denen das allgemeine Integral w von (B'.) zwar eindeutig aber wie eine rationale Function unendlich wäre; es wäre also im allgemeinen das Integral

$$\int w(z-x)^{\eta-1} dx,$$

erstreckt längs eines geschlossenen Weges der einen dieser Unendlichkeitspunkte umschliesst, nicht gleich Null. Wenn dagegen (B'.) und (A'.) zur selben Klasse gehören, so ist das Auftreten solcher Unendlichkeitsstellen ausgeschlossen.

Ferner sind, wenn die Bedingungen 1), 2) erfüllt sind, die Uebergangssubstitutionen, welche die Integralsysteme

$$w_{i\alpha}, \quad w_{k\alpha} \qquad (i \neq k; \; \alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

*) Dieses Journal Bd. 68, S. 378.

mit einander verknüpfen, dieselben wie die für die entsprechenden Lösungen von (A′.) bestehenden, so dass also in der That die Formeln (β.) auch die Aenderungen der $\mathfrak{u}_{i\alpha}$ bei Umläufen von z wiedergeben. Da endlich die singulären Stellen der $\mathfrak{u}_{i\alpha}$ keine anderen sein können wie die

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\sigma, \quad \infty$$

so bilden die $\mathfrak{u}_{i\alpha}$ ein Functionssystem, welches mit dem Functionssysteme $\mathfrak{u}_{i\alpha}$ zu derselben Klasse (im Sinne von *Riemann*) gehört.

Im allgemeinen wird die Differentialgleichung (B′.) neben den wesentlichen singulären Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma, \infty$, noch gewisse *ausserwesentliche* singuläre Stellen*) $b_1, b_2, \ldots, b_\varrho$ besitzen können; (für (A.) und (A′.) hatten wir in der Abh. durch die den singulären Stellen auferlegten Bedingungen das Auftreten von ausserwesentlich singulären Stellen ausgeschlossen). Der Coefficient der $m$ten Ableitung in (B′.) wird also im allgemeinen von höherem als dem $m$ten Grade, sagen wir vom Grade $\overline{m} > m$ sein. Entsprechend wird dann (Abh. Nr. IV) die Differentialgleichung (F.), deren *Euler*sche Transformirte (B′.) ist, von der $\overline{m}$ten Ordnung und in den $\mathfrak{u}_{i\alpha}$ für η der Werth $\xi + \overline{m} - m$ zu nehmen sein.

Die m Integrale $\mathfrak{u}_{i\alpha}$ von (F.) sind so beschaffen, dass sie sich bei jedem Umlaufe von z in lineare homogene Functionen ihrer selbst verwandeln; sie befriedigen folglich eine lineare Differentialgleichung $m$ter Ordnung der *Fuchs*schen Klasse

$$(\overline{\text{F}}.) \qquad \overline{F}_z(\mathfrak{u}) = 0,$$

deren sämmtliche Integrale auch der Gleichung (F.) genügen. Die linke Seite von (F.) ist demnach in der Eorm

$$F_z(\mathfrak{u}) = G\overline{F}_z(\mathfrak{u})$$

darstellbar, wo G einen linearen Differentialausdruck von der Ordnung $\overline{m} - m$ und mit in z rationalen Coefficienten bedeutet. D. h. in diesem Falle ist (F.) *reductibel,* und wir können statt (F.) die Differentialgleichung ($\overline{\text{F}}$.) als diejenige ansehen, deren *Euler*sche Transformirte durch (B′.) dargestellt wird.

Wenn die Bedingungen 1), 2) *erfüllt sind, so gehört die Differentialgleichung* ($\overline{\text{F}}$.) *mit* (E.) *zu derselben Klasse.*

Falls die Bedingung 1) nicht erfüllt ist, so mögen b_k ($k = 1, 2, \ldots, \tau$)

*) Vergl. *Fuchs* a. a. O.

die von den

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\sigma, \quad \infty$$

verschiedenen ***wesentlichen*** singulären Stellen die Differentialgleichung (B'.) bedeuten; dann wird also das allgemeine Integral $\mathfrak{w}$ von (B'.) in b_k wie eine rationale Function unendlich. Die Differentialgleichung (F.), deren *Euler*sche Transformirte durch (B'.) gegeben wird, besitzt dann ausser den $\mathfrak{u}_{i\alpha}$ noch Lösungen von der Form

$$(2.) \qquad \int_{(b_k)} \mathfrak{w}(z-x)^{\eta-1}\,dx, \qquad (k = 1, 2, \ldots, \tau)$$

wo wir durch (b_k) andeuten, dass das Integral längs einer den Punkt b_k umschlingenden einfachen Schleife, die ganz in der zerschnittenen x-Ebene verläuft zu erstrecken ist. Wenn das Integral (2.) identisch verschwinden sollte, so müsste

$$\mathrm{Res}_{x=b_k}[\mathfrak{w}(z-x)^{\eta-1}] = 0$$

sein, dann wäre aber im allgemeinen $\mathfrak{w}$ nicht mehr von z unabhängig.

Offenbar ist (2.) gleich einem Ausdrucke von der Form

$$(2^a.) \qquad (z-b_k)^{\eta-\gamma_k}\mathfrak{g}_k(z),$$

wo γ_k eine positive ganze Zahl, $\mathfrak{g}_k(z)$ eine ganze rationale Function bedeutet. Dieses Integral von (F.) multiplicirt sich also bei einem Umlaufe um b_k mit dem Factor ε; es repräsentirt im allgemeinen mehrere, von einander unabhängige Lösungen von (F.); jede einzelne dieser Lösungen befriedigt aber eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit rationalen Coefficienten.

Die Differentialgleichung (F.) ist also *reductibel* und zwar ist ihre linke Seite in der Form

$$(3.) \qquad F_z(\mathfrak{u}) = \mathfrak{F}\mathfrak{G}(\mathfrak{u})$$

darstellbar, wo $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ lineare Differentialausdrücke mit rationalen Coefficienten bedeuten, von denen $\mathfrak{G}$ so beschaffen ist, dass die Gleichung

$$\mathfrak{G}(\mathfrak{u}) = 0$$

durch die in der Form (2.) darstellbaren Lösungen von (F.) befriedigt wird. Die Integrale $\mathfrak{u}_{i\alpha}$ von (F.) erleiden im allgemeinen eine Werthänderung, wenn z einen einfachen Umlauf um einen der Punkte b_k vollzieht; man kann diese Aenderung mit Hülfe der Formeln, die in der Abh. und in der

Nr. I dieser Notiz entwickelt sind, sofort hinschreiben, wenn man das Verhalten der Integrale $\mathfrak{w}_{i\alpha}$ von (B'.) in der Umgebung der Stellen b_k kennt.

Die Stellen b_k sind also Verzweigungspunkte der Integrale von (F.).

Wenn auch die Bedingung 2) nicht erfüllt ist, so fallen einzelne der Punkte b_k mit den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ zusammen.

IV.

Die Bedingungen 1), 2) sind offenbar erfüllt, wenn in der Beziehung

$$\text{(1.)} \qquad \mathfrak{w} = g_0 w + g_1 \frac{dw}{dx} + \cdots + g_{m-1} \frac{d^{m-1}w}{dx^{m-1}}$$

die $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}$ ***ganze*** rationale Functionen von x, mit von z unabhängigen Coefficienten sind. Wir wollen in diesem besonderen Falle aus der als gegeben anzusehenden Beziehung (1.) die Beziehung zwischen der abhängigen Variablen

$$u = \int_A w(z-x)^{\xi-1} dx$$

(E.) und der abhängigen Variablen

$$\mathfrak{u} = \int_A \mathfrak{w}(z-x)^{\eta-1} dx$$

von ($\bar{\text{F}}$.) abzuleiten suchen. Es möge sogar allgemeiner in dem Ausdrucke für $\mathfrak{u}$ dem η ein beliebiger von ξ um eine ganze Zahl verschiedener Werth beigelegt werden, dann genügt $\mathfrak{u}$ nicht mehr der Gleichung ($\bar{\text{F}}$.), sondern einer mit ($\bar{\text{F}}$.) zu derselben Klasse gehörigen Differentialgleichung ($\bar{\text{F}}$.).

Sei ν_k der Grad der ganzen Function g_k, dann ist nach Potenzen von $x-z$ entwickelt

$$g_k(x) = \sum_{i=0}^{\nu_k} \frac{g_k^{(i)}(z)}{i!}(x-z)^i; \qquad (k=0, 1, \ldots, m-1)$$

also ergiebt sich, wenn wir (1.) mit $(z-x)^{\eta-1}dx$ multipliciren und auf einem Wege A integriren

$$\int_A \mathfrak{w}(z-x)^{\eta-1} dx = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{\nu_k} \frac{g_k^{(i)}(z)}{i!}(-1)^i \int_A \frac{d^k w}{dx^k}(z-x)^{\eta+i-1} dx.$$

Durch partielle Integration finden wir aber für ein beliebiges η:

$$\int_{\mathcal{A}} \frac{d^k w}{dx^k}(z-x)^{\eta-1}dx = \int_{\mathcal{A}} d\sum_{h=0}^{k-1}(-1)^h \frac{d^h(z-x)^{\eta-1}}{dx^h}\frac{d^{k-h-1}w}{dx^{k-h-1}} + (-1)^k \int_{\mathcal{A}} w\frac{d^k}{dx^k}[(z-x)^{\eta-1}]dx,$$

wenn also $\mathcal{A}$ der zu Anfang der Nr. II ausgesprochenen Bedingung genügt (dies ist z. B. für die Doppelschleifen

$$s_i s_0 s_i^{-1} s_0^{-1} \qquad (i=1, 2, \ldots, \sigma)$$

der Fall), so verschwindet das erste Integral auf der rechten Seite der obigen Gleichung, und wir erhalten

$$\int_{\mathcal{A}} \frac{d^k w}{dx^k}(z-x)^{\eta-1}dx = (\eta-1)(\eta-2)\ldots(\eta-k)\int_{\mathcal{A}} w(z-x)^{\eta-k-1}dx.$$

Es ist folglich

$$\int_{\mathcal{A}} \mathfrak{w}(z-x)^{\eta-1}dx = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{\nu_k}(-1)^i \frac{(\eta+i-1)\ldots(\eta+i-k)}{1.2\ldots i} g_k^{(i)}(z)\int_{\mathcal{A}} w(z-x)^{\eta+i-k-1}dx;$$

bezeichnen wir also den grössten Werth, den die ganze Zahl

$$\eta-\xi+i-k \qquad (i=0, 1, \ldots, \nu_k;\ k=0, 1, \ldots, m-1)$$

anzunehmen vermag, durch ν und setzen wie oben

$$\mathfrak{U} = \int_{\mathcal{A}} w(z-x)^{\xi+\nu-1}dx,$$

so erhalten wir, wenn wir mit Hülfe der Differentialgleichung $(E_{\xi+\nu})$, der $\mathfrak{U}$ genügt, die Ableitungen höherer als $(m-1)$-ter Ordnung von $\mathfrak{U}$ wegschaffen

$$(2.) \qquad \int_{\mathcal{A}} \mathfrak{w}(z-x)^{\eta-1}dx = R_0\mathfrak{U} + R_1\frac{d\mathfrak{U}}{dz} + \cdots + R_{m-1}\frac{d^{m-1}\mathfrak{U}}{dz^{m-1}},$$

wo die $R_0, R_1, \ldots, R_{m-1}$ rationale Functionen von z bedeuten, deren Nenner nur für $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ verschwinden können und die sich aus den $g_k^{(i)}(z)$, den Coefficienten $Q_\nu(z, \xi+\nu)$ der Differentialgleichung $(E_{\xi+\nu})$ und deren Ableitungen in einfachster Weise zusammensetzen. Besonders zu bemerken ist, dass die $R_0, R_1, \ldots, R_{m-1}$ von der speciellen Wahl des Integrationsweges $\mathcal{A}$ unabhängig sind.

Nun können wir durch wiederholte Anwendung der Formel (3.) der Nr. II, $\mathfrak{U}$ und seine Ableitungen durch das entsprechende Integral von (E.)

$$u = \int_{\mathcal{A}} w(z-x)^{\xi-1}dx$$

darstellen; dies in die Formel (2.) eingesetzt, liefert dann die explicite Darstellung von

$$\mathfrak{u} = \int_{\mathcal{A}} \mathfrak{w}(z-x)^{\eta-1}dx$$

durch u und dessen $m-1$ erste Ableitungen, und damit die gesuchte Beziehung, die den Uebergang von (E.) zu ($\overline{\text{F}}$.) vermittelt.

Mit Rücksicht auf die in der Nummer VI zu gebende Anwendung betrachten wir noch den besonderen Fall

$$\mathfrak{w} = g_0(x)w, \tag{3.}$$

wo $g_0(x)$ eine ganze Function vom höchstens $(\sigma-1)$-ten Grade bedeutet*). Es ist dann, wenn wir einfach $\eta = \xi$ nehmen

$$\mathfrak{u} = \int_{\mathcal{A}} \mathfrak{w}(z-x)^{\xi-1}dx = \sum_{i=0}^{\sigma-1}(-1)^{\sigma-i-1}\frac{g_0^{(\sigma-i-1)}(z)}{(\sigma-i-1)!}\int_{\mathcal{A}} w(z-x)^{\xi+\sigma-i-2}dx;$$

wenn wir also

$$\mathfrak{U} = \int_{\mathcal{A}} w(z-x)^{\xi+\sigma-2}dx$$

setzen, so dass

$$\int_{\mathcal{A}} w(z-x)^{\xi+\sigma-i-2}dx = \frac{1}{(\xi+\sigma-2)\ldots(\xi+\sigma-i-1)}\frac{d^i\mathfrak{U}}{dz^i}$$

ist, so erhalten wir

$$\mathfrak{u} = \sum_{i=0}^{\sigma-1}(-1)^{\sigma-i-1}\frac{g_0^{(\sigma-i-1)}(z)}{(\sigma-i-1)!}\frac{1}{(\xi+\sigma-2)\ldots(\xi+\sigma-i-1)}\frac{d^i\mathfrak{U}}{dz^i}. \tag{4.}$$

V.

Wir betrachten den besonderen Fall wo (E.) die *Tissot-Pochhammer*sche Differentialgleichung ist, und bedienen uns der in der Abh. (S. 119 ff.) eingeführten Bezeichnungen.

Denken wir uns z. B. in den Formeln der Nr. I, $i = \sigma$ genommen, so haben wir für die Integrale

$$u_{11},\quad u_{21},\quad \ldots,\quad u_{m1}$$

der *Tissot-Pochhammer*schen Differentialgleichung (E.), die Fundamentalsubstitutionen (vgl. Abh. S. 129)

$$\text{(1.)}\qquad \begin{cases} \theta_k u_{k1} = \varepsilon\varepsilon_{k1}u_{k1}, & \\ \theta_k u_{\nu 1} = u_{\nu 1}-(1-\varepsilon_{\nu 1})u_{k1}, & (\nu = k+1, \ldots, m) \\ \theta_k u_{\mu 1} = u_{\mu 1}-\varepsilon(1-\varepsilon_{\mu 1})u_{k1}. & (\mu = 1, 2, \ldots, k-1) \end{cases}$$

*) Vgl. hierzu *Nekrassoff*, Mathem. Annalen Bd. 38, S. 536, *Pincherle*, a. a. O. S. 539.

Aus dem blossen Anblicke derselben folgt ebenso wie aus den allgemeinen Erörterungen der Nr. III, dass wir Differentialgleichungen (E.) erhalten, die zu einer und derselben Klasse gehören, wenn wir die $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, \xi$ um ganze Zahlen vermehren oder vermindern. Multipliciren wir ferner

$$w_1 = (x-a_1)^{\beta_1-1}(x-a_2)^{\beta_2-1}\ldots(x-a_m)^{\beta_m-1}$$

mit einer willkürlichen, von z unabhängigen ganzen rationalen Function $g_0(x)$, so genügen die

$$\int_{s_k s_0 s_k^{-1} s_0^{-1}} g_0(x) w_1 (z-x)^{\xi-1} dx \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

ebenfalls einer Differentialgleichung $m$ter Ordnung, die mit der w_1 entsprechenden *Tissot-Pochhammer*schen Differentialgleichung (E.) zu derselben Klasse gehört. Das heisst:

Bedeutet $r(x)$ irgend eine rationale Function, die abgesehen von einer ganzzahligen Potenz von $z-x$ als Factor, von z unabhängig ist und nur für Punkte aus der Reihe $a_1, a_2, \ldots, a_m, z, \infty$ unendlich wird, so befriedigen die Ausdrücke

$$u_{k1} = \int_{s_k s_0 s_k^{-1} s_0^{-1}} r(x) w_1 (z-x)^{\xi-1} dx \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

eine Differentialgleichung, die mit (E.), deren Lösungen die

$$u_{k1} = \int_{s_k s_0 s_k^{-1} s_0^{-1}} w_1 (z-x)^{\xi-1} dx \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

sind, zu derselben Klasse gehört.

Wenn die rationale Function $r(x)$ noch in den von $a_1, a_2, \ldots, a_m, z, \infty$ verschiedenen Punkten b_k $(k = 1, 2, \ldots, \tau)$ unendlich wird, so greifen die Bemerkungen, die wir am Schlusse der Nr. III gemacht haben, Platz.

Die Fundamentalsubstitutionen (1.) lehren, dass das Fundamentalsystem u_{i1} von (E.) die Eigenschaft hat, dass seine Gruppe von den in den Coefficienten von (E.) auftretenden Parametern $a_1, a_2, \ldots, a_m$ unabhängig ist. Nach dem Satze von Herrn *Fuchs**) bestehen also Gleichungen von der Form

$$(2.) \qquad \frac{\partial u_{i1}}{\partial a_k} = R_0^{(k)} u_{i1} + R_1^{(k)} \frac{du_{i1}}{dz} + \cdots + R_{m-1}^{(k)} \frac{d^{m-1} u_{i1}}{dz^{m-1}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

---

*) Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1888, II, S. 1279 ff.

wo die $R_0^{(k)}, R_1^{(k)}, \ldots, R_{m-1}^{(k)}$ rationale Functionen von z bedeuten. Dies lässt sich auch mit Hülfe der zu Beginn dieser Nummer gemachten Bemerkungen bestätigen, wenn man bedenkt, dass

$$(3.)\quad \frac{\partial}{\partial a_k}\int_{\Delta}\prod_{\lambda=1}^{m}(x-a_\lambda)^{\beta_\lambda-1}(z-x)^{\frac{\xi}{\varepsilon}-1}dx = (1-\beta_k)\int_{\Delta}\prod_{\lambda=1}^{m}(x-a_\lambda)^{\bar\beta_\lambda-1}(z-x)^{\frac{\xi}{\varepsilon}-1}dx$$

ist, wo Δ eine der Doppelschleifen $s_i s_0 s_i^{-1} s_0^{-1}$ bedeutet und

$$\bar\beta_\lambda = \beta_\lambda \quad \text{für} \quad \lambda \neq k, \quad \bar\beta_k = \beta_k - 1$$

gesetzt wurde. Aus (3.) folgt nämlich, dass die

$$\frac{\partial u_{i1}}{\partial a_k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

eine Differentialgleichung $m$ter Ordnung befriedigen, die mit (E.) zur selben Klasse gehört.

Wenn die $a_1, a_2, \ldots, a_m$ von einander (und von z) unabhängige Variable sind, so besitzen die u_{i1} als Functionen irgend eines a_λ aufgefasst genau dieselben Eigenschaften wie als Functionen von z. Insbesondere bilden die u_{i1} ein Fundamentalsystem einer *Tissot-Pochhammer*schen Differentialgleichung mit der unabhängigen Variablen a_λ und den singulären Punkten

$$z, \quad a_k, \quad k \neq \lambda,$$

d. h. *die u_{i1} haben die Eigenschaft, dass sie als Functionen irgend einer der Grössen*

$$(4.)\qquad z, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_m$$

aufgefasst bei Umläufen der unabhängigen Variablen lineare Substitutionen erfahren, deren Coefficienten von den sämmtlichen $m+1$ Grössen (4.) *unabhängig sind.*

Die Differentialgleichung, der die Periodicitätsmoduln des hyperelliptischen Integrals

$$(5.)\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)\ldots(x-a_m)(z-x)}}$$

als Functionen von z Genüge leisten, geht aus der Differentialgleichung (E.) durch Specialisirung hervor (vergl. Abh. S. 120). Für diese Differentialgleichung hat Herr *Fuchs**) nachgewiesen, dass ein Fundamentalsystem derselben die eben für die u_{i1} hervorgehobene Eigenschaft besitzt. Die Untersuchung der Frage, wie weit die von Herrn *Fuchs* aus dieser Eigen-

*) Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1888, II. S. 1285ff.; vgl. 1891, I. S. 166ff.

schaft für die Periodicitätsmoduln gezogenen Folgerungen eine Uebertragung auf die Lösungen einer beliebigen *Tissot-Pochhammer*schen Differentialgleichung zulassen, behalten wir uns für eine spätere Gelegenheit vor. Hier wollen wir nur noch einige der von Herrn *Fuchs* für die Periodicitätsmoduln gegebene Sätze und Formeln mit Hülfe der in den Nrn. III, IV dargelegten Entwickelungen abzuleiten suchen.

VI.

Für den besonderen Fall

$$w_1 = (x-a_1)^{-\frac{1}{2}}(x-a_2)^{-\frac{1}{2}}\ldots(x-a_m)^{-\frac{1}{2}} = [P_m(x)]^{-\frac{1}{2}}, \quad m \equiv 0 \pmod 2,$$

ergeben sich nach den Formeln der Abh. (S. 119) die Coefficienten von $(E_\xi.)$ in der Form

$$Q_\nu(z, \xi) = (-1)^{m-\nu-1}\frac{(\xi-\frac{1}{2}(m+\nu))}{(\xi-1)(\xi-2)\ldots(\xi-\nu)1.2\ldots(m-\nu)}P_m^{(m-\nu)}(z);$$

setzt man hierin noch $\xi = \frac{1}{2}$, so erhält man die zuerst von Herrn *Fuchs**) aufgestellte Differentialgleichung $(E_{\frac{1}{2}}.)$ für die Periodicitätsmoduln des hyperelliptischen Integrals erster Gattung (5.) Nr. V. Für ein anderes zu der Irrationalität

$$s = \sqrt{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)(z-x)}$$

gehöriges Integral, können wir nach unserem Verfahren die Differentialgleichung der Periodiciätsmoduln aufstellen, wenn der Integrand abgesehen von einer Potenz von $z-x$ als Factor von z unabhängig ist. Aus dem Satze der Nr. V (S. 162) ergiebt sich ohne weiteres das Resultat:

Die Periodicitätsmoduln eines Integrals erster Gattung

$$\int \frac{g(x)\,dx}{s},$$

wo $g(x)$ eine *ganze* rationale Function vom Grade $\frac{m}{2}-1$ mit willkürlichen von z unabhängigen Coefficienten bedeutet, genügen einer Differentialgleichung, die mit $(E_{\frac{1}{2}}.)$ zur selben Klasse gehört. Die Differentialgleichung, der die Periodicitätsmoduln eines Integrals zweiter Gattung genügen, gehört mit $(E_{\frac{1}{2}}.)$ zur selben Klasse, wenn der Integrand, abgesehen von einer Potenz von $z-x$ als Factor von z unabhängig ist und die Unendlichkeitsstellen des Integrales mit Punkten aus der Reihe $a_1, a_2, \ldots, a_m, z, \infty$ übereinstimmen.

---

*) Dieses Journal Bd. 71.

Dieser Satz ist ein besonderer Fall eines Satzes von Herrn *Fuchs**), nach welchem die Periodicitätsmoduln des Integrales

$$\int \frac{r(x)}{s}\,dx,$$

wo $r(x)$ eine rationale Function von z und x bedeutet, die nur für Wurzeln der Gleichung

$$s^2 = 0$$

unendlich wird, eine Differentialgleichung befriedigen, die mit $(E_{\frac{1}{2}})$ zu derselben *Art* gehört.

Hat man z. B. ein Normalintegral *dritter* Gattung

$$\int \frac{dx}{(x-b)s},$$

so haben wir nach den Ergebnissen der Nr. III (S. 158) neben den Periodicitätsmoduln

$$\mathfrak{u}_{i1} = \int_{s_i s_0 s_i^{-1} s_0^{-1}} \frac{dx}{(x-b)s} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

noch das Integral

$$\mathfrak{u} = \int_{(b)} \frac{dx}{(x-b)s}$$

zu betrachten. Die entsprechende Differentialgleichung (F.) ist dann von der $(m+1)$-ten Ordnung, und zwar ist bei der Darstellung (3.) Nr. III der linken Seite von (F.) der Differentialausdruck $\mathfrak{G}(\mathfrak{u})$ von der ersten Ordnung. Diese Differentialgleichung (F.) ist von Herrn *E. Ullrich***) aufgestellt und discutirt worden. Für die Integrale

$$\mathfrak{u}, \quad \mathfrak{u}_{i1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

derselben ist, wie man durch Aufstellung der entsprechenden Fundamentalsubstitution sofort übersieht, der Punkt $x = b$ ein Verzweigungspunkt***).

Die Beziehung, welche die abhängige Variable $\mathfrak{u}$ der durch die Periodicitätsmoduln von

$$\int \frac{x\,dx}{s}$$

---

*) Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1888, II, S. 1286 ff.

**) Dissertation, Heidelberg 1884 „Die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Normalintegrale dritter Gattung."

***) Hiernach ist eine Bemerkung des Herrn *Ullrich* (a. a. O. S. 11, Zeile 4 v. u.) zu berichtigen.

erfüllten Differentialgleichung mit der abhängigen Variablen u von ($E_{\frac{1}{4}}$.) verknüpft, hat Herr *Fuchs* für $m=2$ und $m=4$ in expliciter Form aufgestellt; wir wollen unter Anwendung der in der Nr. IV dargelegten Methode die betreffenden Formeln ableiten.

Sei zunächst $m=2$, und nehmen wir wie üblich $a_1=0$, $a_2=1$, so haben wir für ($E_{\frac{1}{4}}$.) die *Legendre*sche Differentialgleichung

$$x(x-1)\frac{d^2u}{dx^2}+(2x-1)\frac{du}{dx}+\tfrac{1}{4}u = 0,$$

deren Lösungen in der Form

$$u = \int_A \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}$$

dargestellt sind. Da $g_0(x)=x$ sein soll, so haben wir (Nr. IV, S. 161) die Differentialgleichung für

$$\mathfrak{U} = \int_A \frac{(z-x)^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{x(x-1)}}$$

zu bilden. Dieselbe lautet

$$z(1-z)\frac{d^2\mathfrak{U}}{dz^2}-\tfrac{1}{4}\mathfrak{U} = 0.$$

Wir haben also nach Gleichung (4.) der Nr. IV

$$\mathfrak{u} = zu-\mathfrak{U};$$

ferner ist

$$u = 2\frac{d\mathfrak{U}}{dz},$$

also

$$\frac{du}{dz} = 2\frac{d^2\mathfrak{U}}{dz^2} = \frac{-1}{2z(z-1)}\mathfrak{U},$$

d. h. wir finden*)

$$\mathfrak{u} = zu+2z(z-1)\frac{du}{dz}.$$

Für $m=4$ sei

$$P_4(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)=\psi(x), \quad u=\int_A \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}};$$

wir finden zunächst für die Coefficienten der Differentialgleichung ($E_{\frac{3}{2}}$.), der

$$\mathfrak{U} = \int_A \frac{(z-x)^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{\psi(x)}}$$

*) Vgl. *Fuchs*, dieses Journal, Bd. 83 S. 30 ff.

genügt, die Werthe

$$Q_4(z, \tfrac{3}{2}) = -\tfrac{8}{3}\psi(z), \quad Q_3(z, \tfrac{3}{2}) = -\tfrac{16}{3}\psi'(z), \quad Q_2(z, \tfrac{3}{2}) = -3\psi''(z),$$
$$Q_1(z, \tfrac{3}{2}) = -\tfrac{1}{3}\psi^{(3)}(z), \quad Q_0(z, \tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{2},$$

so dass

$$-\mathfrak{U} = -\frac{8}{3}\psi(z)\frac{d^3u}{dz^3} - \frac{16}{3}\psi'(z)\frac{d^2u}{dz^2} - 3\psi''(z)\frac{du}{dz} - \frac{1}{3}\psi^{(3)}(z)u$$

ist. Nach Gleichung (4.) Nr. IV ist aber

$$\mathfrak{u} = \int_A \frac{x\,dx}{\sqrt{\psi(x)(z-x)}} = -\mathfrak{U} + 2z\frac{d\mathfrak{U}}{dz},$$

wir finden also*)

$$\mathfrak{u} = [z - \tfrac{1}{3}\psi^{(3)}(z)]u - 3\psi''(z)\frac{du}{dz} - \frac{16}{3}\psi'(z)\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{8}{3}\psi(z)\frac{d^3u}{dz^3}.$$

Berlin, 21. Februar 1896.

*) Vgl. *Fuchs*, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1889, II, S. 716.

Zur Theorie der adjungirten Differentialgleichung.

(Von *Paul Günther**)).

Stellt man in bekannter Weise (*Fuchs*, d. Journ. Bd. 66, S. 130) ein Fundamentalsystem der homogenen linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung $P(y) = 0$ in der Form

$$y_1 = v_1, \quad y_2 = v_1 \int v_2 dx, \quad \ldots, \quad y_n = v_1 \int v_2 dx \int \cdots \int v_n dx$$

dar und setzt

$$\eta_i = v_1 v_2 \ldots v_i, \quad A_i(y) = \eta_i \frac{d}{dx}(\eta_i^{-1} y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

so ist, da $P(y) = 0$ durch das einzige Integral von $A_1 = 0$ befriedigt wird, $P = B_1 A_1$, wo B_1 einen linearen Differentialausdruck $(n-1)$-ter Ordnung bedeutet. Durch Fortsetzung dieser Schlussweise ergiebt sich die Darstellung (*Frobenius*, d. Journ. Bd. 76, S. 264, *Thomé*, ebenda S. 278ff. Bd. 96, S. 197) $P = A_n A_{n-1} \ldots A_1$. Setzt man nun

$$M_{hi} = \eta_{n-i}^{-1} \int \eta_{n-i-1}^{-1} \eta_{n-i} dx \int \cdots \int \eta_h^{-1} \eta_{h+1} dx, \quad P_h = A_{n-h} A_{n-h-1} \ldots A_1,$$

$$(h = 1, 2, \ldots, n; \quad i = 0, 1, \ldots, n-h)$$

so folgt durch Addition der Gleichungen

$$M_{h\lambda} P_\lambda = \frac{d}{dx}(M_{h\lambda} P_{\lambda+1}) - M_{h,\lambda+1} P_{\lambda+1}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, \ldots, n-h \\ M_{n,n-h+1} = 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{h0} P_0 = \frac{d}{dx} \sum_{i=0}^{n-h} M_{hi} P_{i+1},$$

wodurch die Multiplicatoreigenschaft der M_{h0} in Evidenz gesetzt ist.

Die M_{h0} gehen aus den y_h hervor, indem man $\eta_1, \ldots, \eta_n$ durch $\eta_n^{-1}, \ldots, \eta_1^{-1}$ ersetzt, sie befriedigen folglich (vgl. *Frobenius*, *Thomé*, a. a. O.; *Grünfeld*, dieses Journal Bd. 98, S. 333ff.) die Differentialgleichung $P'(z) = A_1' A_2' \ldots A_n'$, wo

$$A_i'(z) = \eta_i^{-1} \frac{d}{dx}(\eta_i z) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gesetzt wurde. Diese Form des *adjungirten* Differentialausdruckes $P'(z)$ lässt (*Thomé*, *Frobenius*, a. a. O.) die Reciprocität mit $P(y)$ am deutlichsten hervortreten. Beachtet man nun, dass (*Fuchs*, a. a. O., *Frobenius*, ds. Journ. Bd. 77 S. 256 unten)

$$D(y_1 \ldots y_\alpha) = |y_h^{(i-1)}| = \eta_1 \ldots \eta_\alpha, \qquad (i, h = 1, 2, \ldots, \alpha)$$

$$D(y_1 \ldots y_{\alpha-1}) D(y_1 \ldots y_{\alpha+1}) D(y_1 \ldots y_\alpha)^{-2} = \frac{d}{dx} D(y_1 \ldots y_{\alpha-1}, y_{\alpha+1}) D(y_1 \ldots y_\alpha)^{-1}$$

ist, so ergiebt sich sofort die bekannte Darstellung der M_{h0} durch die y_h

$$M_{h0} = D(y_1 \ldots y_{h-1}, y_{h+1} \ldots y_n) D(y_1 \ldots y_n)^{-1}$$

aus der bekanntlich u. a. hervorgeht, dass die M_{h0} ein Fundamentalsystem von $P'(z) = 0$ bilden und eine lineare Substitution erfahren, wenn die $y_1 \ldots y_n$ durch ein anderes Fundamentalsystem von $P(y) = 0$ ersetzt werden. Die Coefficienten von $P'(z) = 0$ sind also Determinanten-Quotienten, deren Zähler und Nenner sich bei dieser Aenderung der y_α (und daher der M_{h0}) mit demselben constanten Factor multipliciren, und folglich nach dem Satze des Herrn *Appell* (Annales de l'École Norm. Série II, Bd. 10, S. 400) rational durch die Coefficienten von $P(y)$ und deren Ableitungen ausdrückbar.

In ähnlicher Weise kann man den *Appell*schen Satz auch anwenden, um zu zeigen, dass die n_λ Grössen $D(y_1 \ldots y_\lambda)$, wo $y_1 \ldots y_\lambda$ eine beliebige Combination der $y_1 \ldots y_n$ bedeutet (*Fuchs*, Sitzungsberichte 1888, II, S. 1115) eine lineare Differentialgleichung mit *rationalen* Coefficienten befriedigen.

*) Aus nachgelassenen Notizen herausgegeben von Herrn *Ludwig Schlesinger*.

Ueber Multiplication und Nichtverschwinden *Dirichlet*scher Reihen*).

(Von Herrn *F. Mertens* in Wien.)

1.

Es seien

$$\begin{array}{llll} u_1^{(1)}, & u_2^{(1)}, & u_3^{(1)}, & \ldots \\ u_1^{(2)}, & u_2^{(2)}, & u_3^{(2)}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{(r)}, & u_2^{(r)}, & u_3^{(r)}, & \ldots \end{array}$$

Unbestimmte und man setze zur Abkürzung

$$u_1^{(i)} + u_2^{(i)} + \cdots + u_n^{(i)} = U_n^{(i)}.$$

Die Glieder des Products der r Polynome

$$U_n^{(1)}, \quad U_n^{(2)}, \quad \ldots, \quad U_n^{(r)}$$

haben alle die Gestalt

$$u_\alpha^{(1)} u_\beta^{(2)} \ldots u_\varepsilon^{(r)},$$

wo $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ der Zahlenreihe 1, 2, …, n angehören, und zerfallen in zwei Klassen, je nachdem das Product der Stellenzeiger $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ die Zahl n übersteigt oder nicht.

In den Gliedern der zweiten Klasse kann das Product $\alpha\beta\ldots\varepsilon$ nur eine der Zahlen 1, 2, …, n sein. Fasst man daher alle Glieder zusammen, in welchen dieses Product einen und denselben Werth hat, und setzt zu diesem Ende

$$\Sigma u_\alpha^{(1)} u_\beta^{(2)} \ldots u_\varepsilon^{(r)} = t_m,$$

wo die Summe über alle Lösungen der Gleichung

$$\alpha\beta\ldots\varepsilon = m$$

*) Diese Schrift ist eine verkürzte und mit einigen Aenderungen verbundene Wiedergabe des Inhalts zweier der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien vorgelegten Aufsätze: „Ueber *Dirichlet*sche Reihen“. — „Ueber das Nichtverschwinden *Dirichlet*scher Reihen mit reellen Gliedern“. Sitzungsb. Bd. CIV, December 1895.

in ganzen positiven Zahlen $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ zu erstrecken ist, so wird die Summe der Glieder der zweiten Klasse

$$= t_1+t_2+\cdots+t_n.$$

In den Gliedern der ersten Klasse muss wenigstens einer der Stellenzeiger $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ die in $n^{\frac{1}{r}}$ enthaltene grösste ganze Zahl ν übersteigen. Bezeichnet demnach Σ_i die Summe aller Producte $u_\alpha^{(1)} u_\beta^{(2)} \ldots u_\varepsilon^{(r)}$, in welchen unter den Stellenzeigern $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ der $i$te der erste über ν liegende ist, so vertheilen sich die Glieder der ersten Klasse genau unter die r Summen

$$\Sigma_1, \quad \Sigma_2, \quad \ldots, \quad \Sigma_r$$

und man hat identisch

$$(1.) \qquad U_n^{(1)} U_n^{(2)} \ldots U_n^{(r)} = t_1+t_2+\cdots+t_n+\Sigma_1+\Sigma_2+\cdots+\Sigma_r.$$

Jedes Glied von Σ_i muss eine der Unbestimmten

$$u_{\nu+1}^{(i)}, \quad u_{\nu+2}^{(i)}, \quad \ldots, \quad u_n^{(i)}$$

als Factor enthalten. Alle Glieder, in welchen eine dieser Unbestimmten, $u_m^{(i)}$, vorkommt, haben die Gestalt

$$u_m^{(i)} u_a^{(\varrho)} u_b^{(\sigma)} \ldots u_e^{(\tau)},$$

wo $\varrho, \sigma, \ldots, \tau$ die Zahlen 1, 2, $\ldots$, r nach Auschluss von i bezeichnen, und gehen aus der Multiplication von $u_m^{(i)}$ mit allen Gliedern $u_a^{(\varrho)} u_b^{(\sigma)} \ldots u_e^{(\tau)}$ des Products

$$P_i = U_n^{(\varrho)} U_n^{(\sigma)} \ldots U_n^{(\tau)}$$

hervor, in welchen

$$ab \ldots e > \frac{n}{m}$$

ist und überdies in dem Falle $i > 1$ die $i-1$ ersten unter den Stellenzeigern $a, b, \ldots, e$ die Zahl ν nicht übersteigen. Bezeichnet demnach $(p, q)_i$ die Summe aller Glieder von P_i, in welchen

$$p < ab \ldots e \leqq q$$

ist und die $i-1$ ersten unter den Stellenzeigern $a, b, \ldots, e \leqq \nu$ sind, und n_k die grösste in $\frac{n}{k}$ enthaltene ganze Zahl, so ist $(n_m, n^{r-1})_i$ der Coefficient von $u_m^{(i)}$ in Σ_i und man hat

$$\Sigma_i = u_{\nu+1}^{(i)}(n_{\nu+1}, n^{r-1})_i + u_{\nu+2}^{(i)}(n_{\nu+2}, n^{r-1})_i + \cdots + u_n^{(i)}(n_n, n^{r-1})_i.$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$u_k^{(i)} + u_{k+1}^{(i)} + \cdots + u_n^{(i)} = s_k^{(i)},$$

so wird

$$(2.) \quad \Sigma_i = s_{\nu+1}^{(i)}(n_{\nu+1},\ n^{\nu-1})_i + s_{\nu+2}^{(i)}(n_{\nu+2},\ n_{\nu+1})_i + \cdots + s_n^{(i)}(n_n,\ n_{n-1})_i.$$

2.

Es seien r Grössenreihen

$$\begin{array}{llll} a_1^{(1)}, & a_2^{(1)}, & a_3^{(1)}, & \ldots, \\ a_1^{(2)}, & a_2^{(2)}, & a_3^{(2)}, & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{(r)}, & a_2^{(r)}, & a_3^{(r)}, & \ldots, \end{array}$$

mit folgenden zwei Eigenschaften gegeben:

1°. Für je zwei Zahlen p, q, von welchen $p \leqq q$ ist, sei

$$\text{mod.}(a_p^{(i)} + a_{p+1}^{(i)} + \cdots + a_q^{(i)}) \leqq G_i q^{\lambda},$$

wo G_i eine gegebene Grösse und λ eine gegebene unter der Einheit liegende nicht negative Zahl bezeichnen.

2°. Es sei

$$\text{mod.}\, a_1^{(i)} + \frac{1}{2}\,\text{mod.}\, a_2^{(i)} + \cdots + \frac{1}{n}\,\text{mod.}\, a_n^{(i)} < (1+\log n)^{e_i},$$

wo e_i gegeben ist.

Der ersten Eigenschaft zufolge convergirt jede der unendlichen Reihen

$$a_1^{(i)} + \tfrac{1}{2} a_2^{(i)} + \tfrac{1}{3} a_3^{(i)} + \cdots.$$

Denn man hat, wenn zur Abkürzung

$$\frac{1}{p} a_p^{(i)} + \frac{1}{p+1} a_{p+1}^{(i)} + \cdots + \frac{1}{q} a_q^{(i)} = T,$$

$$a_p^{(i)} + a_{p+1}^{(i)} + \cdots + a_m^{(i)} = b_m$$

gesetzt wird, nach der *Abel*schen Umformung

$$T = b_p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) + b_{p+1}\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}\right) + \cdots + b_q \cdot \frac{1}{q}$$

und daher

$$\text{mod.}\, T \leqq \frac{\text{mod.}\, b_p}{p(p+1)} + \frac{\text{mod.}\, b_{p+1}}{(p+1)(p+2)} + \cdots + \frac{\text{mod.}\, b_q}{q}.$$

Nach der Annahme wird demnach

$$\text{mod.}\, T \leqq \frac{G_i p^{\lambda}}{p(p+1)} + \frac{G_i (p+1)^{\lambda}}{(p+1)(p+2)} + \cdots + \frac{G_i q^{\lambda}}{q};$$

es ist aber nach dem binomischen Satze

$$\frac{1}{p^{1-\lambda}(p+1)} < \frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{1}{p^{1-\lambda}} - \frac{1}{(p+1)^{1-\lambda}}\right),$$

$$\frac{1}{(p+1)^{1-\lambda}(p+2)} < \frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{1}{(p+1)^{1-\lambda}} - \frac{1}{(p+2)^{1-\lambda}}\right),$$

. . . . . .

und demzufolge

$$\text{(3.)} \qquad \text{mod.}\, T < \frac{G_i}{1-\lambda} \cdot \frac{1}{p^{1-\lambda}}.$$

Man setze nun in der Identität (1.) allgemein

$$u_m^{(i)} = \frac{1}{m} a_m^{(i)}$$

und

$$C_m = \Sigma a_\alpha^{(1)} a_\beta^{(2)} \ldots a_\varepsilon^{(r)},$$

wo die Summe über alle Lösungen $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ der Gleichung

$$\alpha\beta\ldots\varepsilon = m$$

in ganzen positiven Zahlen zu erstrecken ist.

Es wird dann

$$t_m = \frac{1}{m} C_m$$

und nach (3.)

$$\text{mod.}\, s_m^{(i)} < \frac{G_i}{1-\lambda} \cdot \frac{1}{m^{1-\lambda}}.$$

Nach (2.) folgt hieraus

$$\text{mod.}\, \Sigma_i \leqq \text{mod.}\, s_{\nu+1}^{(i)} . \text{mod.}(n_{\nu+1},\ n^{r-1})_i + \text{mod.}\, s_{\nu+2}^{(i)} \text{mod.}(n_{\nu+2},\ n_{\nu+1})_i + \cdots$$

$$< \frac{G_i}{(1-\lambda)(1+\nu)^{1-\lambda}} (\text{mod.}(n_{\nu+1},\ n^{r-1})_i + \text{mod.}(n_{\nu+2},\ n_{\nu+1})_i + \cdots + \text{mod.}(n_n,\ n_{n-1})_i);$$

da aber identisch

$$(n_n,\ n_{n-1})_i + (n_{n-1},\ n_{n-2})_i + \cdots + (n_{\nu+1},\ n^{r-1})_i = P_i - Q$$

ist, wo Q einen gewissen Inbegriff von Gliedern des Products P_i bezeichnet, so ergiebt sich nach Ersetzung jedes Gliedes von $P_i - Q$ durch seinen Modul

$$\text{mod.}(n_n,\ n_{n-1})_i + \text{mod.}(n_{n-1},\ n_{n-2})_i + \cdots + \text{mod.}(n_{\nu+1},\ n^{r-1})_i < (1+\log n)^{\sigma_i}$$

und daher

$$\text{mod.}\, \Sigma_i < \frac{G_i (1+\log n)^{\sigma_i}}{(1-\lambda)(1+\nu)^{1-\lambda}},$$

wo

$$\sigma_i = e_1 + e_2 + \cdots + e_r - e_i.$$

Wird demnach eine Grösse, deren Modul die Grenze g nicht übersteigt, kurz mit $\{g\}$ bezeichnet und

$$\frac{G_1(1+\log n)^{\sigma_1}+G_2(1+\log n)^{\sigma_2}+\cdots+G_r(1+\log n)^{\sigma_r}}{1-\lambda}=H_n$$

gesetzt, so ergiebt sich

$$(4.)\quad U_n^{(1)}U_n^{(2)}\ldots U_n^{(r)} = C_1+\tfrac{1}{2}C_2+\tfrac{1}{3}C_3+\cdots+\frac{1}{n}C_n+\left\{\frac{H_n}{(1+\nu)^{1-\lambda}}\right\}.$$

Da

$$\frac{1}{(1+\nu)^{1-\lambda}}<\frac{1}{n^{\frac{1-\lambda}{r}}}$$

ist und $\frac{H_n}{n^{\frac{1-\lambda}{r}}}$ mit wachsendem n beliebig klein wird, so zeigt die vorstehende Gleichung, dass das Product der r Reihen

$$\begin{aligned}
&a_1^{(1)}+\tfrac{1}{2}a_2^{(1)}+\tfrac{1}{3}a_3^{(1)}+\cdots,\\
&a_1^{(2)}+\tfrac{1}{2}a_2^{(2)}+\tfrac{1}{3}a_3^{(2)}+\cdots,\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&a_1^{(r)}+\tfrac{1}{2}a_2^{(r)}+\tfrac{1}{3}a_3^{(r)}+\cdots
\end{aligned}$$

durch die Reihe

$$C_1+\tfrac{1}{2}C_2+\tfrac{1}{3}C_3+\cdots$$

dargestellt wird.

Es ist noch von Interesse, eine obere Grenze für den Modul der Summe

$$S=\frac{1}{p}C_p+\frac{1}{p+1}C_{p+1}+\cdots+\frac{1}{q}C_q$$

zu ermitteln, wo $p>1$ angenommen wird.

Da nach (4.)

$$U_q^{(1)}U_q^{(2)}\ldots U_q^{(r)} = C_1+\tfrac{1}{2}C_2+\cdots+\frac{1}{q}C_q+\left\{\frac{H_q}{(1+q_1)^{1-\lambda}}\right\},$$

$$U_{p-1}^{(1)}U_{p-1}^{(2)}\ldots U_{p-1}^{(r)} = C_1+\tfrac{1}{2}C_2+\cdots+\frac{1}{p-1}C_{p-1}+\left\{\frac{H_{p-1}}{(1+p_1)^{1-\lambda}}\right\}$$

ist, wo q_1, p_1 die in $q^{\frac{1}{r}}$, $(p-1)^{\frac{1}{r}}$ enthaltenen grössten ganzen Zahlen bezeichnen, so folgt durch Subtraction

$$\begin{aligned}
S = {}&(U_q^{(1)}-U_{p-1}^{(1)})U_q^{(2)}U_q^{(3)}\ldots U_q^{(r)}+(U_q^{(2)}-U_{p-1}^{(2)})U_{p-1}^{(1)}U_q^{(3)}\ldots U_q^{(r)}+\cdots\\
&+(U_q^{(r)}-U_{p-1}^{(r)})U_{p-1}^{(1)}U_{p-1}^{(2)}\ldots U_{p-1}^{(r-1)}-\left\{\frac{H_q}{(1+q_1)^{1-\lambda}}\right\}+\left\{\frac{H_{p-1}}{(1+p_1)^{1-\lambda}}\right\};
\end{aligned}$$

es ist aber nach (3.)

$$\mathrm{mod.}(U_q^{(i)} - U_{p-1}^{(i)}) < \frac{G_i}{1-\lambda} \cdot \frac{1}{p^{1-\lambda}}$$

und nach der Annahme

$$\mathrm{mod.}\, U_q^{(2)} \ldots U_q^{(r)} < (1+\log q)^{\sigma_1},$$
$$\mathrm{mod.}\, U_{p-1}^{(1)} U_q^{(3)} \ldots U_q^{(r)} < (1+\log q)^{\sigma_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Daher wird

$$\mathrm{mod.}\, S < \frac{G_1(1+\log q)^{\sigma_1} + G_2(1+\log q)^{\sigma_2} + \cdots + G_r(1+\log q)^{\sigma_r}}{(1-\lambda)p^{1-\lambda}} + \frac{H_q}{(1+q_1)^{1-\lambda}} + \frac{H_{p-1}}{(1+p_1)^{1-\lambda}}$$
$$< \frac{3H_q}{(1+p_1)^{1-\lambda}}$$

und demzufolge

$$\mathrm{mod.}\, S < 3H_q \cdot \frac{1}{p^{\frac{1-\lambda}{r}}}. \tag{5.}$$

3.

Es sei, über alle Theiler δ von m erstreckt,

$$\Sigma C_\delta = f(m)$$

und

$$f(1) + \tfrac{1}{2}f(2) + \tfrac{1}{3}f(3) + \cdots + \frac{1}{n^2} f(n^2) = \Theta,$$

$$\psi(z) = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\zeta},$$

$$P = \left(\psi(n^2) - \psi\left(\frac{n^2}{2}\right)\right)\frac{C_2}{2} + \left(\psi(n^2) - \psi\left(\frac{n^2}{3}\right)\right)\frac{C_3}{3} + \cdots + \left(\psi(n^2) - \psi\left(\frac{n^2}{n}\right)\right)\frac{C_n}{n},$$

$$Q = \psi\left(\frac{n^2}{n+1}\right)\frac{C_{n+1}}{n+1} + \psi\left(\frac{n^2}{n+2}\right)\frac{C_{n+2}}{n+2} + \cdots + \psi\left(\frac{n^2}{n^2}\right)\frac{C_{nn}}{n^2},$$

wo ζ die grösste in z enthaltene ganze Zahl bezeichnet. Es ist dann identisch

$$\Theta = C_1\psi(n^2) + \tfrac{1}{2}C_2\psi\left(\frac{n^2}{2}\right) + \tfrac{1}{3}C_3\psi\left(\frac{n^2}{3}\right) + \cdots + \frac{1}{n^2}C_{nn}\psi\left(\frac{n^2}{n^2}\right)$$
$$= \psi(n^2)\left(C_1 + \tfrac{1}{2}C_2 + \tfrac{1}{3}C_3 + \cdots + \frac{1}{n}C_n\right) + Q - P.$$

Da

$$\psi\left(\frac{n^2}{n+1}\right) \geqq \psi\left(\frac{n^2}{n+2}\right) \geqq \cdots \geqq \psi\left(\frac{n^2}{n^2}\right)$$

und nach (5.)

$$\mathrm{mod.}\left(\frac{1}{n+1}C_{n+1}+\frac{1}{n+2}C_{n+2}+\cdots+\frac{1}{q}C_q\right)<\frac{H_{nn}}{n^{\frac{1-\lambda}{r}}}$$

ist, wofern $q\leqq n^2$, so wird der *Abel*schen Umformung

$$Q=\frac{1}{n+1}C_{n+1}\left(\psi\left(\frac{n^2}{n+1}\right)-\psi\left(\frac{n^2}{n+2}\right)\right)$$
$$+\left(\frac{1}{n+1}C_{n+1}+\frac{1}{n+2}C_{n+2}\right)\left(\psi\left(\frac{n^2}{n+2}\right)-\psi\left(\frac{n^2}{n+3}\right)\right)+\cdots$$

zufolge

$$\mathrm{mod.}\,Q<\frac{H_{nn}}{n^{\frac{1-\lambda}{r}}}\psi\left(\frac{n^2}{n+1}\right)\leqq\frac{H_{nn}}{n^{\frac{1-\lambda}{r}}}\psi(n)$$
$$<\frac{H_{nn}(1+\log n)}{n^{\frac{1-\lambda}{r}}}.$$

Ferner ist

$$\log(h+1)-\log h-\frac{1}{h+1}=\log\frac{1}{1-\frac{1}{h+1}}-\frac{1}{h+1}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{(h+1)^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{(h+1)^3}+\cdots$$
$$<\frac{1}{2h(h+1)}$$

und demzufolge

$$0<\log(h+1)-\log h-\frac{1}{h+1}<\frac{1}{2h}-\frac{1}{2h+2}.$$

Wird $h=\varepsilon,\ \varepsilon+1,\ \ldots,\ n^2-1$ gesetzt und summirt, wo ε die grösste in $\frac{n^2}{k}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet und $k\leqq n$ angenommen wird, so folgt

$$0<\log\frac{n^2}{\varepsilon}-\psi(n^2)+\psi\left(\frac{n^2}{k}\right)<\frac{1}{2\varepsilon};$$

da aber

$$\frac{n^2-k}{k}<\varepsilon\leqq\frac{n^2}{k}$$

ist, so ergiebt sich

$$\log k\leqq\log\frac{n^2}{\varepsilon}<\log k+\log\frac{n^2}{n^2-k}<\log k+\frac{k}{n^2-k}$$

und man hat

$$\log k+\frac{k}{n^2-k}-\psi(n^2)+\psi\left(\frac{n^2}{k}\right)>0,$$

$$\log k-\psi(n^2)+\psi\left(\frac{n^2}{k}\right)<\frac{k}{2(n^2-k)}$$

oder

$$\log k - \psi(n^2) + \psi\left(\frac{n^2}{k}\right) = \left\{\frac{k}{n^2-n}\right\}.$$

Multiplicirt man mit $\frac{1}{k} C_k$ und erwägt, dass nach (5.)

$$\text{mod.}\ \frac{1}{k} C_k < \frac{3H_n}{k^{\frac{1-\lambda}{r}}}$$

ist, so ergiebt die Summation von $k = 2$ bis $k = n$

$$\tfrac{1}{2} C_2 \log 2 + \tfrac{1}{3} C_3 \log 3 + \cdots + \frac{1}{n} C_n \log n - P$$

$$= \left\{\frac{3H_n}{n^2-n}\right\}\left(2^{1-\frac{1-\lambda}{r}} + 3^{1-\frac{1-\lambda}{r}} + \cdots + n^{1-\frac{1-\lambda}{r}}\right) = \left\{\frac{3H_n}{n^{\frac{1-\lambda}{r}}}\right\}.$$

Es wird also

$$(6.)\quad \begin{cases} \Theta = \psi(n^2)\left(C_1 + \tfrac{1}{2} C_2 + \cdots + \frac{1}{n} C_n\right) \\ \qquad -\tfrac{1}{2} C_2 \log 2 - \tfrac{1}{3} C_3 \log 3 - \cdots - \frac{1}{n} C_n \log n + \left\{\frac{3H_n + (1+\log n) H_{nn}}{n^{\frac{1-\lambda}{r}}}\right\}. \end{cases}$$

Diese Gleichung ist noch einer weiteren bemerkenswerthen Umformung fähig.

Es sei der Kürze halber

$$\tfrac{1}{2} a_2^{(i)} \log 2 + \tfrac{1}{3} a_3^{(i)} \log 3 + \cdots + \frac{1}{n} a_n^{(i)} \log n = V_n^{(i)},$$

$$\frac{1}{p} a_p^{(i)} \log p + \frac{1}{p+1} a_{p+1}^{(i)} \log(p+1) + \cdots + \frac{1}{q} a_q^{(i)} \log q = T',$$

$$\frac{1}{p} a_p^{(i)} + \frac{1}{p+1} a_{p+1}^{(i)} + \cdots + \frac{1}{m} a_m^{(i)} = b'_m,$$

$$\Sigma a_\alpha^{(1)} a_\beta^{(2)} \ldots a_\varepsilon^{(r)} \log \mu_i = C_m^{(i)},$$

wo die Summe über alle Lösungen der Gleichung

$$\alpha\beta\ldots\varepsilon = m$$

zu erstrecken und μ_i der $i$te der Stellenzeiger α, β, …, ε ist. Man setze in der Identität (1.) für ein bestimmtes i

$$u_m^{(i)} = \frac{1}{m} a_m^{(i)} \log m$$

und für alle von i verschiedenen Stellenzeiger ϱ, σ, …

$$u_m^{(\varrho)} = \frac{1}{m} a_m^{(\varrho)}, \quad u_m^{(\sigma)} = \frac{1}{m} a_m^{(\sigma)}, \quad \ldots$$

Es wird dann

$$t_m = \frac{1}{m} C_m^{(i)},$$

$$\text{mod.}\, a_1^{(i)} \log 1 + \tfrac{1}{2} \text{mod.}\, a_2^{(i)} \log 2 + \cdots + \frac{1}{n} \text{mod.}\, a_n^{(i)} \log n < \log n (1+\log n)^{\sigma_i},$$

$$T' = b_q' \log q - b_{q-1}' (\log q - \log(q-1)) - \cdots - b_p' (\log(p+1) - \log p)$$

und daher nach (3.)

$$\begin{aligned} \text{mod.}\, T' &\leqq \text{mod.}\, b_q' . \log q + \text{mod.}\, b_{q-1}' (\log q - \log(q-1)) + \cdots \\ &\qquad \cdots + \text{mod.}\, b_p' (\log(p+1) - \log p) \\ &< \frac{G_i}{1-\lambda} \cdot \frac{1}{p^{1-\lambda}} (\log q + \log q - \log(q-1) + \cdots + \log(p+1) - \log p) \\ &< \frac{2 G_i \log q}{(1-\lambda) p^{1-\lambda}}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt nach (2.)

$$\text{mod.}\, \Sigma_i < \frac{2 G_i \log n}{(1-\lambda)(1+\nu)^{1-\lambda}} \cdot (1+\log n)^{\sigma_i}$$

und für jedes von i verschiedene k

$$\text{mod.}\, \Sigma_k < \frac{G_i \log n}{(1-\lambda)(1+\nu)^{1-\lambda}} \cdot (1+\log n)^{\sigma_k}.$$

Es wird somit

$$V_n^{(i)} U_n^{(\varrho)} U_n^{(\sigma)} \ldots U_n^{(\tau)} = C_1^{(i)} + \tfrac{1}{2} C_2^{(i)} + \cdots + \frac{1}{n} C_n^{(i)} + \left\{ \frac{H_n \log n}{(1+\nu)^{1-\lambda}} \right\} + \left\{ \frac{G_i \log n (1+\log n)^{\sigma_i}}{(1-\lambda)(1+\nu)^{1-\lambda}} \right\}.$$

Da

$$C_m^{(1)} + C_m^{(2)} + \cdots + C_m^{(r)} = C_m \log m$$

ist, so ergiebt die Summation der vorstehenden Gleichung über alle Werthe 1, 2, ..., r von i

$$(7.) \quad \begin{cases} V_n^{(1)} U_n^{(2)} U_n^{(3)} \ldots U_n^{(r)} + V_n^{(2)} U_n^{(1)} U_n^{(3)} \ldots U_n^{(r)} + \cdots + V_n^{(r)} U_n^{(1)} U_n^{(2)} \ldots U_n^{(r-1)} \\ \qquad = \tfrac{1}{2} C_2 \log 2 + \tfrac{1}{3} C_3 \log 3 + \cdots + \dfrac{1}{n} C_n \log n + \left\{ \dfrac{(r+1) H_n \log n}{(1+\nu)^{1-\lambda}} \right\}. \end{cases}$$

Mit Hülfe von (4.) und (7.) geht die Gleichung (6.) in

$$(8.) \quad \begin{cases} \Theta = \psi(n^2) U_n^{(1)} U_n^{(2)} \ldots U_n^{(r)} - V_n^{(1)} U_n^{(2)} \ldots U_n^{(r)} - \cdots - V_n^{(r)} U_n^{(1)} \ldots U_n^{(r-1)} \\ \qquad + \left\{ \dfrac{(\psi(n^2) + (r+1)\log(n+3)) H_n + (1+\log n) H_{nn}}{n^{\frac{1-\lambda}{r}}} \right\} \end{cases}$$

über.

Wenn die Grössen $a_m^{(i)}$ den Bedingungen genügen, dass

$$f(1), \quad f(2), \quad f(3), \quad \ldots$$

nicht negativ sind, insbesondere aber $f(1)=1$ ist, und dass zwei von den Polynomen $U_n^{(1)}$, $U_n^{(2)}$, ..., $U_n^{(r)}$, etwa $U_n^{(1)}$ und $U_n^{(2)}$, für jedes n denselben Modul R_n haben, so sind die Summen der unendlichen Reihen

$$a_1^{(1)}+\tfrac{1}{2}a_2^{(1)}+\tfrac{1}{3}a_3^{(1)}+\cdots,$$
$$a_1^{(2)}+\tfrac{1}{2}a_2^{(2)}+\tfrac{1}{3}a_3^{(2)}+\cdots$$

von Null verschieden.

Denn man hat

$$\psi(n^2) < 1+2\log n,$$
$$\text{mod.}\, U_n^{(i)} < \frac{G_i}{1-\lambda}$$

und daher, wenn zur Abkürzung

$$\frac{G_3 G_4 \ldots G_r}{(1-\lambda)^{r-2}} = K$$

gesetzt wird,

$$\text{mod.}\, \psi(n^2) U_n^{(1)} U_n^{(2)} \ldots U_n^{(r)} \leqq K(1+2\log n) R_n^2.$$

Ferner wird

$$V_n^{(i)} = \left(\tfrac{1}{2}a_2^{(i)}+\tfrac{1}{3}a_3^{(i)}+\cdots+\frac{1}{n}a_n^{(i)}\right)(\log 2-\log 1)$$
$$+\left(\tfrac{1}{3}a_3^{(i)}+\tfrac{1}{4}a_4^{(i)}+\cdots+\frac{1}{n}a_n^{(i)}\right)(\log 3-\log 2)$$
$$+\cdots+\frac{1}{n}a_n^{(i)}(\log n-\log(n-1))$$

und daher der Ungleichung

$$\log(k+1)-\log k < \frac{3}{2(k+1)}$$

zufolge nach (3.)

$$\text{mod.}\, V_n^{(i)} < \frac{3G_i}{2(1-\lambda)}\left(\frac{1}{2^{1-\lambda}}+\frac{1}{3^{1-\lambda}}+\cdots+\frac{1}{n^{1-\lambda}}\right)$$
$$< \frac{3G_i}{2(1-\lambda)^2}.$$

Hieraus folgt, da $G_1 = G_2$ angenommen werden darf,

$$\text{mod.}\, V_n^{(1)} U_n^{(2)} U_n^{(3)} \ldots U_n^{(r)} \leqq \frac{3G_1 K}{2(1-\lambda)^2}\cdot R_n,$$
$$\text{mod.}\, V_n^{(2)} U_n^{(1)} U_n^{(3)} \ldots U_n^{(r)} \leqq \frac{3G_1 K}{2(1-\lambda)^2}\cdot R_n,$$
$$\text{mod.}\, V_n^{(3)} U_n^{(1)} U_n^{(2)} \ldots U_n^{(r)} \leqq \frac{3K}{2(1-\lambda)}\cdot R_n^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Wird daher zur Abkürzung

$$a_n = K\Big(1+2\log n+\frac{3(r-2)}{2(1-\lambda)}\Big)$$

$$b = \frac{3G_1K}{2(1-\lambda)^2}$$

gesetzt, so folgt aus (8.)

$$1 < a_n R_n^2+2bR_n+\frac{(4+(r+3)\log n)H_n+(1+\log n)H_{nn}}{n^{\frac{1-\lambda}{r}}}.$$

Man ermittele nun eine möglichst kleine Zahl s, welche den Bedingungen

$$\frac{(4+(r+3)\log s)H_s+(1+\log s)H_{ss}}{s^{\frac{1-\lambda}{r}}} < \frac{1}{2},$$

$$\frac{b}{a_s}+\frac{G_1}{(1-\lambda)(1+s)^{1-\lambda}} < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2a_s}+\frac{b^2}{a_s^2}}$$

genügt. Es wird dann

$$a_s R_s^2+2bR_s > \tfrac{1}{2}$$

also auch

$$R_s+\frac{b}{a_s} > \sqrt{\frac{1}{2a_s}+\frac{b^2}{a_s^2}}.$$

Da aber nach (3.)

$$R_n = R_s+\Big\{\frac{G_1}{(1-\lambda)(1+s)^{1-\lambda}}\Big\}$$

ist, wenn $n > s$, so wird von $n = s$ an

$$R_n > \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2a_s}+\frac{b^2}{a_s^2}}$$

4.

Die Reihen, welche bei dem *Dirichlet*schen Beweise für das Vorkommen von unendlich vielen Primzahlen in einer arithmetischen Progression $Mt+N$ zur Anwendung gelangen, erfüllen (für $\varrho = 0$) die in den Abschnitten 2 und 3 geforderten Bedingungen, wenn — nach der Bezeichnung von *Dirichlet* — die divergente Reihe L_0 ausgeschlossen wird. Man braucht nur, um sich hievon zu überzeugen, unter $a_m^{(\varrho)}$ das Product von Einheitswurzeln, dessen sich *Dirichlet* zur Isolirung der Primzahlen von der Form $Mt+N$ bedient, oder die Null zu verstehen, je nachdem m zu M theilerfremd ist oder nicht.

Es wird dann

$$\lambda = 0 \quad G_i = \tfrac{1}{2}\varphi(\mathrm{M}) \quad r = \varphi(\mathrm{M})-1 \quad e_i = 1$$

Die Grössen

$$f(1), \quad f(2), \quad f(3), \ldots$$

sind hier nicht negative ganze Zahlen und es ist $f(1) = 1$. Denn man hat

$$f(m_0 m_1) = f(m_1),$$

wenn m_0 in einer Potenz von M aufgeht und m_1 zu M theilerfremd ist, und

$$f(m_1 m_2) = f(m_1) f(m_2),$$

wenn m_1, m_2 zu einander und zu M theilerfremd sind. Man braucht also nur für eine zu M theilerfremde Primzahlpotenz q^π zu zeigen, dass $f(q^\pi) \geqq 0$ ist.

Ist μ die kleinste positive Zahl, für welche der Ausdruck

$$1+(a_q^{(1)})^\mu+(a_q^{(2)})^\mu+\cdots+(a_q^{(r)})^\mu$$

von Null verschieden ausfällt, so sind 1, $a_q^{(1)}$, $a_q^{(2)}$, ..., μte Einheitswurzeln und man hat, wofern $\mu > 1$ ist, für jede unter μ liegende positive Zahl k

$$1+(a_q^{(1)})^k+(a_q^{(2)})^k+\cdots+(a_q^{(r)})^k = 0.$$

Ist daher ω eine primitive μte Einheitswurzel und giebt h_α an, wie viele unter den Grössen 1, $a_q^{(1)}$, $a_q^{(2)}$, ... mit ω^α zusammenfallen, so hat man von $k = 1$ bis $k = \mu-1$

$$h_0+h_1\omega+h_2\omega^2+\cdots+h_{\mu-1}\omega^{\mu-1} = 0$$

und für $k = 0$

$$h_0+h_1+h_2+\cdots+h_{\mu-1} = 1+r.$$

Hieraus folgt

$$h_0 = h_1 = \cdots = h_{\mu-1} = \frac{1+r}{\mu}$$

und dies gilt auch noch für $\mu = 1$. Demzufolge ist

$$\frac{1}{(1-z)(1-a_q^{(1)}z)\ldots(1-a_q^{(r)}z)} = ((1-z)(1-\omega z)(1-\omega^2 z)\ldots(1-\omega^{\mu-1}z))^{-h_0}$$
$$= (1-z^\mu)^{-h_0}$$

und $f(q^\pi)$ muss als Coefficient von z^π in der Entwickelung dieses Ausdrucks eine ganze nicht negative Zahl sein.

Gelangen nun bei der Bildung von $a_m^{(1)}$ imaginäre Einheitswurzeln zur Verwendung und ist $a_m^{(2)}$ conjugirt zu $a_m^{(1)}$, so haben $U_n^{(1)}$ und $U_n^{(2)}$ denselben Modul. Es kann also keine der Reihen

$$a_1^{(1)}+\tfrac{1}{2}a_2^{(1)}+\tfrac{1}{3}a_3^{(1)}+\cdots$$
$$a_1^{(2)}+\tfrac{1}{2}a_2^{(2)}+\tfrac{1}{3}a_3^{(2)}+\cdots$$

verschwinden.

Das Nichtverschwinden der Reihen mit reellen Gliedern bedarf eines besonderen Beweises.

5.

Es sei

$$a_1^{(r)}+\tfrac{1}{2}a_2^{(r)}+\tfrac{1}{3}a_3^{(r)}+\cdots$$

eine der in dem *Dirichlet*schen Beweise vorkommenden Reihen, in welchen zur Bildung von $a_m^{(r)}$ nur die Wurzeln $+1$ und -1 verwendet werden.

Man setze, über alle Theiler δ von m erstreckt,

$$\Sigma a_\delta^{(r)} = F(m)$$

und

$$\Theta = \frac{F(1)}{\sqrt{1}}+\frac{F(2)}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{F(n^2)}{\sqrt{n^2}}$$

$$R = \frac{a_1^{(r)}}{\sqrt{1}}+\frac{a_2^{(r)}}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{a_n^{(r)}}{\sqrt{n}}$$

$$\psi(z) = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{\zeta}}$$

$$P = \frac{a_2^{(r)}}{\sqrt{2}}\left(\psi(n^2)-\psi\left(\frac{n^2}{2}\right)\right)+\frac{a_3^{(r)}}{\sqrt{3}}\left(\psi(n^2)-\psi\left(\frac{n^2}{3}\right)\right)+\cdots+\frac{a_n^{(r)}}{\sqrt{n}}\left(\psi(n^2)-\psi\left(\frac{n^2}{n}\right)\right),$$

$$Q = \frac{a_{n+1}^{(r)}}{\sqrt{n+1}}\psi\left(\frac{n^2}{n+1}\right)+\frac{a_{n+2}^{(r)}}{\sqrt{n+2}}\psi\left(\frac{n^2}{n+2}\right)+\cdots+\frac{a_{nn}^{(r)}}{\sqrt{nn}}\psi\left(\frac{n^2}{n^2}\right),$$

wo ζ die grösste in z enthaltene ganze Zahl bezeichnet. Es wird dann

$$(9.)\quad \left\{\begin{aligned}\Theta &= \frac{a_1^{(r)}}{\sqrt{1}}\psi\left(\frac{n^2}{1}\right)+\frac{a_2^{(r)}}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{n^2}{2}\right)+\cdots+\frac{a_{nn}^{(r)}}{\sqrt{nn}}\psi\left(\frac{n^2}{n^2}\right)\\ &= R\psi(n^2)-P+Q.\end{aligned}\right.$$

Da

$$2\sqrt{m}-2\sqrt{m-1}-\frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{m}-\sqrt{m-1}}{\sqrt{m}(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})} = \frac{1}{\sqrt{m}(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})^2}$$
$$\leqq \frac{1}{m\sqrt{m}} \leqq (2+\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{m}}-\frac{1}{\sqrt{m+1}}\right)$$

ist, so ergiebt sich, wenn $m = a+1,\ a+2,\ \ldots,\ b$ gesetzt und summirt wird,

$$(10.)\quad 0 < 2\sqrt{b}-2\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\frac{1}{\sqrt{a+2}}-\cdots-\frac{1}{\sqrt{b}} < \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{a+1}}$$

Hieraus folgt, wenn $k \leqq n$ und ε die grösste in $\frac{n^2}{k}$ enthaltene ganze Zahl ist,

$$0 < 2n - 2\sqrt{\varepsilon} - \psi(n^2) + \psi\left(\frac{n^2}{k}\right) < \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}+1} < \frac{2+\sqrt{2}}{n} \cdot \sqrt{k};$$

setzt man aber

$$n^2 = k\varepsilon + \gamma,$$

so wird

$$\sqrt{\frac{n^2}{k}} - \sqrt{\varepsilon} = \frac{\gamma}{\sqrt{k}(n+\sqrt{k\varepsilon})} < \frac{\sqrt{k}}{n}$$

und demzufolge

$$-\frac{2\sqrt{k}}{n} < 2n - \frac{2n}{\sqrt{k}} - \psi(n^2) + \psi\frac{n^2}{k} < \frac{2+\sqrt{2}}{n} \cdot \sqrt{k}$$

oder

$$2n - \frac{2n}{\sqrt{k}} - \psi(n^2) + \psi\left(\frac{n^2}{k}\right) = \left\{\frac{2+\sqrt{2}}{n}\right\}\sqrt{k}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{a_k^{(r)}}{\sqrt{k}}$ und summirt von $k = 1$ bis $k = n$, so folgt

$$2nR - 2nU_n^{(r)} - P = \{2+\sqrt{2}\}$$

Nach (9.) ist demnach

$$\Theta = 2nU_n^{(r)} - (2n - \psi(n^2))R + Q + \{2+\sqrt{2}\}.$$

Da ferner der Zahlenwerth der Summe

$$a_\mu^{(r)} + a_{\mu+1}^{(r)} + \cdots + a_q^{(r)}$$

nie die Grenze $\frac{1}{2}\varphi(M)$ überschreitet und sowohl die Grössen

$$1, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{n}}$$

als auch die Grössen

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}}\psi\left(\frac{n^2}{n+1}\right), \quad \frac{1}{\sqrt{n+2}}\psi\left(\frac{n^2}{n+2}\right), \quad \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{nn}}\psi\left(\frac{n^2}{n^2}\right)$$

eine abnehmende Reihe bilden, so ist nach der *Abel*schen Umformung

$$R = \left\{\tfrac{1}{2}\varphi(M)\right\},$$

$$Q = \left\{\tfrac{1}{2}\varphi(M) \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}}\psi\left(\frac{n^2}{n+1}\right)\right\} = \left\{\frac{\varphi(M)\psi(n)}{2\sqrt{n}}\right\};$$

nach (10.) ist aber für $b = n^2$ und $a = 0$ und für $b = n$ und $a = 0$

$$2n - \psi(n^2) = \{2+\sqrt{2}\},$$
$$2\sqrt{n} - \psi(n) > 0.$$

und demzufolge

$$(2n - \psi(n^2))R = \{(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2})\varphi(M)\}.$$
$$Q = \{\varphi(M)\}.$$

Hiernach wird

$$\Theta = 2n\,U_n^{(r)} + \{(2+\tfrac{1}{2}\sqrt{2})\varphi(M)+2+\sqrt{2}\}. \tag{11.}$$

Keine der Zahlen

$$F(1),\quad F(2),\quad F(3),\quad \ldots$$

kann negativ sein. Ist nämlich m_0 ein Theiler einer Potenz von M und m_1 zu M theilerfremd, so ist

$$F(m_0 m_1) = F(m_1).$$

Sind m_1, m_2 zu einander und zu M theilerfremd, so ist

$$F(m_1 m_2) = F(m_1)F(m_2).$$

Ist aber q^π eine zu M theilerfremde Primzahlpotenz, so ist $F(q^\pi)$ der Coefficient von z^π in der Entwickelung des Ausdruckes

$$\frac{1}{(1-z)(1-a_q^{(r)}z)},$$

welcher nur einen der Werthe

$$\frac{1}{(1-z)^2},\quad \frac{1}{1-z^2}$$

haben kann. Insbesondere ist daher für eine gerade Potenz von q immer

$$F(q^{2\mu}) \geqq 1$$

und also auch für jede Quadratzahl

$$F(k^2) \geqq 1.$$

Demzufolge ist

$$\Theta \geqq 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$
$$> \log n,$$

und es folgt aus (11.)

$$U_n^{(r)} > \frac{\log n}{2n} - \frac{(2+\tfrac{1}{2}\sqrt{2})\varphi(M)+2+\sqrt{2}}{2n}.$$

Bestimmt man also s so, dass

$$\tfrac{1}{2}\log s \geqq 2+\sqrt{2}+(3+\tfrac{1}{2}\sqrt{2})\varphi(M)$$

wird, und erwägt, dass nach der *Abel*schen Umformung

$$U_n^{(r)} - U_s^{(r)} = \left\{\frac{\varphi(M)}{2s}\right\}$$

ist, wenn $n > s$, so wird von $n = s$ an

$$\begin{aligned} U_n^{(r)} &> U_s^{(r)} - \frac{\varphi(M)}{2s} \\ &> \frac{\log s}{2s} - \frac{2+\sqrt{2}+(3+\tfrac{1}{2}\sqrt{2})\varphi(M)}{2s} \\ &> \frac{\log s}{4s}. \end{aligned}$$

6.

Die Sätze der Abschnitte 2 und 3 sind, wie ich in dem ersten der angezogenen Aufsätze gezeigt habe, auch auf die unendlichen Reihen anwendbar, welche bei dem Beweise des *Dirichlet*schen Satzes gebraucht werden, dass jede eigentlich primitive binäre quadratische Form von nicht quadratischer Determinante unendlich viele Primzahlen von zulässiger Linearform darstellt.

Ueber eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen auf lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

(Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.)

Die nachstehende Abhandlung behandelt lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten. Es wird die Untersuchung, ob der Differentialausdruck durch ein System normaler Differentialausdrücke sich darstellen lässt und welches diese Darstellung ist, vollständig durchgeführt. Sodann wird die Integration solcher Differentialgleichungen im Zusammenhange auseinandergesetzt. Hierbei ist die Abhandlung des Verfassers Bd. 96 dieses Journals zu Grunde gelegt; bei nicht homogenen derartigen Differentialgleichungen soll über den zweiten Theil der Differentialgleichung die Voraussetzung gemacht werden, die in der Abhandlung des Verfassers Bd. 107 dieses Journals vorkommt.

In dieser Abhandlung werden zugleich in Nr. 2 III, Nr. 3 I, Nr. 4 I, Nr. 5 V in Bezug auf lineare Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, deren Differentialausdruck durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, weitere Untersuchungen vorgenommen, von denen die in Nr. 3 I enthaltene sich auf die Durchführung dieser Darstellung selbst bezieht, und wesentlich zur Vereinfachung des in Abhandlung Bd. 96 angegebenen Verfahrens dient.

1.

Definition der hier untersuchten homogenen linearen Differentialgleichungen.

Die vorgelegte Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten sei

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1 \frac{dy}{dx} + p_2 y = 0. \tag{1.}$$

Der Differentialausdruck in (1.) sei durch $F_2(y, x)$ bezeichnet. Es ist zu

ermitteln, ob $F_2(y, x)$ durch ein System

(2.) $$f^{(1)}(y, x) = y_1, \quad f^{(2)}(y_1, x)$$

darstellbar ist, wo $f^{(1)}$ und $f^{(2)}$ homogene lineare Differentialausdrücke erster Ordnung mit rationalen Coefficienten sind. Der Coefficient der höchsten Ableitung in den linearen Differentialausdrücken wird gleich 1 gesetzt. Ein solcher Differentialausdruck erster Ordnung ist *immer ein normaler* d. h. derselbe ist unter der Form $e^W \Phi(e^{-W} y, x)$ darstellbar, wo $\Phi(y, x)$ ein regulärer Differentialausdruck ($\Phi = 0$ hat nur reguläre Integrale), die Grösse W in dem determinirenden Factor e^W gleich Null oder eine rationale Function ist, die in Partialbrüche zerlegt zum absoluten Gliede Null hat. Der determinirende Factor in $f^{(1)}$ sei $e^{W^{(1)}}$ und es werde

(3.) $$e^{-W^{(1)}} F_2(e^{W^{(1)}} y, x) = 0$$

betrachtet. Diese Differentialgleichung enthält das Integral der regulären Differentialgleichung

(4.) $$e^{-W^{(1)}} f^{(1)}(e^{W^{(1)}} y, x) = 0.$$

Daher ist bei jedem Punkte im Endlichen und bei $x = \infty$ der charakteristische Index in (3.) kleiner als die Ordnung 2. Der determinirende Factor in $f^{(2)}$ sei $e^{W^{(2)}}$. Der Differentialausdruck

(5.) $$e^{-W^{(2)}} F_2(e^{W^{(2)}} y, x)$$

ist dem Systeme gleich

(6.) $$e^{-W^{(2)}} f^{(1)}(e^{W^{(2)}} y, x) = s, \quad e^{-W^{(2)}} f^{(2)}(e^{W^{(2)}} s, x).$$

In $e^{-W^{(2)}} f^{(2)}(e^{W^{(2)}} s, x)$ ist der charakteristische Index bei jedem Punkte im Endlichen und bei $x = \infty$ gleich Null, in $e^{-W^{(2)}} f^{(1)}(e^{W^{(2)}} y, x)$ gleich oder kleiner als die Ordnung 1. Der charakteristische Index des Systemes (6.) ist bei jedem Punkte gleich der Summe der charakteristischen Indices der Bestandtheile. Also ist derselbe auch in (5.) bei jedem Punkte kleiner als die Ordnung 2. Es ist mithin die rationale Function W, die in Partialbrüche zerlegt, zum absoluten Gliede Null hat, der Bedingung gemäss zu bestimmen, dass in

(7.) $$e^{-W} F_2(e^W y, x)$$

bei jedem Punkte der charakteristische Index kleiner als die Ordnung 2 wird. Wenn W in Partialbrüche zerlegt ist, so sei bei einem beliebigen

Punkte $x = a$ oder $x = \infty$ durch w der Theil bezeichnet, welcher die Glieder, die in diesem Punkte unendlich werden, enthält, bezüglich $w = 0$. Dann stimmen in $e^{-W}F_2(e^W y,\ x) = 0$ und in $e^{-w}F_2(e^w y, x) = 0$ bei diesem Punkte der charakteristische Index und die Exponentengleichung überein. w kann nur bei einem singulären Punkte von $F_2(y, x) = 0$ von Null verschieden sein.

Es sind daher bei jedem singulären Punkte von $F_2(y, x) = 0$ die Grössen e^w aufzustellen, wo w gleich Null oder von der Form

$$\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}, \quad \text{bezüglich} \quad \sum_1^n c_\alpha x^\alpha \quad \text{bei} \quad x = \infty$$

ist, so dass in $e^{-w}F_2(e^w y, x) = 0$ der charakteristische Index kleiner als die Ordnung 2 wird. Diese Grössen e^w sind die *fundamentalen determinirenden Factoren bei diesem Punkte.*

Ein Product von fundamentalen determinirenden Factoren bei den singulären Punkten von $F_2(y, x) = 0$, wobei auf jeden singulären Punkt einer dieser Factoren kommt, liefert dann jede Grösse e^W, so dass in (7.) bei jedem Punkte der charakteristische Index kleiner als die Ordnung 2 wird. (Vergl. Abhandl. Bd. 96 Nr. 5).

2.

Ermittelung der fundamentalen determinirenden Factoren.

Bei einem *singulären* Punkte $x = a$ (im Endlichen) von $F_2(y, x)$ sollen die in Nr. 1 definirten fundamentalen determinirenden Factoren e^w ermittelt werden. Der charakteristische Index bei diesem Punkte sei h. Die Aufsuchung der fundamentalen determinirenden Factoren geschieht nach Abh. Bd. 96 Nr. 4.

I. $h = 0$.

Bei $h = 0$ ist nur der fundamentale determinirende Factor $e^0 = 1$ vorhanden. Die zugehörige Exponentengleichung in $e^{-w}F_2(e^w y, x) = 0$ ist

$$(1.) \qquad r(r-1)+[p_1(x-a)]_{x=a}r+[p_2(x-a)^2]_{x=a} = 0.$$

Es sei jetzt $h > 0$.

Dann wird $\frac{dw}{dx} = z$ gesetzt, und es ist

$$(2.) \qquad A_\alpha = e^{-w}\frac{d^\alpha e^w}{dx^\alpha}, \quad A_1 = z, \quad A_2 = zA_1+\frac{dA_1}{dx} = z^2+\frac{dz}{dx}.$$

Der Ausdruck $e^{-w}F_2(e^w y, x)$ wird folgender

$$(3.) \qquad \begin{vmatrix} \frac{d^2y}{dx^2} + 2A_1 & \frac{dy}{dx} + A_2 \\ + p_1 & + A_1 p_1 \\ & + p_2 \end{vmatrix} y.$$

Die Differentialgleichung $e^{-w}F_2(e^w y, x) = 0$ ist also

$$(4.) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + (2z + p_1)\frac{dy}{dx} + \left(z^2 + p_1 z + p_2 + \frac{dz}{dx}\right) y = 0.$$

II. $h = 1$.

a) Der fundamentale determinirende Factor $e^0 = 1$. Die zugehörige Exponentengleichung ist

$$(5.) \qquad r + \left[\frac{p_2}{p_1}(x-a)\right]_{x=a} = 0.$$

b) Der fundamentale determinirende Factor

$$e^w, \quad w = \sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}.$$

Nach Abh. Bd. 96 Nr. 4 I wird der dortige Ausdruck (2.) hier

$$(6.) \qquad z + p_1,$$

aus welchem für $z = \frac{dw}{dx}$ die höchste Potenz von $(x-a)^{-1}$ und die $n-1$ niedigeren, die in den Summanden z, p_1 vorkommen, ausfallen müssen. Der Theil in der Entwickelung von p_1 nach Potenzen von $x-a$, der die Potenzen von $(x-a)^{-1}$ mit Exponenten $\geqq 2$ enthält, sei durch P_1 bezeichnet, so wird durch

$$(7.) \qquad -P_1 = z = \frac{dw}{dx}$$

die Grösse w gegeben. Der charakteristische Index in $e^{-w}F_2(e^w y, x) = 0$ wird um 1 niedriger als die Ordnung 2. Die zugehörige Exponentengleichung ergiebt sich aus (4.) für $z = -P_1$. Der Theil in der Entwickelung von p_1 mit negativen Exponenten sei $P_1 + \frac{c}{x-a}$. p_1 soll in der Ordnung π_1 unendlich werden. Die Exponentengleichung ist dann

$$(8.) \quad -[p_1(x-a)^{\pi_1}]_{x=a} r + \left\{-p_1(x-a)^{\pi_1} c + p_2(x-a)^{\pi_1+1} - \frac{dp_1}{dx}(x-a)^{\pi_1+1}\right\}_{x=a} = 0.$$

III. $h = 2$.

p_1 soll in der Ordnung π_1 für $x = a$ unendlich werden, wo $\pi_1 = 0$, wenn p_1 nicht unendlich wird; p_2 soll in der Ordnung π_2 unendlich werden. In einem fundamentalen determinirenden Factor e^w kann w nur von der Form $\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$ sein. Gemäss dem Verfahren in Abh. Bd. 96 Nr. 4 I ergiebt sich hier Folgendes.

Aus dem Ausdrucke

$$z^2+p_1z+p_2 \tag{9.}$$

müssen für

$$z = \frac{dw}{dx}, \quad w = \sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$$

die höchste Potenz von $(x-a)^{-1}$ und die $n-1$ niedrigeren, die in den Summanden z^2, p_1z, p_2 vorkommen, ausfallen. Die grösste der positiven Zahlen, von denen die letzte jedenfalls grösser als Null ist,

$$\pi_1, \quad \frac{\pi_2}{2} \tag{10.}$$

sei g und trete zuletzt bei dem Zeiger c auf, wo $c = 1$ oder $= 2$.

A) $\pi_1 > \frac{\pi_2}{2}$.

Dann ist $\pi_1 > \pi_2-\pi_1$ und $\pi_2-\pi_1 \geqq 2$ (weil $h = 2$). $\pi_1 = g$, $\pi_2-\pi_1 = g^{(1)}$ geben die Werthe des Exponenten $n+1$ in

$$\sigma(x-a)^{-(n+1)} \tag{11.}$$

so dass, wenn die Grösse (11.) in (9.) eingesetzt wird, die höchste Potenz von $(x-a)^{-1}$, die in den Summanden von (9.) vorkommt, aus dem Gesammtausdrucke (9.) ausfällt. Der Coefficient σ wird bei $(x-a)^{-g}$ bestimmt durch die Gleichung

$$\sigma+[p_1(x-a)^g]_{x=a} = 0, \tag{12.}$$

bei $(x-a)^{-g^{(1)}}$ durch die Gleichung

$$\sigma+\left[\frac{p_2}{p_1}(x-a)^{g^{(1)}}\right]_{x=a} = 0. \tag{13.}$$

Es ergeben sich also *zwei einfache Hauptpotenzen:*

$$\sigma(x-a)^{-g} = -[p_1(x-a)^{\pi_1}]_{x=a}(x-a)^{-\pi_1}. \tag{14^a.}$$

$$\sigma^{(1)}(x-a)^{-g^{(1)}} = -\left[\frac{p_2}{p_1}(x-a)^{\pi_2-\pi_1}\right]_{x=a}(x-a)^{-(\pi_2-\pi_1)}. \tag{14^b.}$$

Die folgenden Glieder in z sind jetzt durch die bei (9.) angegebene Bedingung eindeutig bestimmt (Abh. Bd. 96, Nr. 4 I B). Der Ausdruck $z^2+p_1z+p_2$ sei durch $f(z)$ bezeichnet. In $\frac{\partial f(z)}{\partial z}$ sei an Stelle von z die Grösse (14ª.) bezüglich (14ᵇ.) eingesetzt, so fällt die höchste Potenz von $(x-a)^{-1}$, die in den Summanden $2z$, p_1 vorkommt, nicht aus, deren Coefficient sei bei (14ª.) durch K_a, bei (14ᵇ.) durch K_b bezeichnet. Mit diesem Coefficienten ist in dem aus der Bedingung (9.) hervorgehenden Gleichungssysteme in jeder folgenden Gleichung ein folgender Coefficient aus z multiplicirt. Nachdem z ermittelt ist, sei in $f(z)$ der Coefficient der Potenz von $(x-a)^{-1}$, deren Exponent um n niedriger als der höchste Exponent von $(x-a)^{-1}$ in den einzelnen Summanden z^2, p_1z, p_2 ist, bei (14ª.) durch C_a, bei (14ᵇ.) durch C_b bezeichnet. Werden die erhaltenen Ausdrücke für z in die Differentialgleichung (4.) eingesetzt, so wird der charakteristische Index um 1 niedriger als die Ordnung 2 (Abh. Bd. 96, l. c., Bd. 76 S. 298, 299). Aus (4.) erfolgt die zu (14ª.) gehörige Exponentengleichung

$$(15^a.) \qquad K_a r+C_a-g\sigma = 0,$$

die zu (14ᵇ.) gehörige

$$(15^b.) \qquad K_b r+C_b = 0.$$

B) $\pi_1 \leqq \frac{\pi_2}{2}$.

$\frac{\pi_2}{2}$ muss nun $\geqq 2$ und ganzzahlig sein, damit es einen Werth $n+1$ des Exponenten in $\sigma(x-a)^{-(n+1)}$ giebt, so dass, wenn diese Grösse für z in (9.) eingesetzt wird, die höchste Potenz von $(x-a)^{-1}$, die in den Summanden vorkommt, aus (9.) ausfällt. Da $h=2$ ist, so kommt die angegebene Bedingung darauf hinaus, dass $\frac{\pi_2}{2}$ ganzzahlig sein muss. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so ist durch $\frac{\pi_2}{2}=g$ der Werth des Exponenten $n+1$ gegeben. Der Coefficient σ ist Wurzel der Gleichung

$$(16.) \qquad \sigma^2+[p_1(x-a)^g]_{x=a}\sigma+[p_2(x-a)^{2g}]_{x=a} = 0.$$

a) Die Wurzeln der Gleichung (16.) seien einfach, σ_1 und σ_2. ***Zwei einfache Hauptpotenzen***:

$$(17^a.) \qquad \sigma_1(x-a)^{-g} = \sigma_1(x-a)^{-\frac{\pi_2}{2}}.$$

$$(17^b.) \qquad \sigma_2(x-a)^{-g} = \sigma_2(x-a)^{-\frac{\pi_2}{2}}.$$

Die übrigen Glieder in z sind wieder durch die bei (9.) angegebene Bedingung eindeutig bestimmt. $z^2+p_1z+p_2=f(z)$. In $\frac{\partial fz}{\partial z}$ sei an Stelle von z eine der Grössen (17.) eingesetzt, so fällt der Coefficient der höchsten Potenz von $(x-a)^{-1}$, die in den Summanden $2z$, p_1 vorkommt, nicht aus, dieser Coefficient sei bei (17ª.) durch K'_a, bei (17ᵇ.) durch K'_b bezeichnet. Nachdem z ermittelt ist, sei in $f(z)$ der Coefficient der Potenz von $(x-a)^{-1}$, deren Exponent um n niedriger als der höchste in den einzelnen Summanden ist, bei (17ª.) durch C'_a, bei (17ᵇ.) auf C'_b bezeichnet. Werden die erhaltenen Ausdrücke für z in die Differentialgleichung (4.) eingesetzt, so wird der charakteristische Index um 1 niedriger als die Ordnung 2. Aus (4.) ergiebt sich die zu (17ª.) gehörige Exponentengleichung

$$(18^a.) \qquad K'_a r+C'_a-g\sigma_1=0,$$

die zu (17ᵇ.) gehörige

$$(18^b.) \qquad K'_b r+C'_b-g\sigma_2=0.$$

b) Die Gleichung (16.) habe eine zweifache Wurzel σ. ***Eine zweifache Hauptpotenz:***

$$(19.) \qquad \sigma(x-a)^{-g}=\sigma(x-a)^{-\frac{\pi_2}{2}}.$$

$w=\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$ sei gleich $c_{-n}(x-a)^{-n}+w^{(1)}$ gesetzt, wo nun

$$(20.) \qquad c_{-n}(x-a)^{-n}=\frac{\sigma}{-\frac{\pi_2}{2}+1}(x-a)^{-\left(\frac{\pi_2}{2}-1\right)}.$$

Es sei der Ausdruck

$$(21.) \qquad e^{-c_{-n}(x-a)^{-n}}F_2(e^{c_{-n}(x-a)^{-n}}y,\ x)=F_2^{(1)}(y,\ x)$$

gesetzt. Nun ist die Grösse $w^{(1)}=\sum_1^{n-1} c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$, wo n gegeben ist und auch $c_{-(n-1)}$ und folgende Coefficienten Null sein können, so zu bestimmen, dass in $e^{-w^{(1)}}F_2^{(1)}(e^{w^{(1)}}y, x)$ der charakteristische Index kleiner als die Ordnung 2 wird.

$F_2^{(1)}(y, x)$ sei

$$(22.) \qquad \frac{d^2y}{dx^2}+p_1^{(1)}\frac{dy}{dx}+p_2^{(1)}y.$$

Gemäss (4.) erhält man

$$(23.)\quad p_1^{(1)} = 2\sigma(x-a)^{-\frac{\pi_2}{2}} + p_1,$$

$$(24.)\quad p_2^{(1)} = \sigma^2(x-a)^{-\pi_2} + p_1\sigma(x-a)^{-\frac{\pi_2}{2}} + p_2 - \frac{\pi_2}{2}\sigma(x-a)^{-\frac{\pi_2}{2}-1}.$$

Die Ordnungen, in denen $p_1^{(1)}$, $p_2^{(1)}$ unendlich werden, seien durch $\pi_1^{(1)}$, $\pi_2^{(1)}$ bezeichnet, $\pi_a^{(1)} = 0$, wenn $p_a^{(1)}$ nicht unendlich wird. Nun ist

$$2\sigma + \left[p_1(x-a)^{\frac{\pi_2}{2}}\right]_{x=a} = 0,$$

weil (16.) eine zweifache Wurzel hat. Daher ist $\pi_1^{(1)} < \frac{\pi_2}{2}$. Ferner folgt aus (16.) $\pi_2^{(1)} < \pi_2$. Der charakteristische Index h in $F_2^{(1)}(y, x)$ sei $2-\tau$, so ist $\tau \leqq \varrho$ bei einer ϱ-fachen, hier zweifachen Hauptpotenz. Daher kann $h = 0,\ 1,\ 2$ sein.

Es wird nun das früher bei $F_2(y, x)$ gebrauchte Verfahren jetzt auf den Ausdruck $F_2^{(1)}(y, x)$ angewandt.

$\alpha)$ $h = 0$.

Gemäss I wird $w^{(1)} = 0$, die Exponentengleichung entsprechend (1.). Ebenso, wenn der Punkt a in $F_2^{(1)}(y, x) = 0$ nicht singulär ist.

$\beta)$ $h = 1$.

Gemäss II a) $w^{(1)} = 0$, die Exponentengleichung entsprechend (5.).

Gemäss II b). An Stelle von (6.) tritt hier der Ausdruck

$$(25.)\qquad z + p_1^{(1)},$$

$z = \frac{dw^{(1)}}{dx}$, $w^{(1)} = \sum_1^{n-1} c_{-a}(x-a)^{-a}$, $n-1$ gegeben gleich $\frac{\pi_2}{2} - 2$, $c_{-(n-1)}$ und folgende Coefficienten dürfen Null sein. Da $\pi_1^{(1)} \leqq \frac{\pi_2}{2} - 1$ ist, so erfolgt aus IIb) der höchste Exponent von $(x-a)^{-1}$ in $\frac{dw^{(1)}}{dx}$ gleich oder kleiner als $\frac{\pi_2}{2} - 1$. Es ergiebt sich also aus IIb) ein brauchbarer Ausdruck $w^{(1)}$ und die zugehörige Exponentengleichung.

$\gamma)$ $h = 2$.

$w^{(1)}$ kann nicht gleich Null sein. An Stelle von III (9.) tritt hier der Ausdruck

$$(26.)\qquad z^2 + p_1^{(1)} z + p_2^{(1)},$$

$z = \frac{dw^{(1)}}{dx}$, $w^{(1)} = \sum_{1}^{n-1} c_{-\mathfrak{a}}(x-a)^{-\mathfrak{a}}$, $n-1$ gegeben gleich $\frac{\pi_2}{2}-2$, $c_{-(n-1)}$ und folgende Coefficienten dürfen Null sein. Es treten nun folgende Fälle ein entsprechend III.

In Bezug auf $\pi_1^{(1)}$ und $\pi_2^{(1)}$ sei die der Bedingung in III, A) entsprechende Bedingung erfüllt. Dann ist $\frac{\pi_2}{2}-1 \geqq \pi_1^{(1)} > \pi_2^{(1)} - \pi_1^{(1)}$. Daher giebt das Verfahren III, A) bezogen auf $F_2^{(1)}(y, x)$ zwei brauchbare Ausdrücke von $w^{(1)}$ und die zugehörigen Exponentengleichungen.

In Bezug auf $\pi_1^{(1)}$ und $\pi_2^{(1)}$ sei die der Bedingung in III, B) entsprechende Bedingung erfüllt. Dann ist die dortige Grösse g gleich $\frac{\pi_2^{(1)}}{2}$. Für die positiven ganzen Zahlen $\frac{\pi_2}{2}$ und $\frac{\pi_2^{(1)}}{2}$ gilt die Relation $\frac{\pi_2}{2}-1 \geqq \frac{\pi_2^{(1)}}{2}$. Der höchste Exponent von $(x-a)^{-1}$ in $z = \frac{dw^{(1)}}{dx}$ erhält daher durch $g = \frac{\pi_2^{(1)}}{2}$ einen brauchbaren Werth. Ist nun weiter die Bedingung III, B, a) erfüllt, so erhält man zwei Ausdrücke von $w^{(1)}$ und die zugehörigen Exponentengleichungen. Ist die Bedingung III, B, b) erfüllt, so hat $F_2^{(1)}(y, x) = 0$ eine zweifache Hauptpotenz

$$\sigma'(x-a)^{-\frac{\pi_2^{(1)}}{2}}. \tag{27.}$$

Dann wird

$$w^{(1)} = \frac{\sigma'}{-\frac{\pi_2^{(1)}}{2}+1}(x-a)^{-\left(\frac{\pi_2^{(1)}}{2}-1\right)} + w^{(2)} \tag{28.}$$

gesetzt, und zur Bestimmung von $w^{(2)}$ ist nun wieder wie oben bei (21.) zu verfahren. —

Der höchste Exponent von $(x-a)^{-1}$ in $\frac{dw^{(1)}}{dx}$ wurde in dem Vorhergehenden gleich oder kleiner als der höchste zulässige Werth $\frac{\pi_2}{2}-1$ befunden. Diese Eigenschaft, die hier direct nachgewiesen ist, beruht auf einem allgemeinen Satze. Nämlich der Ausdruck Abh. Bd. 96 No. 4 (12.) liefert überhaupt nur Hauptpotenzen $\sigma'(x-a)^{-\nu}$, in denen $\nu \leqq n$ ist. Mit diesem Ausdrucke fallen die hier betrachteten Ausdrücke (25.), (26.) zusammen. Denn die Ordnung, in welcher dort $p_{m-\varrho+\mathfrak{a}}^{(1)}$ unendlich wird, ist höchstens um $\mathfrak{a}(n+1)-1$ höher als in $p_{m-\varrho}^{(1)}$, weil bei einer ϱ-fachen Hauptpotenz in $\frac{d^{\mathfrak{b}} f(z) z^{m-h}}{dz^{\mathfrak{b}}}$ $(\mathfrak{b} = 0, \ldots, \varrho-1)$ für $z = \sigma(x-a)^{-(n+1)}$ die höchste

Potenz von $(x-a)^{-1}$, die in den Summanden $\frac{d^b z^m}{dz^b}$, $p_1 \frac{d^b z^{m-1}}{dz^b}$ etc. vorkommt, aus dem Gesammtausdrucke ausfällt; dagegen in $\frac{d^\varrho f(z) z^{m-h}}{dz^\varrho}$ dieses nicht der Fall ist. Die dem Ausdrucke Abh. Bd. 96 No. 4 (12.) entsprechenden Zahlen l. c. (5.) sind daher höchstens $n+1-1$, $n+1-\frac{1}{2}$, $n+1-\frac{1}{3}$ etc., woraus die Richtigkeit der Behauptung sich ergiebt. —

Es ist nun noch zu untersuchen, was eintritt, wenn der Fall, dass der charakteristische Index gleich 2 ist und dabei eine zweifache Hauptpotenz auftritt (III, B, b), sich fortwährend wiederholt. Diese Untersuchung kommt schliesslich darauf hinaus, dass in (19.) $\frac{\pi_2}{2} = 2$ gesetzt wird. Es ist $2\sigma+[p_1(x-a)^{\frac{\pi_2}{2}}]=0$, also $\pi_1 = \frac{\pi_2}{2} = 2$. Demnach ist der höchste Exponent von $(x-a)^{-1}$ in dem Ausdrucke $2z+p_1$ gleich oder kleiner als 1, in dem Ausdrucke $z^2+p_1 z+p_2$ gleich oder kleiner als 3. Daher wird der charakteristische Index in (4.) entweder 0 oder 2.

Also ist in allen Fällen, wenn überhaupt ein fundamentaler determinirender Factor in $F_2(y, x)=0$ bei dem singulären Punkte $x=a$ vorkommt, die Gesammtanzahl der Wurzeln der zu den fundamentalen determinirenden Factoren bei $x=a$ gehörigen Exponentengleichungen gleich zwei.

IV. Es soll nun untersucht werden, wie die Constanten in w in einem fundamentalen determinirenden Factor e^w und die Wurzeln der zugehörigen Exponentengleichung in $e^{-w}F_2(e^w y, x)=0$ aus den gegebenen Constanten in den Entwickelungen der Coefficienten p_1 und p_2 nach Potenzen von $x-a$ hervorgehen.

Fall I. $h=0$. Dort ist $w=0$, die Wurzeln der Gleichung (1.) sind rationale Ausdrücke der gegebenen Constanten und *einer* Quadratwurzel aus einem rationalen Ausdrucke gegebener Constanten, die auch wegfallen kann.

Fall II. $h=1$. Bei a) ist $w=0$, die Wurzel von Gleichung (5.) rational durch die gegebenen Constanten ausgedrückt. Bei b) sind die Constanten in w und die Wurzel der Gleichung (8.) rationale Ausdrücke der gegebenen Constanten.

Fall III. $h=2$. Bei A). Die Constanten in den beiden Grössen w gemäss (14.) etc. und die Wurzeln der Gleichungen (15.) setzen sich rational aus den gegebenen Constanten zusammen. Bei B, a). Die Constanten in den beiden Grössen w gemäss (17.) etc. und die Wurzeln der Gleichungen (18.) sind rationale Ausdrücke der gegebenen Constanten und *einer* Quadrat-

wurzel aus einem rationalen Ausdrucke gegebener Constanten, die auch wegfallen kann. Bei B, b). Der Coefficient σ in (20.) wird rational durch die gegebenen Constanten ausgedrückt, daher ebenso die Constanten in dem Differentialausdrucke $F_2^{(1)}(y, x)$ (22.). In Bezug auf letzteren Differentialausdruck treten nun wieder dieselben Fälle ein.

Es hat sich also Folgendes ergeben:

Die Constanten in den Grössen w in den fundamentalen determinirenden Factoren e^w und die Wurzeln der zugehörigen Exponentengleichungen bei dem einzelnen singulären Punkte sind entweder rationale Ausdrücke der gegebenen Constanten oder rationale Ausdrücke dieser Constanten und der Quadratwurzel aus einem einzigen rationalen Ausdrucke der gegebenen Constanten.

V. Es sind nun die fundamentalen determinirenden Factoren und zugehörigen Exponentengleichungen bei $x = \infty$ anzugeben, wenn dieser Punkt in $F_2(y, x) = 0$ *singulär* ist. Die Grössen e^w, $w = 0$ oder $= \sum_1^n c_\alpha x^\alpha$ sind aufzustellen, so dass in $e^{-w} F_2(e^w y, x) = 0$ bei $x = \infty$ der charakteristiche Index kleiner als die Ordnung 2 wird. Durch Substitution von $x = t^{-1}$ wird $F_2(y, x) = (-t^2)^2 F_2'(y, t)$, $w(t^{-1}) = w'$, und es geht $e^{-w} F_2(e^w y, x)$ in $(-t^2)^2 e^{-w'} F_2'(e^{w'} y, t)$ über. Es ist nun, wenn der Punkt $t = 0$ in $F_2'(y, t) = 0$ singulär ist, w' so zu bestimmen, dass in $e^{-w'} F_2'(e^{w'} y, t) = 0$ bei $t = 0$ der charakteristische Index kleiner als die Ordnung 2 wird, und die zugehörige Exponentengleichung aufzustellen. Dann sind $w'(x^{-1}) = w$ und dieselbe Exponentengleichung die gesuchten Elemente. Man kommt also auf die im Vorstehenden gegebene Behandlung bei einem Punkte im Endlichen zurück.

3.

Zerlegung des Differentialausdruckes zweiter Ordnung.

I. Der Differentialausdruck Nr. 1 (1.) $F_2(y, x)$

$$\text{(1.)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + p_1 \frac{dy}{dx} + p_2 y$$

mit rationalen Coefficienten soll durch ein System homogener linearer Differentialausdrücke erster Ordnung mit rationalen Coefficienten

$$\text{(2.)} \qquad f^{(1)}(y, x) = y_1, \quad f^{(2)}(y_1, x)$$

darstellbar sein, wo alsdann gemäss No. 1

$$\text{(3}^\text{a}\text{.)} \qquad f^{(1)}(y, x) = e^{W^{(1)}} \Phi_1(e^{-W^{(1)}} y, x),$$

$$\text{(3}^\text{b}\text{.)} \qquad f^{(2)}(y, x) = e^{W^{(2)}} \Phi_2(e^{-W^{(2)}} y, x)$$

normale Differentialausdrücke sind. Jeder der determinirenden Factoren $e^{W^{(1)}}$, $e^{W^{(2)}}$ ist nach No. 1 ein Product von fundamentalen determinirenden Factoren bei den singulären Punkten von $F_2(y, x) = 0$, von denen auf jeden dieser Punkte ein Factor kommt. Es ist also für die Zerlegbarkeit von $F_2(y, x)$ zunächst nothwendig, dass sich nach No. 2 bei jedem singulären Punkte von $F_2(y, x) = 0$ ein fundamentaler determinirender Factor ergeben habe. Dann war die Gesammtanzahl der Wurzeln der zu diesen Factoren gehörigen Exponentengleichungen bei diesem Punkte gleich zwei. Die fundamentalen determinirenden Factoren bei einem singulären Punkte von $F(y, x) = 0$ seien durch $e^{w^{(1)}}$ und $e^{w^{(2)}}$, die zu $e^{w^{(1)}}$ gehörige Wurzel der Exponentengleichung durch $R^{(1)}$, die zu $e^{w^{(2)}}$ gehörige durch $R^{(2)}$ bezeichnet; falls nur ein fundamentaler determinirender Factor vorhanden ist, so wird derselbe durch $e^{w^{(1)}} = e^{w^{(2)}}$, die eine Wurzel der zugehörigen Exponentengleichung durch $R^{(1)}$, die andere durch $R^{(2)}$ bezeichnet. Die singulären Punkte von $F_2(y, x) = 0$ im Endlichen (falls solche Punkte vorkommen, was z. B. nicht der Fall ist, wenn F_2 durch das System $\frac{dy}{dx} + My = y_1$, $\frac{dy_1}{dx} + Ny_1$, wo M, N Polynome von x sind, gegeben ist) seien durch a_1 bis $a_\varkappa$, die zugehörigen Grössen $e^{w^{(1)}}$, $e^{w^{(2)}}$, $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ durch $e^{w_\mathfrak{a}^{(1)}}$, $e^{w_\mathfrak{a}^{(2)}}$, $R_\mathfrak{a}^{(1)}$, $R_\mathfrak{a}^{(2)}$ $(\mathfrak{a} = 1, \ldots, \varkappa)$ bezeichnet, die zu $x = \infty$, wenn dieser Punkt singulär ist, gehörigen durch $e^{w_\infty^{(1)}}$, $e^{w_\infty^{(2)}}$, $R_\infty^{(1)}$, $R_\infty^{(2)}$, und wenn $x = \infty$ nicht singulär ist, so seien die Wurzeln der Exponentengleichung bei $x = \infty$ durch $R_\infty^{(1)}$, $R_\infty^{(2)}$ bezeichnet.

Es sei nun aus den fundamentalen determinirenden Factoren $e^{w^{(1)}}$, von denen auf jeden singulären Punkt von $F_2(y, x) = 0$ einer kommt, ein Product $e^{W^{(1)}}$ gebildet. Dann wird

$$e^{-W^{(1)}} F_2(e^{W^{(1)}} y, x) = G_2(y, x) \tag{4.}$$

gesetzt. In $G_2(y, x)$ ist jetzt bei jedem Punkte der charakteristische Index kleiner als die Ordnung 2. In $e^{-W^{(1)}} F_2(e^{W^{(1)}} y, x) = 0$ und $e^{-w^{(1)}} F_2(e^{w^{(1)}} y, x) = 0$ stimmen bei dem betreffenden Punkte charakteristischer Index und Exponentengleichung überein, die Exponentengleichung ist in No. 2 aufgestellt. Es ist daher bei jedem singulären Punkte von $F_2(y, x) = 0$ die Exponentengleichung von $G_2(y, x) = 0$ bereits gegeben, deren Wurzeln haben die in

Nr. 2 angegebene Beschaffenheit. Ein nichtsingulärer Punkt von $F_2(y, x) = 0$ ist auch nichtsingulärer Punkt von $G_2(y, x) = 0$.

Nun soll untersucht werden, ob $G_2(y, x)$ durch ein System darstellbar ist

$$\frac{dy}{dx} + p^{(1)}y = s, \quad \frac{ds}{dx} + gs, \tag{5.}$$

wo $\frac{dy}{dx} + p^{(1)}y$ ein regulärer Differentialausdruck. Dieses geschieht nach Abh. Bd. 96 Nr. 6.

Die Wurzel der Exponentengleichung von $\frac{dy}{dx} + p^{(1)}y = 0$ bei einem beliebigen Punkte ist auch Wurzel der Exponentengleichung von $G_2(y, x) = 0$. Die Exponentengleichung von $\frac{dy}{dx} + p^{(1)}y = 0$ bei $x = a$ ist

$$r + [p^{(1)}(x-a)]_{x=a} = 0. \tag{6.}$$

Wird $p^{(1)}$ in Partialbrüche zerlegt, so ist der Coefficient von $\frac{1}{x-a_\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a} = 1, \ldots, \varkappa)$ daher gleich $-R_\mathfrak{a}^{(1)}$, ($R_\mathfrak{a}^{(1)}$ kann auch Null sein). $p_1^{(1)}$ kann noch in λ $(\lambda \geqq 0)$ anderen Punkten unendlich in erster Ordnung werden, dieselben seien $a_{\varkappa+1}$ bis $a_{\varkappa+\lambda}$, diese Punkte sind in $G_2(y, x) = 0$ nicht singulär. Daher wird $p_1^{(1)}$

$$p_1^{(1)} = \sum_1^{\varkappa} \frac{-R_\mathfrak{a}^{(1)}}{x-a_\mathfrak{a}} + \sum_{\varkappa+1}^{\varkappa+\lambda} \frac{\alpha_\mathfrak{a}}{x-a_\mathfrak{a}}. \tag{7.}$$

Wenn $F_2(y, x) = 0$ im Endlichen keine singulären Punkte hat, so fällt in (7.) der Ausdruck $\sum_1^{\varkappa}$ fort. Die Punkte $a_\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} = \varkappa+1, \ldots, \varkappa+\lambda)$ sind in $\frac{dy}{dx} + p^{(1)}y = 0$ ausserwesentlich singulär, daher ist

$$-\sum_{\varkappa+1}^{\varkappa+\lambda} \frac{\alpha_\mathfrak{a}}{x-a_\mathfrak{a}} = \frac{d \log \Phi(x)}{dx}, \tag{8.}$$

wo $\Phi(x)$ eine ganze rationale Function von x, deren Grad $\tau = -\sum_{\varkappa+1}^{\varkappa+\lambda} \alpha_\mathfrak{a} \geqq 0$ ist. $\Phi(x)$ kann nur in erster Ordnung in einem Punkte verschwinden, da derselbe im $G_2(y, x) = 0$ nicht singulär ist. Um τ zu bestimmen, wird in (7.) $x = t^{-1}$ gesetzt, wodurch

$$\tau = -\sum_1^{\varkappa} R_\mathfrak{a}^{(1)} - \left[\frac{p^{(1)}(t^{-1})}{t}\right]_{t=0} \tag{9.}$$

hervorgeht. Die Exponentengleichung von $\frac{dy}{dx} + p^{(1)}y = 0$ bei $x = \infty$ ist

$$r - \left[\frac{p^{(1)}(t^{-1})}{t}\right]_{t=0} = 0. \tag{10.}$$

Daher wird der Ausdruck von τ

$$\tau = -\sum_{1}^{\varkappa} R_{\alpha}^{(1)} - R_{\infty}^{(1)}. \tag{11.}$$

Es ist also für die Zerlegbarkeit von $F_2(y, x)$ nothwendig, dass für den Ausdruck rechts in (11.) ein ganzzahliger Werth gleich oder grösser als Null besteht.

Hier wird nun weiter folgende allgemeine Bemerkung in Bezug auf einen homogenen linearen Differentialausdruck beliebiger Ordnung mit rationalen Coefficienten gemacht, welche für die Vereinfachung der Untersuchung, ob ein solcher Ausdruck sich in ein System normaler Differentialausdrücke zerlegen lässt, von Wichtigkeit ist.

Gemäss Abh. Bd. 96 Nr. 3 (12.) besteht nachstehender Satz:

Der homogene lineare Differentialausdruck $m$ter Ordnung $F_m(y, x)$ mit rationalen Coefficienten sei durch das System

$$F_{m-k}(y, x) = s, \quad f_k(s, x) \tag{12.}$$

darstellbar, wo F_{m-k} und f_k ebenfalls solche Ausdrücke $(m-k)$-ter und $k$ter Ordnung sind, alle mit dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1. Nun wird der Ausdruck $e^{-w} F_m(e^w y, x)$ durch das System

$$e^{-w} F_{m-k}(e^w y, x) = s', \quad e^{-w} f_k(e^w s', x) \tag{13.}$$

gegeben. Hieraus folgt bei einem beliebigen Punkte im Endlichen oder $x = \infty$: Wenn e^w ein fundamentaler determinirender Factor von F_m ist, so auch von wenigstens einem der Bestandtheile in (12.) F_{m-k} oder f_k und umgekehrt. Bei diesem Punkte sind die Wurzeln der Exponentengleichung von $e^{-w} F_{m-k}(e^w y, x) = 0$ und die der Exponentengleichung von $e^{-w} f_k(e^w s', x) = 0$, letztere nachdem ein und dieselbe ganze Zahl hinzuaddirt ist, zusammen die Wurzeln der Exponentengleichung von $e^{-w} F_m(e^w y, x) = 0$.

Ferner ist bei einer regulären Differentialgleichung die Summe der Wurzeln der Exponentengleichungen bei $\varkappa$ Punkten im Endlichen, unter denen die singulären sich befinden, und bei dem singulären oder nicht singulären Punkte $x = \infty$ ganzzahlig (vgl. Abh. Bd. 96 S. 262).

Es sei nun $F_m(y, x)$ so in ein System homogener linearer Differentialausdrücke mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 zerlegbar

$$f^{(1)}(y, x) = y_1, \quad f^{(2)}(y_1, x) = y_2, \quad \ldots, \quad f^{(k)}(y_{k-1}, x), \tag{14.}$$

dass ein System S normaler Differentialausdrücke an der Spitze steht; die

Ordnung dieses Systemes S sei $N \leqq m$. Bei $F_m(y, x)$ sollen bei den singulären Punkten im Endlichen und bei dem singulären oder nichtsingulären Punkte $x = \infty$ die fundamentalen determinirenden Factoren und die Wurzeln der zugehörigen Exponentengleichungen aufgestellt sein, diese Wurzeln seien durch R bezeichnet, ihre Anzahl bei einem solchen Punkte ist $\leqq m$ (Abh. Bd. 96 Nr. 4 II.). Gemäss den Angaben bei (13.) lassen sich bei jedem dieser Punkte N der Wurzeln R so mit den Wurzeln der Exponentengleichungen in den regulären Differentialausdrücken, die zu allen Bestandtheilen des Systemes S gehören, paaren, dass die Elemente eines Paares bei demselben fundamentalen determinirenden Factor vorkommen und sich nur um eine ganze Zahl unterscheiden. Bei einem nichtsingulären Punkte von $F_m = 0$ sind gemäss den Angaben bei (13.) die Wurzeln der Exponentengleichungen in den vorhin genannten regulären Differentialausdrücken ganzzahlig. Unter Hinzunahme des Vorhergehenden folgt nun: *Die Summe derjenigen Wurzeln R bei allen singulären Punkten im Endlichen von $F_m(y, x)$ und dem Punkte $x = \infty$, die bei der genannten Zuordnung auf einen Bestandtheil des Systemes S kommen, ist ganzzahlig.*

Demnach ist bei der versuchsweisen Aufstellung der determinirenden Factoren der Bestandtheile des Systemes S zu beachten, ob die Wurzeln R sich dem angegebenen Satze entsprechend gruppiren lassen.

Nun sei $N = m$, also $F_m(y, x)$ durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar. Dann erstreckt sich diese Gruppirung auf die Gesammtheit der Wurzeln R. In dem regulären Differentialausdruck, der zu dem ersten Bestandtheile des Systemes gehört, kommen bei allen singulären Punkten im Endlichen von $F_m(y, x)$ und bei $x = \infty$ Exponentengleichungen vor, deren Wurzeln selbst sich unter den aufgestellten R bei demselben fundamentalen determinirenden Factor an dem betreffenden Punkte vorfinden. Werden diese Wurzeln aus den aufgestellten R herausgenommen, so muss die Summe aller übrig bleibenden Wurzeln R eine ganze Zahl sein.

Dieser Satz findet nun bei den homogenen linearen Differentialausdrücken zweiter Ordnung immer Anwendung, da, wenn ein solcher Ausdruck durch ein System Nr. 1 (2.) sich darstellen lässt, die Bestandtheile dieses Systemes normale Differentialausdrücke sind.

Gemäss (11.) *ist es für die Zerlegbarkeit von $F_2(y, x)$ unter der Form* (2.) *nothwendig, dass* $-\sum_1^{\varkappa} R_\lambda^{(1)} - R_\varkappa^{(1)}$ *eine ganze Zahl gleich oder grösser als*

Null ist, und es hat sich nun weiter ergeben, dass $\sum_1^{\varkappa} R_a^{(2)} + R_\infty^{(2)}$ ***eine ganze Zahl sein muss.***

Es ist also zunächst zuzusehen, ob die Wurzeln R ***sich diesen Bedingungen gemäss gruppiren lassen.***

Nun wird weiter die ganze rationale Function $\Phi(x)$ (8.) bestimmt nach dem Verfahren Abh. Bd. 96 Nr. 6.

Man kann hier voraussetzen, dass wenigstens bei *einem* singulären Punkte von $F_2(y, x) = 0$ zwei von einander verschiedene fundamentale eterminirende Factoren vorhanden sind; die zugehörigen Exponenten-e dgleichungen sind dann ersten Grades. Denn wenn bei jedem dieser Punkt nur ein fundamentaler determinirender Factor besteht, dessen zugehörige Exponentengleichung alsdann zweiten Grades ist, so ist $F_2(y, x)$ ein normaler Differentialausdruck. Dann kommt die Integration von $F_2(y, x) = 0$ auf die einer regulären Differentialgleichung zweiter Ordnung hinaus, deren Integrale mit dem determinirenden Factor zu multipliciren sind. Aber auch dieser Fall ist im Folgenden mit aufgenommen, indem dann nur vorausgesetzt wird, dass wenigstens bei *einem* singulären Punkte von $F_2(y, x) = 0$ die beiden Wurzeln der zu dem fundamentalen determinirenden Factor gehörigen Exponentengleichung sich nicht um eine ganze Zahl unterscheiden.

Es giebt alsdann wenigstens *einen* singulären Punkt in $G_2(y, x) = 0$, bei welchem die formelle Entwickelung des regulären Integrales, welches $\frac{dy}{dx} + p^{(1)} y = 0$ erfüllt, aus $G_2(y, x) = 0$ vollständig bestimmt ist. Die in diese Entwickelung eingehenden Constanten sind rational durch die Constanten in $G_2(y, x)$ und den Exponenten ausgedrückt. Aus dieser formellen Entwickelung des Integrales erfolgt die formelle Entwickelung von $p^{(1)}$ bei dem betreffenden Punkte. Alsdann wird aus (7.) gemäss Abh. Bd. 96 Nr. 6 (12.) oder (15.) die ganze rationale Function $\Phi(x)$ τten Grades, wo τ durch (11.) gegeben ist, direct bestimmt. Die Constanten in $\Phi(x)$ setzen sich rational aus den Constanten in $G_2(y, x)$ und den Grössen $R^{(1)}$ zusammen. Das Product $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\varkappa)$ sei gleich $\varphi(x)$ gesetzt ($\varphi(x) = 1$ bei $\varkappa = 0$). Es ist gemäss dem oben (nach (8.)) Bemerkten zu prüfen, ob die Polynome $\Phi(x)$ und $\frac{d\Phi(x)}{dx}$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Es ist ferner zuzusehen, ob die Polynome $\varphi(x)$ und $\Phi(x)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben (vgl. II), entsprechend der Annahme, die über die Punkte $a_{\varkappa+1}$ bis $a_{\varkappa+\lambda}$ gemacht war.

Damit ist nun

$$p^{(1)} = \sum_1^{\varkappa} \frac{-R_\mathfrak{a}^{(1)}}{x-a_\mathfrak{a}} - \frac{d\log \Phi x}{dx} \tag{15.}$$

ermittelt. Der Differentialausdruck $G_2(y, x)$ sei

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P_2 y. \tag{16.}$$

Dann ist zur Zerlegung von $G_2(y, x)$ in das System (5.) nothwendig und hinreichend

$$\begin{cases} P_1 = p^{(1)} + g, \\ P_2 = \dfrac{dp^{(1)}}{dx} + p^{(1)} g. \end{cases} \tag{17.}$$

Und dieses kommt auf die eine Bedingungsgleichung hinaus

$$P_2 = \frac{dp^{(1)}}{dx} + p^{(1)}(P_1 - p^{(1)}). \tag{18.}$$

II. Nachdem der Differentialausdruck (4.) $G_2(y, x)$ durch das System (5.) dargestellt ist, soll nun der Differentialausdruck (1.) $F_2(y, x)$ durch das System (2.) ausgedrückt werden. Der Differentialausdruck $f^{(1)}(y, x)$ in (2.) ist

$$\frac{dy}{dx} - \left\{ \frac{dW^{(1)}}{dx} + \sum_1^{\varkappa} \frac{R_\mathfrak{a}^{(1)}}{x-a_\mathfrak{a}} + \frac{d\log \Phi(x)}{dx} \right\} y. \tag{19.}$$

Es ist nun der Differentialausdruck $f^{(2)}(y, x)$ in (2.) zu bestimmen. Aus den Angaben bei (13.) angewandt auf das System (2.) folgt: Bei einem singulären Punkte von $F_2(y, x) = 0$ ist $e^{w^{(2)}}$ fundamentaler determinirender Factor in $f^{(2)}(y, x)$. Die Wurzel der Exponentengleichung in

$$e^{-w^{(2)}} f^{(2)}(e^{w^{(2)}} y, x) = 0$$

ist die Grösse $R^{(2)}$, von welcher eine ganze Zahl subtrahirt ist. Bei einem nicht singulären Punkte von $F_2(y, x) = 0$ ist $e^0 = 1$ fundamentaler determinirender Factor in $f^{(2)}(y, x)$.

Daher ist der Differentialausdruck $f^{(2)}(y, x)$ ein normaler Differentialausdruck und dessen determinirender Factor das Product der fundamentalen determinirenden Factoren $e^{w^{(2)}}$, dasselbe sei durch $e^{W^{(2)}}$ bezeichnet. Bei den Punkten $a_\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} = 1, \ldots, \varkappa)$, den singulären Punkten von $F_2(y, x) = 0$ im Endlichen, ist die Wurzel der Exponentengleichung in $e^{-w_\mathfrak{a}^{(2)}} f^{(2)}(e^{w_\mathfrak{a}^{(2)}} y, x) = 0$ $R_\mathfrak{a}^{(2)} - g_\mathfrak{a}$. Die ganze Zahl $g_\mathfrak{a}$ ist nach Abh. Bd. 96 Nr. 2 IIb dadurch bestimmt,

dass $g_\mathfrak{a}$ die grösste der in $e^{-w_\mathfrak{a}^{(2)}} f^{(1)}(e^{w_\mathfrak{a}^{(2)}} y, x)$ zu den Coefficienten, die nach Potenzen von $x-a_\mathfrak{a}$ entwickelt sind, gehörende Zahl ist. Wenn $-\frac{dw_\mathfrak{a}^{(1)}}{dx}+\frac{dw_\mathfrak{a}^{(2)}}{dx}$ für $x=a$ in der Ordnung $\nu_\mathfrak{a}$ unendlich wird, wo $\nu_\mathfrak{a} \geqq 0$, so ist $g_\mathfrak{a}$ die grösste der beiden Zahlen 1 und $\nu_\mathfrak{a}$.

Der Coefficient von y in $f^{(1)}(y, x)$ sei durch P, der in $f^{(2)}(y, x)$ durch Q bezeichnet, so ist gemäss (1.) und (2.)

$$p_1 = P+Q. \tag{20.}$$

Ferner wird $Q+\frac{dW^{(2)}}{dx}$ für $x=\infty$ gleich Null. Wird nun

$$Q = -\frac{dW^{(2)}}{dx} - \sum_1^\varkappa \frac{R_\mathfrak{a}^{(2)}-g_\mathfrak{a}}{x-a_\mathfrak{a}} + \frac{d\log \Phi(x)}{dx} + S \tag{21.}$$

gesetzt, so ist die rationale Function S für $x=a_\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a}=1, \ldots, \varkappa)$ endlich, ebenso (gemäss (20.)) für $x=a_\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a}=\varkappa+1, \ldots, \varkappa+\lambda)$ und jeden anderen Punkt im Endlichen und wird für $x=\infty$ gleich Null, dieselbe ist also Null. Demnach wird $f^{(2)}(y_1, x)$ in (2.)

$$\frac{dy_1}{dx} - \left\{\frac{dW^{(2)}}{dx} + \sum_1^\varkappa \frac{R_\mathfrak{a}^{(2)}-g_\mathfrak{a}}{x-a_\mathfrak{a}} - \frac{d\log \Phi(x)}{dx}\right\} y_1. \tag{22.}$$

Wenn $F_2(y, x)$ im Endlichen keinen singulären Punkt hat, so fällt in (19.) und (22.) der Ausdruck $\sum_1^\varkappa$ weg. Ist $F_2(y, x)$ ein regulärer Differentialausdruck, so ist $W^{(1)} = W^{(2)} = 0$.

III. Die Differentialgleichung $F_2(y, x) = 0$ enthalte das Integral einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung mit rationalem Coefficienten (der Coefficient von $\frac{dy}{dx}$ gleich 1) $g(y, x) = 0$, so ist (vgl. Abh. Bd. 96 Nr. 2 (9.) oder Nr. 7 (8.)) $F_2(y, x)$ durch das System

$$g(y, x) = s, \quad h(s, x) \tag{23.}$$

darstellbar, wo $h(s, x)$ gleichfalls ein solcher Differentialausdruck mit rationalem Coefficienten ist; g und h sind dann normale Differentialausdrücke (Nr. 1). Für $F_2(y, x)$ sei durch I und II eine Zerlegung in das System (2.)

$$f^{(1)}(y, x) = y_1, \quad f^{(2)}(y_1, x) \tag{24.}$$

ermittelt. Es ist zu untersuchen, ob $F_2(y, x) = 0$ ausser dem Integral von

$f^{(1)}(y, x) = 0$ dasjenige einer zweiten homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung mit rationalem Coefficienten $\varphi(y, x) = 0$ enthält. $\varphi(y, x)$ ist ein normaler Differentialausdruck, der determinirende Factor desselben sei e^W. Das reguläre Integral aus $e^{-W}\varphi(e^W y, x) = 0$ erfüllt

$$(25.) \qquad e^{-W} f^{(1)}(e^W y,\ x) = y_1', \quad e^{-W} f^{(2)}(e^W y_1',\ x) = 0.$$

Daher ist $e^{-W} f^{(2)}(e^W y, x)$ ein regulärer Differentialausdruck, also $W = W^{(2)}$. Die Wurzeln der Exponentengleichungen von $e^{-W}\varphi(e^W y, x) = 0$ und $e^{-W} f^{(2)}(e^W y, x) = 0$ bei irgend einem Punkte unterscheiden sich nur um eine ganze Zahl, gemäss (25.). Wird $\varphi(y, x)$ für $g(y, x)$ in (23.) genommen, so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden und den Angaben bei (13.):

Bei jedem singulären Punkte von $F_2(y, x)$ ist in $\varphi(y, x)$ der fundamentale determinirende Factor $e^{w^{(2)}}$; die Wurzel der zugehörigen Exponentengleichung in $e^{-w^{(2)}}\varphi(e^{w^{(2)}} y, x) = 0$ (ebenso bei $x = \infty$, wenn dieser Punkt nicht singulär in F_2) ist $R^{(2)}$, nur wenn $e^{w^{(1)}} = e^{w^{(2)}}$ und $R^{(1)}$ sich von $R^{(2)}$ nur um eine ganze Zahl unterscheidet, ist diese Wurzel $R^{(1)}$ oder $R^{(2)}$. Gemäss I hat daher $\varphi(y, x)$ den Ausdruck:

$$(26.) \qquad \frac{dy}{dx} - \left\{ \frac{dW^{(2)}}{dx} + \sum_1^{\varkappa} \frac{R_\mathfrak{a}^{(2)} - k_\mathfrak{a}}{x - a_\mathfrak{a}} + \frac{d\log \Phi_1(x)}{dx} \right\} y,$$

wo $k_\mathfrak{a}$ eine ganze Zahl, die nur dann von Null verschieden sein kann, wenn bei einem Punkte $a_\mathfrak{a}$ $w_\mathfrak{a}^{(1)} = w_\mathfrak{a}^{(2)}$, $R_\mathfrak{a}^{(1)}$ und $R_\mathfrak{a}^{(2)}$ sich nur um eine ganze Zahl unterscheiden; dann ist $k_\mathfrak{a}$ gleich Null oder $R_\mathfrak{a}^{(2)} - R_\mathfrak{a}^{(1)}$. $\Phi_1(x)$ ist eine ganze rationale Function von x, deren Grad auch Null sein kann, die nicht in einem Punkte $a_\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} = 1, \ldots, \varkappa)$ verschwindet.

Es ist also nun mit diesen Elementen zuzusehen, ob ein der Grösse τ (11.) entsprechender Werth besteht und im Uebrigen das Verfahren aus I einzuschlagen.

Die Differentialgleichungen $f^{(1)}(y, x) = 0$ und $\varphi(y, x) = 0$ bilden dann einen Verein von Unterdifferentialgleichungen der ursprünglichen Differentialgleichung $F_2(y, x) = 0$ (Abh. Bd. 96 S. 229). Wenn $W^{(1)}$ von $W^{(2)}$ verschieden ist (Hauptunterdifferentialgleichungen), so kann $F_2(y, x) = 0$ ausser den Integralen von $f^{(1)} = 0$ und $\varphi = 0$ nicht dasjenige einer anderen homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung mit rationalem Coefficienten enthalten (l. c. oder Abh. Bd. 83 S. 100). Vgl. hier Nr. 4 II.

4.

Beispiele.

I. Es soll ein Differentialausdruck $F_2(y, x)$ durch ein solches System

$$(1.) \qquad f^{(1)}(y, x) = y_1, \quad f^{(2)}(y_1, x),$$

wo $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ normale Differentialausdrücke erster Ordnung sind, dargestellt werden, dass die Differentialgleichung $F_2(y, x) = 0$ neben dem Integral von $f^{(1)}(y, x) = 0$ nicht das Integral einer zweiten homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung mit rationalem Coefficienten enthält.

Das hier angewandte Verfahren wird am übersichtlichsten, wenn dasselbe bei linearen Differentialausdrücken beliebiger Ordnung dargestellt wird.

Im Endlichen seien die Punkte $a_\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a} = 1, \ldots, \varkappa$) angenommen, bei jedem derselben und bei $x = \infty$ zwei von einander verschiedene fundamentale determinirende Factoren $e^{w^{(1)}}$ und $e^{w^{(2)}}$ das Product der Grössen $e^{w^{(1)}}$ sei $e^{W^{(1)}}$, das Product der $e^{w^{(2)}}$ sei $e^{W^{(2)}}$. Die regulären Differentialausdrücke $\overline{\Phi}_m(y, x)$ $m$ter Ordnung und $\overline{\psi}_n(y, x)$ $n$ter Ordnung sollen im Endlichen nur singuläre Punkte haben, die unter den Punkten $a_\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a} = 1, \ldots, \varkappa$) sich finden, diese Differentialausdrücke sollen unzerlegbar sein, was nach Ahh. Bd. 96 Nr. 7 III bewerkstelligt werden kann. Es werden die normalen Differentialausdrücke gebildet

$$(2^\mathrm{a}.) \qquad e^{W^{(1)}}\overline{\Phi}_m(e^{-W^{(1)}}y, x) = \Phi_m(y, x),$$

$$(2^\mathrm{b}.) \qquad e^{W^{(2)}}\overline{\psi}_n(e^{-W^{(2)}}y, x) = \psi_n(y, x),$$

alsdann wird der Differentialausdruck $F_{m+n}(y, x)$ durch das System

$$(3.) \qquad \Phi_m(y, x) = y_1, \quad \psi_n(y_1, x)$$

gegeben.

$F_{m+n}(y, x)$ hat nun gerade die Punkte $a_\mathfrak{a}$ ($a = 1, \ldots, \varkappa$) und $x = \infty$ zu singulären (bei jedem derselben ist der charakteristische Index wenigstens eines der beiden Bestandtheile von (3.) gleich der Ordnung). Bei jedem dieser Punkte gilt nach den in Nr. 3 bei (13.) gemachten Angaben Folgendes: $e^{-W^{(1)}}F_{m+n}(e^{W^{(1)}}y, x)$ hat eine Exponentengleichung, deren Wurzeln mit denen der Exponentengleichung in $\overline{\Phi}_m$ übereinstimmen, $e^{-W^{(2)}}F_{m+n}(e^{W^{(2)}}y, x)$ eine Exponentengleichung, deren Wurzeln die der Exponentengleichung in $\overline{\psi}_n$ sind, nachdem eine und dieselbe ganze Zahl hinzuaddirt ist. Bei einem

Punkte $a_\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a}=1,\ldots,\varkappa)$ ist diese Zahl $g_\mathfrak{a}$ die grösste der zu den Coefficienten in $e^{-W^{(2)}}\Phi_m(e^{W^{(2)}}y, x)$ bei diesem Punkte gehörigen Zahlen (Abh. Bd. 96 Nr. 2 II). Wird $w^{(2)}-w^{(1)}$ in diesem Punkte in der Ordnung $\nu_\mathfrak{a}$ unendlich, so ist $g_\mathfrak{a}=m(\nu_\mathfrak{a}+1)$. Bei $x=\infty$ ergiebt sich jene hinzuzuaddirende ganze Zahl γ in folgender Weise. $x=t^{-1}$; alsdann wird $F_{m+n}(y, x)=(-t^2)^{m+n}F'_{m+n}(y, t)$ gesetzt, entsprechend bei Φ_m, $\overline{\Phi}_m$ und ψ_n, $\overline{\psi}_n$, ferner $t^{-2m}\psi'_n(t^{2m}s, t)=\psi''_n(s, t)$ und entsprechend bei $\overline{\psi}'_n$, so folgt, dass $F'_{m+n}(y, t)$ durch das System

$$\Phi'_m(y,\ t)=s',\quad \psi''_n(s',\ t)$$

dargestellt wird. Die Wurzeln der Exponentengleichung von $\overline{\psi}''_n$ bei $t=0$ sind die von $\overline{\psi}'_n$, nachdem zu letzteren $-2m$ addirt ist. Die grösste der zu den Coefficienten in $e^{-W^{(2)}(t^{-1})}\Phi'_m(e^{W^{(2)}(t^{-1})}y, t)$ bei $t=0$ gehörigen Zahlen ist, wenn $w^{(2)}-w^{(1)}$ bei $x=\infty$ in der Ordnung ϱ unendlich wird, $m(\varrho+1)$. Daher ist $\gamma=m(\varrho+1)-2m$.

Bei den Punkten $a_\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a}=1,\ldots,\varkappa)$ und $x=\infty$ seien die Wurzeln der Exponentengleichungen in $e^{-W^{(2)}}F_{m+n}(e^{W^{(2)}}y, x)$ durch $R^{(2)}$ bezeichnet, deren Summe durch $\Sigma R^{(2)}$. Nun ist die Summe der Wurzeln der Exponentengleichungen bei denselben Punkten in $\overline{\psi}_n$ einerseits gleich

$$(\varkappa-1)\frac{n(n-1)}{2},$$

da unter den $\varkappa$ Punkten $a_\mathfrak{a}$ sich die singulären Punkte von $\overline{\psi}_n$ im Endlichen befinden, andererseits nach dem Vorhergehenden gleich

$$\Sigma R^{(2)}-n\Big(\sum_1^\varkappa g_\mathfrak{a}+\gamma\Big),$$

also

$$\Sigma R^{(2)}-n\Big(\sum_1^\varkappa g_\mathfrak{a}+\gamma\Big)=(\varkappa-1)\frac{n(n-1)}{2}. \tag{4.}$$

Wenn nun $F_{m+n}=0$ die Integrale noch einer anderen homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten als $\Phi_m=0$ enthält, so kann diese andere Differentialgleichung kein Integral von $\Phi_m=0$ enthalten, weil Φ_m und ψ_n unzerlegbar. Es muss dann der Differentialausdruck dieser zweiten Differentialgleichung $n$ter Ordnung Ψ_n sein und ein normaler Differentialausdruck mit dem determinirenden Factor $e^{W^{(2)}}$; ferner kann in einem Systeme von zwei normalen Bestandtheilen, welches F_{m+n} darstellt, Ψ_n an die Spitze gestellt werden und der zweite Bestandtheil enthält den determinirenden Factor $e^{W^{(1)}}$ gemäss Abh. Bd. 96 Nr. 8 I A. (Für $F_2(y, x)$ ist

das Vorstehende in Nr. 3 III direct gezeigt). Aus der hieraus hervorgehenden Darstellung von $e^{-W^{(2)}}F_{m+n}(e^{W^{(2)}}y, x)$ folgt, dass die Wurzeln der Exponentengleichungen in $e^{-W^{(2)}}\Psi_n(e^{W^{(2)}}y, x)$ und $e^{-W^{(2)}}F_{m+n}(e^{W^{(2)}}y, x)$ bei jedem der Punkte a_α $(\alpha = 1, \ldots, \varkappa)$ und $x = \infty$ übereinstimmen. Ferner ergiebt sich, dass die in Abh. Bd. 96 Nr. 6 (11.) angegebene Zahl τ,

$$\tau = (\varkappa - 1)\frac{n(n-1)}{2} - \Sigma R^{(2)} \tag{5.}$$

eine ganze Zahl gleich oder grösser als Null sein muss. Letzteres ist aber wegen (4.) nicht der Fall.

Also kann $F_{m+n}(y, x) = 0$, wo $F_{m+n}(y, x)$ durch das System (3.) gegeben ist, nicht die Integrale einer anderen homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten als $\Phi_m(y, x) = 0$ enthalten.

II. Eine Differentialgleichung $F_2(y, x) = 0$, welche die Integrale von zwei homogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit rationalen Coefficienten enthält (Unterdifferentialgleichungen), bildet man nach dem allgemeinen Verfahren (Abh. Bd. 96 Nr. 7 I) zur Herleitung derjenigen homogenen linearen Differentialgleichung, welche die linearunabhängigen Integrale von zwei solchen Differentialgleichungen vereinigt enthält. Diese beiden Differentialgleichungen seien

$$\frac{dy}{dx} + py = 0, \quad \frac{dy}{dx} + qy = 0. \tag{6.}$$

Die Differentialgleichung, welche die Integrale beider enthält, geht aus dem Systeme hervor

$$\frac{dy}{dx} + py = s, \quad \frac{ds}{dx} + \left\{q - \frac{d\log(p-q)}{dx}\right\}s = 0. \tag{7.}$$

Zu diesen linearen Differentialgleichungen gehört die mit constanten Coefficienten. Dieselbe besitzt die Unterdifferentialgleichungen

$$e^{\alpha x}\frac{de^{-\alpha x}y}{dx} = 0, \quad e^{\beta x}\frac{de^{-\beta x}y}{dx} = 0,$$

α von β verschieden, oder die Differentialgleichung ist selbst eine normale $e^{\alpha x}\frac{d^2e^{-\alpha x}y}{dx^2} = 0$. In letzterem Falle hat dieselbe zu Unterdifferentialgleichungen irgend zwei Differentialgleichungen aus der Schaar

$$e^{\alpha x}\left\{\frac{de^{-\alpha x}y}{dx} - \frac{c_1}{c_1x + c_2}e^{-\alpha x}y\right\} = 0,$$

wo c_1, c_2 beliebige Constanten sind (vgl. Nr. 3 III).

III. Das System

$$(8.) \qquad \frac{dy}{dx}+\frac{M}{N}y=s, \quad \frac{ds}{dx}+\frac{P}{Q}s=0,$$

wo M, N, P, Q Polynome von x sind, ergiebt die Differentialgleichung

$$(9.) \qquad \frac{d^2y}{dx^2}+\left\{\frac{M}{N}+\frac{P}{Q}\right\}\frac{dy}{dx}+\left\{\frac{d}{dx}\frac{M}{N}+\frac{MP}{NQ}\right\}y=0$$

oder

$$(10.) \quad N^2Q\frac{d^2y}{dx^2}+N\{MQ+NP\}\frac{dy}{dx}+\left\{Q\left(N\frac{dM}{dx}-M\frac{dN}{dx}\right)+MNP\right\}y=0.$$

Wird der Grad von M nicht höher als der von N, der Grad von P nicht höher als der von Q angenommen, so ist der Grad von N^2Q gleich oder grösser als der Grad der Coefficienten von $\frac{dy}{dx}$ und y in (10.). Diese Bedingung ist in (7.) erfüllt, wenn $p=\frac{M}{N}$, $q=\frac{M'}{N'}$ der Grad von M nicht höher als der von N, der Grad von M' nicht höher als der von N' ist. Für $x=\infty$ sei nun in (8.) $\frac{M}{N}=-\alpha$, $\frac{P}{Q}=-\beta$; dann hat bei $x=\infty$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{M}{N}y=0$$

den fundamentalen determinirenden Factor $e^{\alpha x}$, $\frac{ds}{dx}+\frac{P}{Q}s=0$ als diesen Factor $e^{\beta x}$, α werde von β verschieden angenommen. Die Differentialgleichung (9.) sei durch $F_2(y, x)=0$ bezeichnet. Dann ist in

$$e^{-\alpha x}F_2(e^{\alpha x}y,\ x)=0 \quad \text{und in} \quad e^{-\beta x}F_2(e^{\beta x}y,\ x)=0$$

bei $x=\infty$ der charakteristische Index gleich 1. Daher wird $F_2(y, x)=0$ bei $x=\infty$ durch zwei Entwickelungen erfüllt

$$(11^a.) \qquad e^{\alpha x}x^{-\varrho_1}\left(1+\sum_1^\infty c_{-a}^{(1)}x^{-a}\right)$$

$$(11^b.) \qquad e^{\beta x}x^{-\varrho_2}\left(1+\sum_1^\infty c_{-a}^{(2)}x^{-a}\right),$$

die eindeutig bestimmt sind. Geht Differentialgleichung (9.) aus (7.) hervor, so convergiren die Entwickelungen in (11.) $1+\sum_1^\infty c_{-a}^{(b)}x^{-a}$ $(b=1, 2)$ ausserhalb eines gewissen Kreises um den Nullpunkt als Mittelpunkt; denn die Integrale aus (6.) haben bei $x=\infty$ Ausdrücke wie (11.). Sonst convergirt wenigstens die Entwickelung aus $(11^a.)$; da das aus

$$(12.) \qquad \frac{dy}{dx}+\frac{M}{N}y=0$$

bei $x = \infty$ hervorgehende Integral einen Ausdruck wie (11ª.) hat. Diese convergenten Entwickelungen enthalten gemäss (6.) bezüglich (12.) im allgemeinen unendlich viele Glieder.

5.

Die Integration der vorgelegten Differentialgleichung zweiter Ordnung.

I. Von dem homogenen linearen Differentialausdrucke zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten $F_2(y, x)$ soll sich nach Nr. 3 ergeben haben, dass derselbe durch ein System

$$(1.) \qquad f^{(1)}(y, x) = y_1, \quad f^{(2)}(y_1, x)$$

darstellbar ist, wo $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ solche Differentialausdrücke erster Ordnung sind. Dann war nach Nr. 3 II für $f^{(1)}(y, x)$ der Ausdruck

$$(2.) \qquad \frac{dy}{dx} - \left\{ \frac{dW^{(1)}}{dx} + \sum_1^z \frac{R_a^{(1)}}{x - a_a} + \frac{d \log \Phi(x)}{dx} \right\} y$$

ermittelt, für $f^{(2)}(y_1, x)$ der Ausdruck

$$(3.) \qquad \frac{dy_1}{dx} - \left\{ \frac{dW^{(2)}}{dx} + \sum_1^z \frac{R_a^{(2)} - g_a}{x - a_a} - \frac{d \log \Phi(x)}{dx} \right\} y_1.$$

Die Differentialgleichung $f^{(1)}(y, x) = 0$ hat zum Integral, abgesehen von einem constanten Factor,

$$(4.) \qquad \mu_1 = e^{W^{(1)}} \prod_1^z (x - a_a)^{R_a^{(1)}} \Phi(x),$$

die Differentialgleichung $f^{(2)}(y_1, x) = 0$ hat zum Integral, abgesehen von einem constanten Factor,

$$(5.) \qquad \mu_2 = e^{W^{(2)}} \prod_1^z (x - a_a)^{R_a^{(2)} - g_a} \Phi^{-1}(x).$$

Die Differentialgleichung $F_2(y, x) = 0$ oder $f^{(1)}(y, x) = y_1$, $f^{(2)}(y_1, x) = 0$ hat die beiden linear unabhängigen Integrale (vgl. Abh. Bd. 96 Nr. 2)

$$(6.) \qquad y^{(1)} = \mu_1, \quad y^{(2)} = \mu_1 \int \mu_1^{-1} \mu_2 \, dx.$$

Wenn die Differentialgleichung $F_2(y, x) = 0$ in zwei getrennte homogene zerfällt, so hat dieselbe gemäss Nr. 3 III ausser dem Integrale $y^{(1)} = \mu_1$ ein Integral

$$(7.) \qquad \mu_1' = e^{W^{(2)}} \prod_1^{\bar{n}} \prod_1^z (x - a_a)^{R_a^{(2)} - k_a} \Phi_1(x).$$

Die Differentialgleichung $F_2(y, x) = 0$ hat dann auch die beiden linearunabhängigen Integrale

$$y^{(1)} = \mu_1, \quad y^{(2)} = \mu_1'. \tag{8.}$$

II. *Die Entwickelung der Integrale* (6.) μ_1, $\mu_1 \int \mu_1^{-1}\mu_2 dx$ *und der Integrale* (8.) μ_1, μ_1' *im Bezirke eines singulären Punktes von* $F_2(y, x) = 0$ *im Endlichen* a_α $(\alpha = 1, \ldots, \varkappa)$ *und die Berechnung dieser Functionen* (vergl. Abh. Bd. 96 Nr. 13 bis 18).

A) Die Function μ_1 (4.) hat bei einem solchen Punkte a den Ausdruck

$$\mu_1 = e^{w^{(1)}}(x-a)^{R^{(1)}} f(x-a), \tag{9.}$$

$e^{w^{(1)}}$ ist der in dem Producte $e^{W^{(1)}}$ enthaltene fundamentale determinirende Factor bei dem Punkte a, $f(x-a)$ von der Form $\sum_0^\infty k_\alpha (x-a)^\alpha$, $\operatorname{Mod} k_0 \geqslant 0$. Die Entwickelung von $f(x-a)$ convergirt in dem Bezirke des Punktes a von $F_2(y, x) = 0$. Eine Recursionsformel für die Coefficienten k_α mit constanter Anzahl der Glieder ergiebt sich aus $e^{-w^{(1)}} F_2(e^{w^{(1)}} y, x) = 0$. Die Werthberechnung des Integrales μ_1 erfolgt unmittelbar aus dem Ausdrucke (4.). Das Entsprechende gilt für μ_1'.

Die Function $\mu_1^{-1}\mu_2$ *hat bei einem solchen Punkte* a *den Ausdruck*

$$\mu_1^{-1}\mu_2 = e^u (x-a)^r f_1(x-a), \tag{10.}$$

wo $e^u = e^{w^{(2)} - w^{(1)}}$, $w^{(1)}$ der in dem Producte $e^{W^{(1)}}$, $w^{(2)}$ der in dem Producte $e^{W^{(2)}}$ enthaltene fundamentale determinirende Factor bei dem Punkte a, $u = w^{(2)} - w^{(1)}$ also gleich Null oder von der Form $\sum_1^n \frac{\gamma_{-\alpha}}{(x-a)^\alpha}$ ist, $r = R^{(2)} - g - R^{(1)}$, $f_1'(x-a) = \sum_0^\infty k_\alpha'(x-a)^\alpha$, $\operatorname{Mod.} k_0' \geqslant 0$, die Entwickelung von $f_1(x-a)$ convergirt in einem gewissen Kreise um a als Mittelpunkt.

B) Die Grösse u in (10.) sei gleich Null.

Dann ergiebt sich als Entwickelung von $\int \mu_1^{-1}\mu_2 dx$, wobei das constante Glied annullirt wird, wenn r nicht ganzzahlig ist

$$\int \mu_1^{-1}\mu_2 dx = \sum_0^\infty k_\alpha' \frac{(x-a)^{r+\alpha+1}}{r+\alpha+1}. \tag{11.}$$

Wenn r ganzzahlig ist und in $(x-a)^r f_1(x-a)$ das Glied $\frac{1}{x-a}$ den Coefficienten k_{-1} hat (wo k_{-1} Null sein kann), so tritt zu dem Ausdrucke (11.)

in welchem das Glied, wo $r+\mathfrak{a}-1=0$ ist, fehlt, noch der Summand $k_{-1}\log(x-a)$ hinzu.

Das Integral $\mu_1\int\mu_1^{-1}\mu_2 dx$ wird, wenn r nicht ganzzahlig ist, $(e^{w^{(1)}}=e^{w^{(2)}})$,

$$(12.)\qquad e^{w^{(2)}}(x-a)^{R^{(2)}-g+1}\sum_0^\infty c_\mathfrak{a}(x-a)^\mathfrak{a},\quad \text{Mod.}\,c_0\gtrless 0,$$

wo $\sum_0^\infty c_\mathfrak{a}(x-a)^\mathfrak{a}$ in dem Bezirke von $x=a$ bei $F_2(y,x)=0$ convergirt. Eine Recursionsformel für die Coefficienten $c_\mathfrak{a}$ mit constanter Anzahl der Glieder erfolgt aus $e^{-w^{(2)}}F_2(e^{w^{(2)}}y,x)=0$. Diese letztere Differentialgleichung hat bei $x=a$ den charakteristischen Index gleich Null. Aus derselben erfolgt die Berechnung der Entwickelung $\sum_0^\infty c_\mathfrak{a}(x-a)^\mathfrak{a}$ und ihrer Differentialquotienten mit vorgeschriebener Annäherung innerhalb des Bezirkes von $x=a$ bei $F_2(y,x)=0$ nach Abh. Bd. 91 Nr. 3 I und II, indem sich nach den dortigen Angaben ein Werth M gleich oder grösser als der Modul der Function ergiebt, und unter Zugrundelegung dieses Werthes die Theilung der Reihe S in $S=S'+S''$, wo $\text{Mod.}S''$ unterhalb einer vorgeschriebenen Grösse liegt.

Das Integral $\mu_1\int\mu_1^{-1}\mu_2 dx$ wird, wenn r ganzzahlig ist, gemäss (9.)

$$(13.)\qquad e^{w^{(2)}}(x-a)^{R^{(2)}-g+1}\left\{\sum_0^\infty c'_\mathfrak{a}(x-a)^\mathfrak{a}+k_{-1}(x-a)^{-r-1}f(x-a)\log(x-a)\right\},$$

wo $\sum_0^\infty c'_\mathfrak{a}(x-a)^\mathfrak{a}$ in dem Bezirke von a bei $F_2(y,x)=0$ convergirt (Abh. Bd. 96 Nr. 13). Aus der Differentialgleichung $e^{-w^{(2)}}F_2(e^{w^{(2)}}y,x)=0$, die bei $x=a$ den charakteristischen Index gleich Null hat, ergiebt sich dann (Abh. Bd. 96 Nr. 15) eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 und dem charakteristischen Index gleich Null bei $x=a$, welcher $(x-a)^{R^{(2)}-g+1}\sum_0^\infty c'_\mathfrak{a}(x-a)^\mathfrak{a}$ genügt. Aus derselben erfolgt eine Recursionsformel für die Coefficienten $c'_\mathfrak{a}$ mit constanter Anzahl der Glieder und die Werthberechnung dieser Function und ihrer Differentialquotienten in einem gewissen Kreise um $x=a$ als Mittelpunkt nach Abh. Bd. 91 Nr. 3 I und II.

Die Integrale in A) μ_1 und μ'_1, in B) (12.) (13.) haben die Form von normalen Integralen (vgl. Abh. Bd. 115 S. 145).

C) Die Grösse u in (10.) sei von der Form $u\left(\frac{1}{x-a}\right)=\sum_{1}^{n}\frac{\gamma_{-\alpha}}{(x-a)^{\alpha}}$.

Dann hat $\mu_1^{-1}\mu_2$ die Entwickelung

$$(14.)\qquad \mu_1^{-1}\mu_2 = (x-a)^r\left\{\sum_{0}^{\infty} c_\alpha(x-a)^\alpha+\sum_{-1}^{-\infty} c_\alpha(x-a)^\alpha\right\}.$$

Diese Entwickelung sei durch $(x-a)^r\psi(x-a)$ bezeichnet. Die Function $\int\mu_1^{-1}\mu_2 dx$, in deren Entwickelung das constante Glied annullirt werden soll, wird vermittelst bestimmter Integrale ausgedrückt. Ein Integral über die Peripherie des Kreises um den Nullpunkt als Mittelpunkt mit dem Radius 1 in positiver Richtung von 1 an bis zu 1 zurück erstreckt, werde durch $\int_1'$ bezeichnet.

C_1) Der Exponent r in (14.) sei nicht ganzzahlig.

a) Die Grösse $\int\mu_1^{-1}\mu_2 dx$ nämlich

$$(15.)\qquad \int(x-a)^r\psi(x-a)dx = \sum_{0}^{\infty}\frac{c_\alpha(x-a)^{r+\alpha+1}}{r+\alpha+1}+\sum_{-1}^{-\infty}\frac{c_\alpha(x-a)^{r+\alpha+1}}{r+\alpha+1}$$

wird durch das bestimmte Integral

$$(16.)\qquad (x-a)^{r+1}\int_1'\psi((x-a)\alpha)\frac{\alpha^r d\alpha}{e^{2\pi ir}-1}$$

ausgedrückt. In (16.) ist dann unter dem Integralzeichen für $\psi(x-a)$ wieder der Ausdruck $e^u f_1(x-a)$ zu setzen (Abh. Bd. 96 Nr. 16 A).

Das Integral $\mu_1\int\mu_1^{-1}\mu_2 dx$ erhält dadurch den Ausdruck

$$(17.)\qquad \begin{cases} (x-a)^{R^{(2)}-g+1}\int_1' e^Z f(x-a) f_1((x-a)\alpha)\frac{\alpha^r d\alpha}{e^{2\pi ir}-1}, \\ Z = w^{(1)}\left(\frac{1}{x-a}\right)+u\left(\frac{1}{(x-a)\alpha}\right). \end{cases}$$

Die Entwickelung $f(x-a)$ convergirt in dem Bezirke von $x=a$ bei $F_2(y,x)=0$, die Entwickelung $f_1(x-a)$ in einem gewissen Kreise um $x=a$ als Mittelpunkt; in dem gemeinschaftlichen Gebiete, abgesehen von $x=a$, gilt der Ausdruck (17.). Dagegen bleibt die durch das bestimmte Integral in (17.) ausgedrückte Function in einem einfach zusammenhängenden endlichen Gebiete, das von singulären Punkten von $F_2(y,x)=0$ nur den Punkt a enthält, abgesehen von diesem Punkte einwerthig und stetig. In dem Bezirke von $x=a$ bei $F_2(y,x)=0$ hat diese Function eine Entwickelung

der Form

$$(18.) \qquad \sum_{0}^{\infty} K_{\mathfrak{c}}(x-a)^{\mathfrak{c}} + \sum_{-1}^{-\infty} K_{\mathfrak{c}}(x-a)^{\mathfrak{c}}.$$

Der Coefficient $K_{\mathfrak{c}}$ ($\mathfrak{c} = -\infty \cdots +\infty$) in dieser Entwickelung geht aus dem Ausdrucke (17.) hervor. Die Grösse e^z hat die Entwickelung

$$(19.) \qquad e^z = \sum_{0}^{\infty} g_{-\mathfrak{b}}(x-a)^{-\mathfrak{b}},$$

wo die $g_{-\mathfrak{b}}$ ganze rationale Functionen von $\frac{1}{\alpha}$. Eine Recursionsformel für die $g_{-\mathfrak{b}}$ erhält man aus

$$(20.) \qquad \frac{ds}{dx} - \left(\frac{dw^{(1)}}{dx} + \frac{du}{dx}\right)s = 0.$$

Die Grösse $f(x-a)f_1((x-a)\alpha)$ hat die Entwickelung $\sum_{0}^{\infty} h_{\mathfrak{b}}(x-a)^{\mathfrak{b}}$, wo die $h_{\mathfrak{b}}$ ganze rationale Ausdrücke von α. Eine Recursionsformel für die h erfolgt vermittelst (4.) und (5.) aus

$$(21.) \qquad \frac{dt}{dx} - \left(\frac{d\log f}{dx} + \frac{d\log f_1}{dx}\right)t = 0.$$

Aus (17.) ergiebt sich dann

$$(22.) \qquad K_{\mathfrak{c}} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mathfrak{b}} \int_{1}^{r} g_{-\mathfrak{b}} h_{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}} \frac{\alpha^r d\alpha}{e^{2\pi i r}-1}, \qquad (\mathfrak{c} = -\infty \cdots +\infty)$$

wo die h mit negativem Zeiger gleich Null zu setzen sind. Die Integrationen in (22.) sind Integrale $\frac{1}{e^{2\pi i r}-1}\int_{1}^{r} \alpha^{r+\mathfrak{a}} d\alpha = \frac{1}{r+\mathfrak{a}+1}$, $\mathfrak{a}$ ganzzahlig und man erhält aus (22.) $K_{\mathfrak{c}}$ durch eine einfach unendliche Reihe ganzer rationaler Ausdrücke gegebener Constanten dargestellt (Vgl. Abh. Bd. 91 Nr. 2). Eine Recursionsformel für die $K_{\mathfrak{c}}$ mit constanter Anzahl der Glieder erfolgt aus $F_2(y, x) = 0$.

b) Aus dem bestimmten Integrale (17.) ergiebt sich folgende *für den praktischen Gebrauch geeignete Darstellung* der Function, die zur Berechnung der Function mit vorgeschriebener Annäherung dient, ebenso zur Werthberechnung des Coefficienten $K_{\mathfrak{c}}$ (22.) und auch in der Reihe für $K_{\mathfrak{c}}$ einen Stellenzeiger giebt, so dass der Rest unter einer vorgeschriebenen Grösse bleibt. (Abh. Bd. 96 Nr. 18).

Jede der Entwicklungen

$$(23.) \qquad e^{w^{(1)}\left(\frac{1}{x-a}\right)} = S_{(1)}, \quad e^{u\left(\frac{1}{(x-a)\alpha}\right)} = S_{(2)}, \quad f(x-a) = S_{(3)}, \quad f_1((x-a)\alpha) = S_{(4)}$$

nach Potenzen von $x-a$ sei in zwei Theile getheilt, $S=S'+S''$, wo S' die Glieder bis zu einem gewissen Stellenzeiger enthält, S'' die übrigen. Nun wird ein Kreisring um $x=a$ als Mittelpunkt in dem gemeinschaftlichen Gebiete der Entwickelungen $f(x-a)$ und $f_1(x-a)$ angenommen. In demselben sei für die einzelne Reihe S Mod.$S \leqq M$, Mod.$S'' \leqq \varepsilon$, so ist Mod.$S' \leqq M+\varepsilon$. Es werde das Product

$$(24.) \qquad (S'_{(1)}+S''_{(1)})\ldots(S'_{(4)}+S''_{(4)}) = S'_{(1)}S'_{(2)}S'_{(3)}S'_{(4)}+T$$

gesetzt. Das Integral

$$(25.) \qquad \int_1^{r'} S'_{(1)}S'_{(2)}S'_{(3)}S'_{(4)}\frac{\alpha^r d\alpha}{e^{2\pi i r}-1}$$

ist eine ganze rationale Function von $x-a$ und $(x-a)^{-1}$ mit Coefficienten, die ganze rationale Ausdrücke der Constanten in den Entwickelungen multiplicirt mit Grössen $\frac{1}{r+\mathfrak{a}+1}$ sind. Das Integral, welches den Rest ausdrückt,

$$(26.) \qquad \int_1^{r''} \frac{T\alpha^r d\alpha}{e^{2\pi i r}-1}$$

liegt in dem betrachteten Kreisringe dem Modul nach unterhalb einer vorgeschriebenen beliebig kleinen Grösse, indem das Entsprechende in Bezug auf T erzielt wird. Ein solcher Kreisring, wie hier verlangt wird, ergiebt sich direct aus den Ausdrücken für μ_1 und μ_2 (4.) und (5.), ebenso ein Werth für M. Die Theilung der Entwickelung $S=S'+S''$ erfolgt nach den Angaben Abh. Bd. 96 Nr. 18 II.

In demselben Kreisringe ist der Modul des bestimmten Integrales in (17.) $\leqq C$, der Modul der Grösse (26.) $\leqq \varkappa$, wo C und $\varkappa$ bekannte Werthe sind, daher der Modul der Function (25.) $\leqq C+\varkappa$. Für die Differentialquotienten der Reihenentwickelungen dieser drei Functionen erhält man dann nach Abh. Bd. 96 Nr. 18 (1.) etc. positive Grössen, welche die Moduln dieser Differentialquotienten in dem Kreisringe übertreffen und die bezüglich C, $\varkappa$, $C+\varkappa$ proportional sind.

Um den Werth des Coefficienten K_c zu berechnen, wird derselbe vermittelst des Ausdruckes der zu entwickelnden Function aus (17.) durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt und dieses in derselben Weise, wie bei (23.) etc. behandelt. Auf dieselbe Weise erhält man auch einen Stellenzeiger ν in der Reihe (22.), so dass, wenn ν überschritten ist, der Rest der Reihe dem Modul nach beliebig klein bleibt, nach den Angaben Abh. Bd. 95 Nr. 2 II b.

C_2.) Der Exponent r in (14.) sei ganzzahlig.

a) Die Entwickelung (14.) $(x-a)^r\psi(x-a)$ sei gleich $\Psi(x-a)$ gesetzt.

$$(27.)\quad \Psi(x-a) = \sum_{0}^{\infty} k_\alpha (x-a)^\alpha + \sum_{-1}^{-\infty} k_\alpha (x-a)^\alpha = \frac{k_{-1}}{x-a} + \xi(x-a).$$

Es ist

$$(28.)\qquad k_{-1} = \frac{R}{2\pi i}\int_1^{'} \Psi(R\zeta)\,d\zeta,$$

wo R der Radius eines Kreises um $x=a$ in dem Entwickelungsgebiete von Ψ. Die Function $\int \xi(x-a)dx$ wird in folgender Weise mittelst bestimmter Integrale gegeben (Abh. Bd. 96 Nr. 16 B). Es sei

$$(29.)\qquad \begin{cases} \sum_{0}^{\infty} k_\alpha (x-a)^\alpha = \varphi(x-a), \\ \sum_{-2}^{-\infty} k_\alpha (x-a)^\alpha = (x-a)^{-2}\chi\big((x-a)^{-1}\big) \end{cases}$$

gesetzt. Nun ist

$$(30.)\quad \sum_{0}^{\infty} \frac{k_\alpha (x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} = (x-a)\int_1^{'} \varphi\Big((x-a)\frac{\log\beta}{2\pi i}\Big)\frac{d\beta}{2\pi i\beta}.$$

$$(31.)\quad \sum_{-2}^{\infty} \frac{k_\alpha (x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} = -(x-a)^{-1}\int_1^{'} \chi\Big((x-a)^{-1}\frac{\log\beta}{2\pi i}\Big)\frac{d\beta}{2\pi i\beta}.$$

Ferner ist, wenn R' und R'' Radien von Kreisen um $x=a$ als Mittelpunkt in dem Entwickelungsgebiete von $\Psi(x-a)$ sind und $R'<R''$ ist, gemäss der *Cauchy-Laurent*schen Integralformel für $\Psi(x-a)$

$$(32.)\quad \varphi(x-a) = \int_1^{'} \frac{d\lambda R''}{2\pi i}\,\frac{(R''\lambda)^{-1}}{1-(x-a)(R''\lambda)^{-1}}\,\Psi(R''\lambda),\quad \mathrm{Mod}(x-a)R''^{-1}<1,$$

$$(33.)\quad \chi\big((x-a)^{-1}\big) = \int_1^{'} \frac{d\lambda R'}{2\pi i}\,\frac{R'\lambda}{1-(x-a)^{-1}R'\lambda}\,\Psi(R'\lambda),\quad \mathrm{Mod}(x-a)^{-1}R'<1.$$

Diese Ausdrücke für $\varphi(x-a)$ und $\chi\big((x-a)^{-1}\big)$ werden in (30.) bezüglich (31.) eingesetzt, alsdann sei

$$(34.)\quad (x-a)\int_1^{'} \varphi\Big((x-a)\frac{\log\beta}{2\pi i}\Big)\frac{d\beta}{2\pi i\beta} = (x-a)V(x-a).$$

$$(35.)\quad -(x-a)^{-1}\int_1^{''} \chi\Big((x-a)^{-1}\frac{\log\beta}{2\pi i}\Big)\frac{d\beta}{2\pi i\beta} = (x-a)^{-1}W\big((x-a)^{-1}\big)$$

gesetzt. Nun hat man

$$(36.)\quad \int \Psi(x-a)dx = k_{-1}\log(x-a) + (x-a)V(x-a) + (x-a)^{-1}W\big((x-a)^{-1}\big).$$

Unter den Integralzeichen $\int_1'$ ist nun für $\Psi(x-a)$ wieder der Ausdruck

$$(x-a)^r e^{u\left(\frac{1}{x-a}\right)} f_1(x-a)$$

zu setzen.

Das Integral $\mu_1 \int \mu_1^{-1} \mu_2 dx$ erhält jetzt

$$(\text{da} \quad \mu_1 = (x-a)^{R^{(1)}} e^{w^{(1)}\left(\frac{1}{x-a}\right)} f(x-a) \;\; R^{(1)} = R^{(2)} - g - r \quad \text{ist})$$

folgenden Ausdruck:

$$(37.) \quad \begin{cases} (x-a)^{R^{(2)}-g-r} e^{w^{(1)}} f(x-a) \\ \qquad \times \left| k_{-1} \log(x-a) + (x-a) V(x-a) + (x-a)^{-1} W\left((x-a)^{-1}\right) \right|, \end{cases}$$

wo

$$(38.) \quad \begin{cases} e^{w^{(1)}\left(\frac{1}{x-a}\right)} f(x-a) V(x-a) = \int_1' \frac{d\beta}{2\pi i \beta} \int_1' \frac{d\lambda R''}{2\pi i} \frac{e^Z f(x-a)(R''\lambda)^{r-1} f_1(R''\lambda)}{1-(x-a)\frac{\log\beta}{2\pi i}(R''\lambda)^{-1}}, \\ \\ Z = w^{(1)}\left(\frac{1}{x-a}\right) + u\left(\frac{1}{R''\lambda}\right) \end{cases}$$

$$(39.) \quad \begin{cases} e^{w^{(1)}\left(\frac{1}{x-a}\right)} f(x-a) W\left((x-a)^{-1}\right) = -\int_1' \frac{d\beta}{2\pi i \beta} \int_1' \frac{d\lambda R'}{2\pi i} \frac{e^{Z'} f(x-a)(R'\lambda)^{r+1} f_1(R'\lambda)}{1-(x-a)^{-1}\frac{\log\beta}{2\pi i} R'\lambda}, \\ \\ Z' = w^{(1)}\left(\frac{1}{x-a}\right) + u\left(\frac{1}{R'\lambda}\right) \end{cases}$$

ist. Die Entwickelung $f(x-a)$ convergirt in dem Bezirke von a bei

$$F_2(y, x) = 0,$$

die Entwickelung $f_1(x-a)$ in einem gewissen Kreise um a als Mittelpunkt, die Radien R' und R'' sind innerhalb des gemeinschaftlichen Gebietes anzunehmen. Der Integralausdruck (38.) gilt, solange $\text{mod.}(x-a) < R''$ (abgesehen vom Punkte a); der Integralausdruck (39.) solange

$$R' < \text{Mod.}(x-a) < R_0,$$

wenn R_0 der Radius des Bezirkes von a bei $F_2(y, x) = 0$ ist. Der Ausdruck für die Summe

$$(40.) \quad (x-a) e^{w^{(1)}\left(\frac{1}{x-a}\right)} f(x-a) V(x-a) + (x-a)^{-1} e^{w^{(1)}\left(\frac{1}{x-a}\right)} f(x-a) W\left((x-a)^{-1}\right),$$

worin die beiden Integralausdrücke (38.) und (39.) eingehen, gilt, so lange

$$R' < \text{Mod.}(x-a) < R''.$$

Die durch (40.) ausgedrückte Function aber bleibt in einem einfach zusammenhängenden endlichen Gebiete, das von singulären Punkten von $F_2(y, x) = 0$ nur den Punkt a enthält, abgesehen von a einwerthig und stetig (Abh. Bd. 96 Nr. 13). In dem Bezirke von $x = a$ bei $F_2(y, x) = 0$ hat diese Function $F(x-a)$ eine Entwickelung nach Potenzen von $x-a$. Der Coefficient $K_\mathfrak{c}$ ($\mathfrak{c} = -\infty \cdots +\infty$) in dieser Entwickelung wird durch das Integral

$$(41.) \qquad K_\mathfrak{c} = \int_1^{\prime} \frac{d\zeta R}{2\pi i} (R\zeta)^{-\mathfrak{c}-1} F(R\zeta)$$

ausgedrückt, wo $R' < R < R''$ genommen wird. Zur Darstellung von (41.) unter Benutzung der Integralausdrücke (38.) (39.) werden die Grössen

$$(42.) \qquad \frac{1}{1-(x-a)\frac{\log\beta}{2\pi i}(R''\lambda)^{-1}}, \quad \frac{1}{1-(x-a)^{-1}\frac{\log\beta}{2\pi i}R'\lambda}$$

durch ihre Entwickelungen nach Potenzen von $x-a$ ersetzt. Alsdann sind bei jedem der beiden Summanden die vorkommenden Grössen unter die Gesammtheit der Integralzeichen zu stellen. Die Entwickelungen werden mit einander multiplicirt, wobei die Stellenzeiger der Glieder alle positiv genommen werden. Alsdann wird in den einzelnen Gliedern integrirt. Die Integrale

$$(43.) \qquad \int_1^{\prime} \frac{(R\lambda)^{\mathfrak{a}} R\, d\lambda}{2\pi i}, \quad \int_1^{\prime} \frac{(R\zeta)^{\mathfrak{a}} R\, d\zeta}{2\pi i}, \quad \int_1^{\prime} \left(\frac{\log\beta}{2\pi i}\right)^{\mathfrak{b}} \frac{d\beta}{2\pi i\beta}$$

sind, wenn $\mathfrak{a} \gtrless -1$, gleich Null, sonst gleich 1, das letzte gleich $\frac{1}{\mathfrak{b}+1}$ ($\mathfrak{b}$ ganzzahlig und $\geqq 0$). Es erfolgt für $K_\mathfrak{c}$ (ebenso für k_{-1} (28.)) eine (von R, R', R'' unabhängige) einfach unendliche Reihe ganzer rationaler Ausdrücke gegebener Constanten (Abh. Bd. 96 Nr. 17.).

Eine Recursionsformel für die $K_\mathfrak{c}$ mit constanter Anzahl der Glieder ergiebt sich, indem man nach Abh. Bd. 96 Nr. 15 aus $F_2(y, x) = 0$ eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 herleitet, welcher die Function $(x-a)^{R^{(2)}-g-r} F(x-a)$ genügt.

b.) Aus den bestimmten Integralen (38.) (39.) erhält man nun auch für die Function (40.) *eine Darstellung, welche der Formel* (25.) *analog ist* und in einem Kreisringe um $x = a$ als Mittelpunkt innerhalb des Kreisringes mit den Radien R' und R'' gilt. Die dabei auftretenden Integrationen

sind $\int_1' \frac{d\beta}{2\pi i} \int_1' \frac{d\lambda R''}{2\pi i}$ bezüglich $\int_1' \frac{d\beta}{2\pi i} \int_1' \frac{d\lambda R'}{2\pi i}$, zu denen, wenn K_c (41.) ((oder k_{-1} (28.)) berechnet werden soll, noch die Integration $\int_1' \frac{d\zeta R}{2\pi i}$ hinzutritt. Die weitere Behandlung ist dem früheren Falle bei (23.) etc. entsprechend.

III. Die Entwickelung der Integrale (6.) μ_1, $\mu_1 \int \mu_1^{-1} \mu_2 dx$ *und der Integrale* (8.) μ_1, μ_1' *im Bezirke eines nichtsingulären Punktes a von* $F_2(y, x) = 0$ *im Endlichen und die Berechnung dieser Functionen.*

Die Entwickelungen der beiden Integrale von $F_2(y, x) = 0$ haben die Form $\sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$ und gelten in dem Bezirke des Punktes a, eine Recursionsformel für die Coefficienten mit constanter Anzahl der Glieder ergiebt sich aus $F_2(y, x) = 0$.

Man erhält unmittelbar aus (4.) und (7.) die Entwicklungen von μ_1 und μ_1'.

Die Grösse $\mu_1^{-1}\mu_2$ hat, wenn in dem Punkte a die Funktion $\Phi(x)$ in μ_1 nicht verschwindet, eine Entwicklung der Form $\sum_0^\infty c_\alpha'(x-a)^\alpha$, mod. $c_0' \gtrless 0$, daher das Integral $\mu_1 \int \mu_1^{-1}\mu_2 dx$ den Ausdruck

$$\mu_1 \sum_0^\infty \frac{c_\alpha'(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \tag{44.}$$

Wenn in a $\Phi(x) = 0$ ist, so hat $\mu_1^{-1}\mu_2$ eine Entwickelung der Form $\frac{c_{-2}}{(x-a)^2} + \sum_0^\infty c_\alpha'(x-a)^\alpha$, und das Integral $\mu_1 \int \mu_1^{-1}\mu_2 dx$ den Ausdruck

$$\mu_1 \left\{ \frac{-c_{-2}}{x-a} + \sum_0^\infty \frac{c_\alpha'(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right\}. \tag{45.}$$

Die Werthberechnung der Functionen μ_1, μ_1' erfolgt unmittelbar aus den Ausdrücken (4.) und (7.). Die Werthberechnung der Function $\mu_1 \int \mu_1^{-1}\mu_2 dx$ geschieht vermittelst der Differentialgleichung $F_2(y, x) = 0$, wie bei (12.) angegeben ist.

IV. Der Umgang um einen singulären Punkt a von $F_2(y, x) = 0$ *im Endlichen bei den Integralen* (6.) μ_1, $\mu_1 \int \mu_1^{-1}\mu_2 dx$ *und* (8.) μ_1, μ_1'. — *Die Differentialdeterminante dieser Integrale.*

Bei dem Umgange um einen singulären Punkt a von $F_2(y, x) = 0$

im Endlichen $a = a_\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} = 1, \ldots, z)$ geht μ_1 (4.) über in $e^{\pm 2\pi i R_\mathfrak{a}^{(1)}} \mu_1$ das Vorzeichen + bei dem Umgange in positiver Richtung, das Vorzeichen − bei dem Umgange in negativer Richtung. Entsprechend verhält sich μ_1' (7.).

Die Function $\int \mu_1^{-1} \mu_2 \, dx$ geht, wenn $r = R^{(2)} - g - R^{(1)}$ in (10.) nicht ganzzahlig ist (11.), (15.), in $e^{\pm 2\pi i r} \int \mu_1^{-1} \mu_2 \, dx$ über, daher das Integral $\mu_1 \int \mu_1^{-1} \mu_2 dx$ (12.), (17.) in

$$e^{\pm 2\pi i R_\mathfrak{a}^{(2)}} \mu_1 \int \mu_1^{-1} \mu_2 dx. \tag{46.}$$

Die Function $\int \mu_1^{-1} \mu_2 dx$ geht, wenn $r = R^{(2)} - g - R^{(1)}$ in (10.) ganzzahlig ist (s. nach 11.), (36.), über in $\int \mu_1^{-1} \mu_2 dx \pm 2\pi i \, k_{-1}$, daher das Integral $\mu_1 \int \mu_1^{-1} \mu_2 dx$ (13.), (37.) in

$$e^{\pm 2\pi i R_\mathfrak{a}^{(2)}} \left\{ \mu_1 \int \mu_1^{-1} \mu_2 dx \pm 2\pi i k_{-1} \mu_1 \right\}. \tag{47.}$$

Die Determinante D der Integrale (6.) μ_1, $\mu_1 \int \mu_1^{-1} \mu_2 dx$ und ihrer ersten Differentialquotienten (Differentialdeterminante) ist

$$D = \mu_1 \mu_2 = e^{W^{(1)} + W^{(2)}} \prod_1^{\varkappa} (x - a_\mathfrak{a})^{R_\mathfrak{a}^{(1)} + R_\mathfrak{a}^{(2)} - g_\mathfrak{a}} \tag{48.}$$

Die Differentialdeterminante der Integrale (8.) μ_1, μ_1' kann sich von dem Ausdrucke (48.) nur um einen constanten Factor unterscheiden. Dieser constante Factor ist direct aus dem Ausdrucke der Determinante

$$\mu_1 \mu_1' \left(\frac{d \log \mu_1'}{dx} - \frac{d \log \mu_1}{dx} \right) \tag{49.}$$

zu entnehmen.

V. ***Das Verhalten der Integrale*** (6.) μ_1, $\mu_1 \int \mu_1^{-1} \mu_2 dx$ ***und*** (8.) μ_1, μ_1' *bei* $x = \infty$.

Hier wird folgende allgemeine Bemerkung gemacht.

Zur Darstellung der Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung $m$ter Ordnung mit rationalen Coefficienten $F_m(y, x) = 0$ bei $x = \infty$ wird (vgl. Abh. Bd. 96) die Substitution $x = t^{-1}$ vorgenommen, wodurch $F_m(y, x)$ in $(-t^2)^m F_m'(y, t)$ übergeht, alsdann sind die Ausdrücke der Integrale von $F_m'(y, t) = 0$ bei $t = 0$ aufzustellen. Aus den aufgestellten Ausdrücken werden die Entwickelungen hergeleitet und in diesen wird $t = \frac{1}{x}$ gesetzt.

Man kann aber auch in die aufgestellten von t abhängenden Ausdrücke selbst für t wieder $\frac{1}{x}$ einführen, alsdann aus letzteren Ausdrücken die Entwickelungen vornehmen (ebenso umgekehrt $\frac{1}{t}$ für x einführen). Wenn die aufgestellten Ausdrücke der Integrale bei $x = \infty$ schon ursprünglich x enthalten, so ist es zweckmässig aus diesen Ausdrücken selbst die Entwickelungen herzuleiten.

Irgend ein Integral von $F_m'(y, t) = 0$ bei $t = 0$ sei durch den Ausdruck

$$\mu_1 \int dt\, \mu_1^{-1} \mu_2 \int \cdots \int \mu_{s-1}^{-1} \mu_s dt \tag{50.}$$

gegeben, wo die μ normale Elementarintegrale sind, das constante Glied bei den Integrationen jedesmal annullirt wird. In den Ausdruck (50.) wird direct für t durch $t = \frac{1}{x}$ die Variable x eingeführt, wodurch derselbe in

$$\mu_1 \int dx \frac{dt}{dx} \mu_1^{-1} \mu_2 \int \cdots \int \frac{dt}{dx} \mu_{s-1}^{-1} \mu_s dx \tag{51.}$$

übergeht, wo das constante Glied bei der jedesmaligen Integration annullirt werden muss, da die Substitution $t = \frac{1}{x}$ in der entsprechenden aus (50.) hervorgehenden Entwickelung kein constantes Glied liefert. *Die Integralfunctionen in* (51.) *kann man nun durch die bestimmten Integrale aus Abh. Bd. 96 Nr. 16* (*hier die Formeln* II (16.), (36.)) *direkt ausdrücken.* Dazu wird dort $a = 0$ gesetzt. Convergirt die Entwickelung $x^r \psi(x) = x^r \left(\sum_0^{\infty} c_\alpha x^\alpha + \sum_{-1}^{-\infty} c_\alpha x^\alpha \right)$ ausserhalb eines Kreises um $x = 0$ als Mittelpunkt, so bleibt für dieses Convergenzgebiet die Formel (16.) bestehen, ebenso die Formel (36.) (wo $\log x$ statt $\log(x-a)$ steht) in dem Kreisringe mit den Radien R' und R''. Entsprechend bleiben alle Betrachtungen in Abh. Bd. 96 Nr. 16 unverändert (vgl. dort III). An Stelle der früher unter den Integralzeichen vorkommenden Grössen der Form $e^u (x-a)^r \sum_0^{\infty} k_\alpha (x-a)^\alpha$, $u = 0$ oder $\sum_1^{n} c_{-\alpha} (x-a)^{-\alpha}$ treten solche der Form $e^v x^r \sum_0^{\infty} k_\alpha \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha$, $v = 0$ oder $\sum_1^{n} c_\alpha x^\alpha$. Ebenso bleiben die auf die bestimmten Integrale sich gründenden, hier in II gemachten Betrachtungen zur Bestimmung der Coefficienten in den Entwickelungen und zur Werthberechnung der Functionen unverändert (entsprechend Abh. Bd. 96 Nr. 17, 18). Es besteht ferner auch bei $x = \infty$ unverändert die Methode

(Abh. Bd. 96 Nr. 15), aus der ursprünglichen Differentialgleichung solche homogenen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten herzuleiten, welcher die Factoren der Logarithmenpotenzen genügen. Das Verfahren zur Bestimmung des Resultates des Umganges um einen Punkt, hier IV (Abh. Bd. 96 Nr. 19), bezieht sich bei $t = 0$ auf einen Ausdruck der Form (50.) und ist bei $x = \infty$ unmittelbar auf einen Ausdruck der Form (51.) anwendbar. Die Differentialdeterminante D' der von t abhängenden Integrale und die Differentialdeterminante D derselben von x abhängenden Integrale stehen in der Relation $D = \left(\frac{dt}{dx}\right)^{\frac{m(m-1)}{2}} D'$ (vgl. Abh. Bd. 96 Nr. 20 (4.)). Jede dieser Determinanten geht aus einem Ausdrucke der Form (50.) bezüglich (51.) hervor (Abh. Bd. 96 Nr. 21.).

Bei der hier vorliegenden Differentialgleichung $F_2(y, x) = 0$ sind die *Integrale bei* $x = \infty$ *direct von* x *abhängig gegeben* durch die Ausdrücke (6.) μ_1, $\mu_1 \int \mu_1^{-1} \mu_2 dx$ oder (8.) μ_1, μ_1'. Die Entwickelungen und Berechnungen derselben erhält man nach dem Vorhergehenden unmittelbar aus diesen Ausdrücken nach dem Verfahren von II bezüglich III; ebenso das Resultat des Umganges um $x = \infty$ nach IV, die Differentialdeterminante durch den Ausdruck (48.).

VI. *Die Fortsetzung der Integrale* (6.) μ_1, $\mu_1 \int \mu_1^{-1} \mu_2 dx$ *und* (8.) μ_1, μ_1'.

A) Durch die singulären Punkte von $F_2(y, x) = 0$ a_α $(\alpha = 1, \ldots, \varkappa)$ und den singulären oder nicht singulären Punkt $x = \infty$ sei eine in sich zurücklaufende sich selbst nicht schneidende Linie gezogen, wodurch die Constructionsebene in zwei Gebiete E_1, E_2 zerfällt. Die Functionen μ_1, μ_2 verlaufen in jedem derselben einwerthig; μ_1' verhält sich in dem Verlaufe analog μ_1. In einem dieser Gebiete E_1 seien die Werthe von $\log(x - a_\alpha)$ $(\alpha = 1, \ldots, \varkappa)$ und $\log x$ im Bezirke von $x = \infty$ fixirt, und daher auch die Werthe von Grössen $(x - a_\alpha)^\varrho$, x^σ.

Die Entwickelung der Function $\int \mu_1^{-1} \mu_2 dx = J$ ist bei jedem dieser Punkte ohne constantes Glied angenommen. Die Function J ist in E_1 einwerthig (III). Diese Grösse J sei in E_1 bei a_α $(\alpha = 1, \ldots, \varkappa)$ durch J_α, bei $x = \infty$ durch $J_{\varkappa+1}$ bezeichnet. Dann geht in E_1 J_α in $J_{\alpha+1} + c_\alpha$ $(J_{\varkappa+2} = J_1)$ über und also $J_{\alpha+1}$ in $J_\alpha - c_\alpha$, wo die c_α zu bestimmende Constanten sind.

Das Integral von $F_2(y, x) = 0$ $\mu_1 = y^{(1)}$ verläuft in E_1 einwerthig, ebenso das Integral $\mu_1 J_a$, dasselbe sei durch $y_a^{(2)}$ bezeichnet. $y_a^{(2)}$ geht in E_1 über in $c_a y^{(1)} + y_{a+1}^{(2)}$ und daher $y_{a+1}^{(2)}$ in $-c_a y^{(1)} + y_a^{(2)}$.

Die Constanten in den Substitutionen bei Umgang der Integrale $y^{(1)}$, $y_a^{(2)}$ um den singulären Punkt a_a bezüglich $x = \infty$ sind in IV und V bestimmt.

Bei einem nichtsingulären Punkte $x = c$ ist die Entwickelung von $\int \mu_1^{-1} \mu_2 dx = J_c$ ebenfalls ohne constantes Glied angenommen. Liegt der Punkt c in E_2, so sollen μ_1 und μ_2 einwerthig in die Werthe in E_1 bei dem Durchgange zwischen a_b und a_{b+1} übergehen, liegt der Punkt c in E_1, so ist dieses auch der Fall. Dann geht auf demselben Wege J_c in $J_b + \gamma_{bc}$ über und auf dem umgekehrten Wege J_b in $J_c - \gamma_{bc}$, wo γ_{bc} eine zu bestimmende Constante ist. Das Integral von $F_2(y, x) = 0$ $\mu_1 = y^{(1)}$ verläuft auf diesem Wege einwerthig, ebenso das Integral $\mu_1 J_c$, dasselbe sei durch $y_c^{(2)}$ bezeichnet. $y_c^{(2)}$ geht dabei in $\gamma_{bc} y^{(1)} + y_b^{(2)}$ über und $y_b^{(2)}$ auf dem umgekehrten Wege in $-\gamma_{bc} y^{(1)} + y_c^{(2)}$. Bei einem zweiten nichtsingulären Punkte c' sei eine γ entsprechende Constante durch $\gamma_{b'c'}$ bezeichnet.

Um nun die Fortsetzung eines Integrales (6.) oder (8.) von einem Punkte auf irgend einem Wege zu einem anderen Punkte zu bewerkstelligen, kann man diesen Weg so reduciren, dass die vorhin angegebenen Substitutionen zusammenzusetzen sind. Die Fortsetzung wird also durch Anwendung einer endlichen Anzahl von Substitutionen vollzogen.

B) Um die angegebenen Constanten c_a $(a = 1, \ldots, \varkappa+1)$, γ, γ' auszudrücken, die in den Substitutionen beim Uebergange von einem Punkte zu einem anderen vorkommen, kann man entweder aus einer Gleichung wie

$$y_a^{(2)} = c_a y^{(1)} + y_{a+1}^{(2)} \tag{52.}$$

die Constante c_a bestimmen in einem Punkte, wo $y^{(1)} = \mu_1$ nicht verschwindet, oder man kann das Gleichungssystem

$$\begin{cases} y_a^{(2)} = c_a y^{(1)} + y_{a+1}^{(2)}, \\ \dfrac{dy_a^{(2)}}{dx} = c_a \dfrac{dy^{(1)}}{dx} + \dfrac{dy_{a+1}^{(2)}}{dx} \end{cases} \tag{53.}$$

nach der Constanten c_a auflösen, der Ausdruck der Determinante ist in IV gegeben. Dieses geht unmittelbar an, wenn die Entwicklungsgebiete von $y_a^{(2)}$ und $y_{a+1}^{(2)}$, die Bezirke der beiden bezüglichen Punkte, einen gemeinsamen Theil haben. Wenn kein solcher gemeinsamer Theil der Entwickelungsgebiete vorhanden ist, so wird eine lineare Substitution für x

$x = R(\xi)$ angewandt, durch welche ein Kreis, der im Innern den Punkt a bei welchem $y_a^{(2)}$ entwickelt ist, und auf der Peripherie den Punkt b, bei welchem $y^{(1)}$ und $y_{a+1}^{(2)}$ ihre Entwickelungen haben, und der sonst keinen singulären Punkt von $F_2(y, x) = 0$ im Innern enthält, conform auf den Kreis um $\xi = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1 abgebildet wird. Die Integrale werden dann als Functionen von ξ dargestellt, und wird (52.) oder (53.), wobei nach ξ differentirt wird, angewandt. Wenn ein Kreis von dieser Lage nicht vorhanden ist, so kann man bei $x = a$ und $x = b$ je eine lineare Substitution anwenden und die Integrale nachher wieder als Functionen von x betrachten, oder es sind nichtsinguläre Punkte bei denen die Integrale entwickelt werden, einzuschieben. Die Ausdrücke der Functionen werden unter Anwendung der bestimmten Integrale aus II. erhalten gemäss den Angaben Abh. Bd. 96 Nr. 20 (vgl. Abh. Bd. 107 S. 58 und 64).

C) Die vorhin genannten Constanten c_a $(a = 1, \ldots, \varkappa+1)$, γ, γ' in den Substitutionen beim Uebergange von einem Punkte zu einem anderen nehmen im Allgemeinen complicirte Ausdrücke an. Es ist daher wesentlich die Werthberechnung dieser Constanten mit vorgeschriebener Annäherung durchführen zu können. Zu dem Zwecke geht man auf den Ausdruck $F_2(y, x)$ in der Differentialgleichung $F_2 = 0$ zurück. Entwickelt man bei einem nichtsingulären Punkte von $F_2(y, x) = 0$ Integrale, so kann man die Werthe dieser Entwickelungen und ihrer Differentialquotienten innerhatb des ganzen Bezirkes des nichtsingulären Punktes mit vorgeschriebener Annäherung berechnen (vgl. III). Um möglichst einfache Constanten in den Entwickelungen zu erhalten, kann man bei dem nichtsingulären Punkte die Integrale y_1, y_2 so wählen, dass in diesem Punkte $y_1 = 1$, $\frac{dy_1}{dx} = 0$, $y_2 = 0$, $\frac{dy_2}{dx} = 1$, demnach die Differentialdeterminante gleich 1 wird. Die Werthe der Integrale (6.) oder (8.) und ihrer Differentialquotienten in einem Gebiete innerhalb des Bezirkes des Punktes, bei welchem dieselben entwickelt sind, werden nach den Angaben in II, bezüglich in V bei $x = \infty$, mit vorgeschriebener Annäherung bestimmt, die Differentialdeterminante derselben ist in IV gegeben. Es sind nun, um die oben genannten Constanten beim Uebergange von einem Punkte zu einem anderen mit beliebiger Annäherung zu berechnen, nichtsinguläre Punkte passend einzuschieben, und dann wird successive der Uebergang von einem Punkte zu einem anderen

vorgenommen, wobei Gleichungssysteme der Form

$$(54.) \qquad \begin{cases} y = k_1 y_1 + k_2 y_2, \\ \dfrac{dy}{dx} = k_1 \dfrac{dy_1}{dx} + k_2 \dfrac{dy_2}{dx}, \end{cases}$$

nach den Constanten aufzulösen sind.

6.

Algebraische Aufgaben, die bei Behandlung der vorgelegten Differentialgleichung auftreten.

Nach Nr. 2 können unter den Constanten in den fundamentalen determinirenden Factoren bei den singulären Punkten von $F_2(y, x) = 0$ und in den Exponenten und demnach unter den Constanten des Systemes Nr. 3 (2.) Quadratwurzeln aus rationalen Ausdrücken der ursprünglichen Constanten in dem Differentialausdrucke $F_2(y, x)$ vorkommen. Es tritt dabei die Aufgabe auf zu beurtheilen, ob ein ganzer rationaler Ausdruck solcher Quadratwurzeln und der ursprünglichen Constanten oder der ursprünglichen Constanten allein (mit rationalen Zahlcoefficienten) verschwindet. Zu dem Zwecke wird (vgl. Abh. Bd. 95 Nr. 7, Bd. 96 Nr. 25) eine algebraische Gleichung hergeleitet, welcher dieser Ausdruck Genüge leistet, deren Constanten rationale Ausdrücke gegebener Constanten und zwar im Allgemeinen rationale Zahlen sind. Alsdann ist für das Verschwinden des Ausdruckes nothwendig und hinreichend, dass der Modul desselben kleiner als eine positive Grösse ist, die als unterhalb des kleinsten Moduls der nicht verschwindenden Wurzeln der Gleichung liegend ermittelt ist. Man erhält eine solche Gleichung, indem für die Summe, die Differenz, das Product, den Quotienten zweier Grössen, welche Wurzeln gegebener algebraischer Gleichungen sind, sich aus diesen Gleichungen wieder eine solche Gleichung herleiten lässt, deren Coefficienten rationale Ausdrücke der Coefficienten der gegebenen Gleichungen sind. Aus einer algebraischen Gleichung für s geht durch $s = t^2$ eine solche für t mit denselben Constanten hervor. Unter den Wurzeln dieser Gleichung findet man den Werth von t mit Anwendung des vorher angegebenen Verfahrens. Die Berechnung eines ganzen rationalen Ausdruckes gegebener Grössen mit beliebiger Annäherung geschieht nach dem Schema Nr. 5 (24.). Sind die ursprünglichen Constanten in $F_2(y, x) = 0$ algebraische Zahlen, so lassen sich alle Operationen durchführen. Enthalten die Coefficienten von $F_2(y, x) = 0$ willkürliche Parameter, so ist zuzusehen, in wie fern dieselben sich den gestellten Bedingungen gemäss bestimmen lassen.

7.

Die nichthomogene Differentialgleichung $F_2(y, x) = q$.

$F_2(y, x)$ soll durch ein System Nr. 3 (2.) darstellbar sein. Ueber q werden die Voraussetzungen aus Abh. Bd. 107 gemacht. Es ist ein particuläres Integral von $F_2(y, x) = q$ herzustellen, zu welchem das vollständige Integral von $F_2(y, x) = 0$ addirt wird. Vermöge der Darstellung der Integrale von $F_2 = 0$ durch die Ausdrücke Nr. 5 (6.) ergiebt sich ein Integral von $F_2 = q$ unter der Form

$$\mu_1 \int dx \mu_1^{-1} \mu_2 \int \mu_2^{-1} q \, dx.$$

Die Entwickelung desselben im Bezirke eines Punktes und weitere Behandlung geschieht unter Zugrundelegung der über q in Abh. Bd. 107 gemachten Angaben nach Art des Verfahrens in Nr. 5. Im Uebrigen tritt die in Abh. Bd. 107 auseinander gesetzte Behandlung der Differentialgleichung $F_2(y, x) = q$ ein.

Wenn $F_2(y, x) = 0$ in zwei getrennte homogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit rationalen Coefficienten zerfällt, so hat man als Integrale von $F_2 = 0$ die Ausdrücke Nr. 5 (8.). Alsdann kann man auf $F_2(y, x) = q$ auch einfach die Methode der Variation der Constanten anwenden (vgl. Abh. Bd. 107 S. 59). Die Determinante der beiden Integrale und ihrer ersten Ableitungen ist durch Nr. 5 IV. gegeben. Die weitere Behandlung geschieht nach Nr. 5 und den Angaben in Abh. Bd. 107.

Greifswald, Januar 1896.

Ueber die Werthschwankungen der harmonischen Functionen zweier reellen Veränderlichen und der Functionen eines complexen Arguments.

(Von Herrn *F. Schottky* in Marburg.)

Herr *Neumann* giebt an einer Stelle in seiner Theorie der *Abel*schen Functionen (S. 415) einen Satz, der, wenn auch in etwas anderer Form ausgesprochen, im wesentlichen mit folgendem identisch ist:

Es sei in der Ebene für das Innere und die Grenze eines Kreises eine reelle reguläre harmonische Function U definirt, deren Werthschwankungen $U'-U''$ an der Grenze, absolut genommen, einen gegebenen positiven Werth Δ_0 nicht überschreiten. Alsdann ist die Differenz der Werthe von U in zwei Punkten P_0, P_1, die innerhalb des Kreises liegen, nicht nur kleiner als Δ_0, sondern auch kleiner oder gleich:

$$\Delta = \Delta_0 \cdot \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{r}{R}\right),$$

wo R den Radius des Grenzkreises, r den eines kleineren zu ihm concentrischen Kreises bedeutet, der nur so gross sein muss, dass er beide Punkte umfasst.

Herr *Schwarz* macht hierzu die wichtige Bemerkung*), dass in dem Falle, wo P_0, P_1 an der Grenze des kleineren Kreises liegen und Endpunkte eines Diameters sind, der Ausdruck Δ auch wirklich die obere Grenze der Differenz U_1-U_0 darstellt, indem er eine, allerdings an dem Grenzkreise selbst unstetige harmonische Function U angiebt, für welche U_1-U_0 den Werth Δ wirklich erreicht.

Es ist klar, dass diese schönen, aber sehr speciell gefassten Sätze weiter ausgedehnt werden können.

Statt der Kreisfläche nehme ich ein beliebiges $(\varrho+1)$-fach zusammen-

*) Gesammelte Abhandlungen, Bd. II, S. 361.

hängendes und von regulären Curven begrenztes Gebiet. Es sei alsdann $\varphi(x)$ allgemein die Bezeichnung für eine im ganzen Gebiet, mit Einschluss der Grenze, reguläre und eindeutige Function von $x = \xi + \eta i$, und ebenso $\psi(\bar{x}) = \psi(\xi - \eta i)$ allgemein die Bezeichnung für eine Function von $\xi - \eta i$, die denselben Charakter hat. Ich fasse dann die Gesammtheit der Functionen $U(\xi, \eta)$ ins Auge, die durch Zusammensetzung zweier solcher Ausdrücke entstehen:

$$U(\xi, \eta) = \varphi(\xi + \eta i) + \psi(\xi - \eta i).$$

Da ψ auch constant angenommen werden kann, so sind die einfachen Functionen $\varphi(\xi + \eta i)$ unter diesen $U(\xi, \eta)$ mit enthalten.

Es seien P_0, P_1 zwei beliebig, aber fest angenommene Punkte im Innern des Gebiets, und U_0, U_1 die Werthe einer solchen Function U in P_0 und P_1. Ich nehme dann, den einzelnen Randlinien des Gebiets entsprechend, $\varrho + 1$ positive oder wenigstens nicht negative Grössen $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_\varrho$ beliebig an und frage:

Bis zu welcher Grenze kann der absolute Betrag von $U_0 - U_1$ ansteigen, wenn ich mich auf diejenigen Functionen U beschränke, deren Werthschwankungen auf den einzelnen Randlinien absolut genommen die gegebenen Grössen $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_\varrho$ nicht überschreiten?

Diese Grenze Δ, welche einerseits von den gegebenen Grössen $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_\varrho$, andererseits von der Lage der Punkte P_0, P_1 im Gebiet abhängt, zu bestimmen, ist die Aufgabe der vorliegenden Arbeit.

§ 1.

Ich stelle mir irgend ein begrenztes Gebiet G in der Ebene der complexen Grösse $x = \xi + \eta i$ vor. Ich setze von ihm voraus: erstens, dass es sich nicht ins Unendliche erstreckt; zweitens, dass die Randlinie, oder, wenn das Gebiet mehrfach zusammenhängend ist, jede einzelne der Randlinien, eine vollständig reguläre Curve ist. Eine solche ist darstellbar durch eine einzige Gleichung $f(\xi, \eta) = 0$, wo $f(\xi, \eta)$ regulär ist in der Nähe der Curve und in ihr überall nur von der ersten Ordnung verschwindet.

Betrachten wir dann zunächst die *Green*sche Function des Gebiets in Bezug auf einen innerhalb liegenden festen Punkt $x_0 = \xi_0 + i\eta_0$:

$$L(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0).$$

Dies ist eine reelle harmonische Function; sie hat den constanten Werth 0

an der ganzen Grenze; in der Nähe des Punktes x_0 wird sie negativ unendlich wie $\log|x-x_0|$. Die Differenz aber:

$$\log|x-x_0|-L(\xi,\ \eta;\ \ \xi_0,\ \eta_0) = \bar{L}(\xi,\ \eta;\ \ \xi_0,\ \eta_0)$$

ist eine im ganzen Gebiet reguläre Function, einschliesslich der Grenze, und deshalb auch über die Grenze hinaus analytisch fortsetzbar.

Die weiteren Eigenschaften der *Green*schen Function sind nun folgende. Da sie in dem einzigen singulären Punkte x_0 bestimmt negativ unendlich wird, so muss sie ein endliches Maximum haben. Als harmonische Function kann sie aber dieses Maximum an keiner Stelle im Innern des Gebiets annehmen; folglich muss sie es auf der Grenze annehmen, und da dort überall $L=0$ ist, so muss im Innern L beständig negativ sein. Es gilt daher für je zwei im Innern liegende Punkte $(\xi_0,\ \eta_0)$, $(\xi_1,\ \eta_1)$ die Ungleichung:

$$L(\xi_0,\ \eta_0;\ \ \xi_1,\ \eta_1) < 0.$$

Ferner ist bekanntlich, für je zwei innere Punkte:

$$L(\xi_0,\ \eta_0;\ \ \xi_1,\ \eta_1) = L(\xi_1,\ \eta_1;\ \ \xi_0,\ \eta_0).$$

Endlich hat $L(\xi,\ \eta;\ \xi_0,\ \eta_0)$ die Eigenschaft, invariant zu sein bei conformer Abbildung des Gebiets. Wenn wir das Gebiet G durch eine Substitution

$$y=g(x),\quad x=g_1(y)$$

abbilden in einen anderen Bereich $\bar{G}$, so geht hierdurch die *Green*sche Function $L(\xi,\ \eta;\ \xi_0,\ \eta_0)$ über in die des neuen Gebietes, genommen in Bezug auf den x_0 entsprechenden Punkt $y_0=g(x_0)$, der im Innern von $\bar{G}$ liegt.

Statt $L(\xi,\ \eta;\ \xi_0,\ \eta_0)$ stellen wir jetzt die zugehörige Exponentialgrösse

$$e^{L(\xi,\ \eta;\ \xi_0,\ \eta_0)} = E(\xi,\ \eta;\ \ \xi_0,\ \eta_0)$$

auf, die natürlich entsprechende Eigenschaften hat. E verschwindet im Punkte x_0, wie $|x-x_0|$ und wird 1 auf der Grenze. Wenn man aber den Quotienten bildet:

$$\frac{|x-x_0|}{E(\xi,\ \eta;\ \xi_0,\ \eta_0)} = \bar{E}(\xi,\ \eta;\ \ \xi_0,\ \eta_0),$$

so ist dieser eine im ganzen Gebiet reguläre, stets positive Function. Man kann sie also auch nach Potenzen von $\xi-\xi_0$, $\eta-\eta_0$ entwickeln. Das sicher von 0 verschiedene Anfangsglied möge mit $\bar{E}(\xi_0,\ \eta_0)$ bezeichnet werden:

$$\bar{E}(\xi_0,\ \eta_0;\ \ \xi_0,\ \eta_0) = \bar{E}(\xi_0,\ \eta_0).$$

Für je zwei verschiedene Punkte im Innern von G ist:

$$0 < E(\xi_0, \eta_0; \xi_1, \eta_1) < 1,$$

$$E(\xi_0, \eta_0; \xi_1, \eta_1) = E(\xi_1, \eta_1; \xi_0, \eta_0).$$

Durch die Substitution

$$y = g(x), \quad x = g_1(y)$$

geht $E(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ in die entsprechende E-Function des neuen Gebietes $\overline{G}$ über.

Demnach haben wir hier je zwei Punkten (ξ_0, η_0), (ξ_1, η_1) im Innern der gegebenen Fläche eine bestimmte zwischen 0 und 1 enthaltene Grösse

$$E = E(\xi_0, \eta_0; \xi_1, \eta_1)$$

zugeordnet, die gleich 0 wird, wenn die beiden Punkte zusammenfallen, und gleich 1, wenn einer der beiden Punkte nach der Grenze rückt. Wir wollen sie „das E der beiden Punkte in dem gegebenen Gebiet" nennen. Sie stellt insofern eine Invariante der von den Randlinien und den beiden Punkten gebildeten Figur dar, als derselbe Werth E, wenn ich das Gebiet conform abbilde, zugleich das E der beiden entsprechenden Punkte in dem neuen Gebiet ist.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Grösse E im Falle des einfach zusammenhängenden Gebiets, das sich immer auf eine Kreisfläche abbilden lässt. Hier ist nämlich E zugleich die einzige Invariante der Figur.

Nehmen wir für den Augenblick an, das Gebiet G sei ein Kreis, der mit dem Radius R um den Nullpunkt beschrieben ist. Die *Green*sche Function ist dann:

$$L(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \log \left| \frac{(x - x_0)R}{R^2 - x\bar{x}_0} \right|,$$

wo $\bar{x}_0$ den zu x_0 conjugirten complexen Werth bedeutet. Denn nehme ich x auf dem Kreise selbst an,

$$x\bar{x} = R^2,$$

so wird:

$$|R^2 - x\bar{x}_0| = |R^2 - \bar{x}x_0| = \left| \frac{R^2}{x} \right| |x - x_0| = R|x - x_0|.$$

Daher hat die Function auf dem Kreise den Werth 0; innerhalb aber wird sie nur unendlich für $x = x_0$. — Demnach ist:

$$E = E(\xi_0, \eta_0; \xi_1, \eta_1) = \left| \frac{(x_0 - x_1)R}{R^2 - x_0\bar{x}_1} \right|.$$

Nehme ich speciell den Radius R gleich 1 an, so wird:

$$E = \left| \frac{x_0 - x_1}{1 - x_0 \bar{x}_1} \right|;$$

und lasse ich jetzt einen der beiden Punkte, etwa x_1, mit dem Nullpunkt zusammenfallen, so wird einfach

$$E = |x_0 - x_1|,$$

d. h. gleich der Entfernung der beiden Punkte.

Nun lässt sich aber jedes einfach zusammenhängende Gebiet, in dem zwei Punkte x_0, x_1 gegeben sind, conform auf den Einheitskreis abbilden, und zwar auch so, dass einer der beiden x_0 und x_1 entsprechenden Punkte in den Mittelpunkt fällt. Demnach können wir bei einem beliebigen einfach zusammenhängenden Gebiet G die Grösse E geometrisch so definiren:

E ist die Entfernung derjenigen beiden Punkte, in die x_0, x_1 übergehen, wenn man das Gebiet G so auf den Einheitskreis abbildet, dass einer der beiden Punkte mit dem Mittelpunkt zusammenfällt.

Lassen wir den Punkt ξ, η nach der Grenze rücken, so geht die Gleichung

$$\frac{|x - x_0|}{E(\xi, \eta;\ \xi_0, \eta_0)} = \bar{E}(\xi,\ \eta;\ \ \xi_0,\ \eta_0)$$

über in:

$$\bar{E}(\xi,\ \eta;\ \ \xi_0,\ \eta_0) = |x - x_0|.$$

Fassen wir hier (ξ, η) als einen festen Punkt der Grenze auf, und (ξ_0, η_0) als variabel. Die letzte Gleichung ist zwar aufgestellt unter der Voraussetzung, dass (ξ_0, η_0) im Innern liegt. Sie zeigt aber, dass sich die Function auf der linken Seite stetig endlichen Werthen nähert, wenn wir (ξ_0, η_0) nach dem Rande rücken lassen. Wir können deshalb sogar (ξ_0, η_0) mit (ξ, η) zusammenfallen lassen und erhalten so:

$$\bar{E}(\xi,\ \eta) = 0.$$

Hieraus geht hervor, dass die Function $\bar{E}(\xi, \eta)$, die in jedem inneren Punkte einen von 0 verschiedenen endlichen Werth besitzt, am Rande verschwindet.

Nehmen wir nun in der Function

$$E(\xi,\ \eta;\ \ \xi',\ \eta') = \frac{|x - x'|}{\bar{E}(\xi, \eta;\ \xi', \eta')}$$

die beiden Punkte (ξ, η) und (ξ', η') als unendlich nahe an:

$$\xi' = \xi + d\xi, \quad \eta' = \eta + d\eta,$$

so geht die Gleichung über in:

$$E(\xi,\ \eta;\ \ \xi+d\xi,\ \eta+d\eta) = \frac{|dx|}{E(\xi,\ \eta)}.$$

Das Differential

$$d\sigma = \frac{|dx|}{E(\xi,\ \eta)},$$

„das E zweier unendlich nahen Punkte des Gebietes", muss deshalb denselben invarianten Charakter haben wie $E(\xi, \eta;\ \xi', \eta')$ selbst.

Für den Fall des Kreises ist:

$$E(\xi,\ \eta;\ \ \xi',\ \eta') = \left|\frac{(x-x')R}{R^2-x\bar{x}'}\right|,$$

$$\bar{E}(\xi,\ \eta;\ \ \xi',\ \eta') = \left|\frac{R^2-x\bar{x}'}{R}\right|,$$

$$\bar{E}(\xi,\ \eta) = \frac{R^2-|x|^2}{R};$$

daher:

$$d\sigma = \frac{R|dx|}{R^2-|x|^2}.$$

§ 2.

Es werde jetzt irgend eine Function $\varphi(x)$ betrachtet, die in dem ganzen Gebiet, mit Einschluss der Grenze, eindeutig und regulär ist. Mit $D(\varphi)$ wollen wir dann den grössten Werth bezeichnen, den

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|$$

annehmen kann, wenn wir unter x und y zwei variable Punkte der Grenze verstehen.

Es könnte auch $D(\varphi)$ als die grösste Werthschwankung der Function im ganzen Gebiet erklärt werden. Denn ist a ein Punkt im Innern, so kann $|\varphi(a)-\varphi(b)|$ kein Maximum sein, gleichviel ob b im Innern oder auf der Grenze liegt; weil sich alsdann immer Werthe x beliebig nahe bei a angeben lassen, wo $|\varphi(x)-\varphi(b)| > |\varphi(a)-\varphi(b)|$ ist.

Sind dann x_0, x_1 zwei Punkte im Innern, so ist immer

$$|\varphi(x_0)-\varphi(x_1)| < D(\varphi).$$

Aber es ist auch:

$$|\varphi(x_0)-\varphi(x_1)| < E.D(\varphi),$$

wo E dieselbe Grösse bedeutet wie im vorigen Paragraphen.

Es sei (ξ_0, η_0) irgend ein innerer Punkt. Bilden wir dann den Quotienten

$$\frac{|\varphi(x)-\varphi(x_0)|}{E(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)} = Q(\xi, \eta),$$

so können wir diesen auch auf die Form bringen:

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}\right| \overline{E}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0),$$

und hiernach ist ersichtlich Q eine im ganzen Gebiet, mit Einschluss der Grenze, stetig veränderliche Grösse, die niemals unendlich wird. Sie muss also ein Maximum haben. Dieses Maximum aber kann Q, ebenso wie vorhin $E(\xi, \eta; \xi', \eta')$, an keiner Stelle im Innern des Gebiets annehmen, weil offenbar $\log(Q)$ eine harmonische Function ist. An der Grenze aber ist:

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)| < D(\varphi), \quad E(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = 1.$$

Folglich ist in jedem Punkte x innerhalb des Gebiets:

$$Q(\xi, \eta) < D(\varphi);$$

somit:

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)| < E(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) D(\varphi),$$

w. z. b. w.

Da die Formel gilt, wie nahe man auch x an x_0 wählen möge, so muss sie auch für die Differentialänderung bestehen; an Stelle von E tritt dann $d\sigma$:

$$|d\varphi| < d\sigma . D(\varphi).$$

Nimmt man speciell das Gebiet G als Kreis mit dem Radius R und dem Mittelpunkt x_0 an, so folgt:

$$|\varphi'(x)| < \frac{R . D(\varphi)}{R^2 - |x-x_0|^2},$$

und für den Mittelpunkt selbst:

$$R|\varphi'(x_0)| < D(\varphi).$$

Hierin liegt aber nichts wesentlich neues. Denn nach einem sehr bekannten Satze ist $R|\varphi'(x_0)|$ kleiner als der grösste Werth, den der absolute Betrag von $\varphi(x)$ auf der Peripherie des Kreises annimmt. Statt $\varphi(x)$ kann man aber auch $\varphi(x)-\varphi(c)$ nehmen, wo c einen Punkt der Peripherie bedeuten mag; und dann ist offenbar der grösste Werth von $|\varphi(x)-\varphi(c)|$ kleiner oder gleich $D(\varphi)$.

Anders verhält es sich mit der genaueren Formel

$$R|\varphi'(x_0)| \leqq \frac{2}{\pi} D(\varphi),$$

zu der wir am Schlusse dieser Untersuchung gelangen werden.

§ 3.

Nach dieser vorläufigen Betrachtung gehe ich zu dem eigentlichen Problem über. Ich nehme an, dass das Gebiet G von $\varrho+1$ regulären Curven $L_0, L_1, \ldots, L_\varrho$ begrenzt ist, von denen eine den Bereich umschliesst, während die anderen von ihm umgeben werden. Ich denke mir dann zwei Functionen, die eine von $\xi+\eta i$, die andere von $\xi-\eta i$, beide eindeutig und regulär im ganzen Gebiet mit Einschluss der Grenze. Aus beiden möge der zusammengesetzte Ausdruck

$$U(\xi, \eta) = \varphi(\xi+\eta i)+\psi(\xi-\eta i)^*)$$

gebildet werden; es soll hierbei nicht ausgeschlossen sein, dass einer der beiden Theile identisch 0 ist.

Hierdurch werden alle harmonischen Functionen umfasst, die im ganzen Gebiet regulär und *mit ihren zugeordneten Functionen* eindeutig sind. Denn die zu $U=\varphi+\psi$ zugeordnete Function V ist durch die Gleichung

$$dV = \frac{\partial U}{\partial \xi}\, d\eta - \frac{\partial U}{\partial \eta}\, d\xi$$

bestimmt. Dies giebt:

$$dV = -i d\varphi + i d\psi,$$

also:

$$iV = \varphi - \psi + \text{Const.}$$

Wenn demnach U, V eindeutig sind, so gilt von φ, ψ dasselbe, und umgekehrt.

Die grössten Werthschwankungen, absolut genommen, die eine solche Function U auf den einzelnen Randlinien $L_0, L_1, \ldots, L_\varrho$ erfährt, mögen durch

$$D_0(U), \quad D_1(U), \quad \ldots, \quad D_\varrho(U)$$

bezeichnet werden. Die Frage ist dann: Wenn man diese Werthschwankungen kennt, oder wenigstens Grössen, die sie nicht überschreiten, unter welcher Grenze muss alsdann der Werthunterschied der Function in zwei Punkten (ξ_0, η_0), (ξ_1, η_1) innerhalb des Gebiets:

$$|U(\xi_0, \eta_0) - U(\xi_1, \eta_1)|$$

liegen?

Auf dem *Dirichlet*schen Princip beruht die Existenz von Functionen $K(x)$, die im Gebiet G eindeutig sind, die ferner im Innern und auf der

*) Unter $U(\xi, \eta)$ soll im Folgenden immer eine Function von dieser Beschaffenheit verstanden werden.

Grenze sich überall wie rationale verhalten und auf der Grenze reell sind. Diese bilden eine Klasse; man kann durch zwei unter ihnen, $p(x)$ und $q(x)$, alle übrigen rational und reell ausdrücken, während p und q selbst durch eine reelle algebraische Gleichung vom Range ϱ verbunden sind. Dem Rande von G entspricht die reelle Curve des Gebildes, die demnach aus $\varrho+1$ getrennten Zügen besteht. Durch diese reelle Curve zerfällt das algebraische Gebilde in zwei conjugirte Hälften B und $\bar{B}$, und es nehmen $p(x)$, $q(x)$ im Innern von G alle die und nur diejenigen Werthepaare an, jedes in einem bestimmten Punkte, die der einen Hälfte B des Gebildes angehören*).

Es seien (p_0, q_0), (p_1, q_1) die beiden Stellen von B, die den beiden festen Punkten x_0, x_1 im Innern von G entsprechen, und $(\bar{p}_0, \bar{q}_0)$, $(\bar{p}_1, \bar{q}_1)$ die conjugirten Werthepaare. Ich denke mir dann zunächst eine rationale Function $f(p, q)$ gebildet, die in (p_0, q_0) und $(\bar{p}_1, \bar{q}_1)$ von der ersten Ordnung verschwindet, und in $(\bar{p}_0, \bar{q}_0)$, (p_1, q_1) ebenso unendlich wird. Dann soll ein Integral dritter Gattung

$$J(p, q) = \int R(p, q)dp$$

gebildet werden, das nur in diesen vier Punkten singulär wird, und zwar wie

$$\frac{1}{2\pi i}\log f(p, q).$$

$J(p, q)$ ist hierdurch bestimmt bis auf ein Integral erster Gattung, das noch hinzutreten kann. Ich normire nun $J(p, q)$ vollständig — wenigstens bis auf eine additive Constante, die willkürlich gewählt werden kann — durch die Bedingung, dass die auf den $\varrho+1$ reellen Linien des Gebildes erhaltenen Perioden von $J(p, q)$ gleich 0 sein sollen.

Eigentlich kann man zwar nur für ϱ der Linien diese Bedingung vorschreiben. Aber man sieht leicht, dass sie dann für die letzte Linie von selbst erfüllt wird. Denn betrachte ich $J(p, q)$ als abhängig von x:

$$J(p, q) = J(x),$$

so wird $J(x)$ singulär an den Stellen x_0, x_1; die Differenz

$$\frac{1}{2\pi i}\log\left(\frac{x-x_0}{x-x_1}\right) - J(x) = \bar{J}(x)$$

hat aber regulären Charakter im ganzen Gebiete G. Dennoch könnte sie

*) Vgl. die Arbeit: Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen. Dieses Journal Bd. 83, S. 312—314.

mehrdeutig sein; aber ihre Ableitung ist eindeutig und demnach $\bar{J}(x)$ selbst höchstens periodisch vielwerthig. Nun kehrt $\log\left(\frac{x-x_0}{x-x_1}\right)$ in sich selbst zurück, wenn x irgend eine von den $\varrho+1$ Randlinien durchläuft; gilt von $J(x)$ dasselbe in Bezug auf ϱ der Linien, so gilt es daher auch von $\bar{J}(x)$. Dann kehrt aber $\bar{J}(x)$, und ebenso $J(x)$, auch in sich selbst zurück, wenn x die letzte Randlinie durchläuft.

Durch die gestellten Bedingungen ist

$$J(p, q) = \int R(p, q)dp$$

bestimmt bis auf eine additive Constante, $R(p, q)$ also vollständig. Wären die Coefficienten von $R(p, q)$ imaginär, so würde man durch Vertauschung von i mit $-i$ eine zweite Function $\bar{J}(p, q)$ von genau denselben Eigenschaften erhalten. Da dies unmöglich ist, muss $R(p, q)$ eine rationale Function mit reellen Coefficienten sein.

§ 4.

Während $\bar{J}(x)$ eine im Gebiet G eindeutige und beständig reguläre Function ist, hat

$$J(x) = \frac{1}{2\pi i}\log\left(\frac{x-x_0}{x-x_1}\right) - \bar{J}(x)$$

die Periode 1. Wir sondern aber jetzt durch eine geschlossene Linie von dem Bereiche G einen einfach zusammenhängenden Theil ab, der die beiden Punkte x_0, x_1 enthält. In dem übrig bleibenden $(\varrho+2)$-fach zusammenhängenden Gebiete, das G' genannt werden möge, ist $J(x)$ als eindeutige Function aufzufassen.

An jeder von den Linien L_a hat der imaginäre Theil dieser nun eindeutigen Function $J(x)$ einen constanten Werth. Der reelle Theil aber kehrt in sich zurück, wenn x eine der Linien durchläuft. Folglich muss er auf jeder Linie mindestens ein Minimum und ein Maximum haben, und an den Stellen, wo diese eintreten, muss $J'(x)$ verschwinden. Nun giebt es aber noch einen bekannten Satz in der Theorie der *Abel*schen Integrale bei einem Differential $R(p, q)dp$, das m Unendlichkeitsstellen hat, nur $2\varrho-2+m$ Nullpunkte. In unserem Falle ist $m=4$; folglich können nicht mehr als $2\varrho+2$ Stellen im Gebiete G existiren, wo $J'(x)$ verschwindet. Hieraus geht hervor, dass auf jeder Linie L_a ein bestimmter Punkt A_a existirt, wo der reelle Theil von $J(x)$ seinen kleinsten, und ein anderer B_a, wo er

seinen grössten Werth annimmt, und dass dieser reelle Theil beständig zunimmt, wenn sich x auf der Linie L_α nach der einen oder der anderen Richtung von A_α nach B_α bewegt.

Durch die Punkte A_α, B_α wird die Linie L_α in zwei Strecken zerlegt; diejenige, bei der das Gebiet G zur Linken bleibt, wenn x von A_α nach B_α geht, wollen wir die positive, die andere die negative Seite von L_α nennen.

Der Werth von $J(x)$ im Punkte A_α sei c_α, die Zunahme, die der reelle Theil von $J(x)$ erfährt beim Uebergange von A_α zu B_α, möge mit ω_α bezeichnet werden, sodass ω_α zugleich die grösste Werthschwankung von $J(x)$ auf L_α darstellt. Ich kann alsdann für die Punkte der Linie L_α setzen:

$$J(x) = c_\alpha + \omega_\alpha t,$$

wo t eine reelle Veränderliche bedeutet, die beständig zunimmt von 0 bis 1, wenn x sich auf der positiven oder negativen Seite von A_α nach B_α bewegt.

Zwei Punkte von L_α, in denen t, also auch $J(x)$, denselben Werth hat, sollen conjugirte Punkte heissen. Jedem Punkte x der positiven Seite entspricht hiernach ein ganz bestimmter Punkt der negativen; die Grenzpunkte A_α, B_α sind sich selbst conjugirt; und wenn x in einer Richtung die ganze Linie L_α durchläuft, so beschreibt der conjugirte Punkt x' dieselbe Linie in entgegengesetzter Richtung.

Da alles dies gleichmässig für alle $\varrho+1$ Randlinien gilt, so gehören zu einem Werthe von t in dem reellen Intervalle von 0 bis 1 im ganzen $2\varrho+2$ Punkte der Grenze, nämlich $\varrho+1$ Punkte

$$x_t^{(\alpha)} = \xi_t^{(\alpha)} + \eta_t^{(\alpha)} i, \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, \varrho)$$

auf den positiven Seiten dieser Linien, und ebenso viele

$$x_t'^{(\alpha)} = \xi_t'^{(\alpha)} + \eta_t'^{(\alpha)} i,$$

auf den negativen Seiten. Für $t=0$ und $t=1$ fallen die x und x' zusammen; zu $t=0$ gehören die Punkte A_α, zu $t=1$ die B_α.

Alle diese x_t und x_t' sind innerhalb des Intervalls von 0 bis 1 reguläre Functionen von t, weil $J'(x)$ innerhalb der einzelnen Strecken nicht verschwindet. Aber in der Nähe von $t=0$ ist x_t darstellbar als Potenzreihe von $\sqrt{t}$, weil im Punkte A_α t von der zweiten Ordnung verschwindet; und ebenso sind die x_t und x_t' in der Nähe des Endpunktes $t=1$ als reguläre Potenzreihen von $\sqrt{1-t}$ darstellbar.

Wir nehmen jetzt eine beliebige Function $\varphi(x)$, die im ganzen Gebiete G regulär und eindeutig ist. Dann ist auch

$$\varphi(x)\frac{dJ(x)}{dx}$$

eine eindeutige Function. Sie ist regulär im Gebiete G mit Ausnahme der Punkte x_0 und x_1; dort wird sie unendlich wie

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{\varphi(x_0)}{x-x_0} - \frac{1}{2\pi i}\frac{\varphi(x_1)}{x-x_1}.$$

Wenn wir setzen:

$$\varphi(x)\frac{dJ(x)}{dx} = \frac{1}{2\pi i}\frac{\varphi(x_0)}{x-x_0} - \frac{1}{2\pi i}\frac{\varphi(x_1)}{x-x_1} + \psi(x),$$

so ist demnach $\psi(x)$ nicht nur eindeutig, sondern auch beständig regulär im Innern und auf der Grenze von G. Folglich muss die Summe der Integrale $\int \psi(x)dx$, jedes erstreckt im positiven Sinne über eine der Grenzlinien des Gebietes G, den Werth 0 haben.

Nun haben aber die beiden Integrale

$$\int \frac{dx}{x-x_0} \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{x-x_1},$$

wenn wir sie über irgend eine von den ϱ inneren Grenzlinien erstrecken, den Werth 0, dagegen für die äussere, das Gebiet G umschliessende Randlinie den Werth $2\pi i$. Folglich ist:

$$\sum_{a=0}^{\varrho} \int \varphi(x)dJ(x) = \varphi(x_0) - \varphi(x_1).$$

Betrachten wir hier auf der linken Seite dieser Gleichung das auf die Linie L_a bezügliche Integral. Die Integration ist auszuführen von A_a bis B_a über die positive Seite der Linie, dann von B_a bis A_a zurück über die negative. Wir hatten gesetzt:

$$J(x) = c_a + \omega_a t.$$

Es ist nun zu integriren von $t=0$ bis 1; dabei ist $x = \overset{(a)}{x_t}$ zu setzen; dann von $t=1$ bis $t=0$ zurück, und hier ist $x = \overset{(a)}{x'_t}$. Demnach ist das ganze über L_a erstreckte Integral:

$$\int \varphi(x)dJ(x) = \omega_a \left\{ \int_0^1 \varphi(\overset{(a)}{x_t})dt + \int_1^0 \varphi(\overset{(a)}{x'_t})dt \right\}$$

oder

$$= \omega_a \int_0^1 (\varphi(\overset{(a)}{x_t}) - \varphi(\overset{(a)}{x'_t}))dt.$$

Daher ist

$$(A.) \qquad \varphi(x_0)-\varphi(x_1) = \sum_{\alpha=0}^{\varrho} \omega_\alpha \int_0^1 (\varphi(\overset{(\alpha)}{x_t})-\varphi(\overset{(\alpha)}{x'_t}))dt.$$

Hier ist die Differenz $\varphi(x_0)-\varphi(x_1)$ ausgedrückt durch die Werthdifferenzen, die in je zwei conjugirten Punkten der Grenze stattfinden.

Es ist klar, dass man in dieser Gleichung (A.) das Reelle vom Imaginären sondern kann. Ebenso wie für jedes $\varphi(\xi+\eta i)$, muss sie demnach bestehen für jede Function $\psi(\xi-\eta i)$, die in dem gegebenen Gebiete regulär und eindeutig ist. Daher auch für jedes Aggregat $\varphi(\xi+\eta i)+\psi(\xi-\eta i)$; d. h. für jede Function $U(\xi, \eta)$. Wir können deshalb die allgemeinere Formel aufstellen:

$$(B.) \qquad U(\xi_0, \eta_0)-U(\xi_1, \eta_1) = \sum_{\alpha=0}^{\varrho} \omega_\alpha \int_0^1 f_\alpha(t)\,dt,$$

in der $f_\alpha(t)$ die Differenz der Werthe von U in den beiden zu t gehörigen Punkten der Linie L_α bedeutet:

$$f_\alpha(t) = U(\overset{(\alpha)}{\xi_t}, \overset{(\alpha)}{\eta_t})-U(\overset{(\alpha)}{\xi'_t}, \overset{(\alpha)}{\eta'_t}).$$

Den Betrag der grössten Werthdifferenz von U auf der Linie L_α haben wir mit $D_\alpha(U)$ bezeichnet. Daher ist:

$$|f_\alpha(t)| \leqq D_\alpha(U).$$

Mithin auch:

$$\left|\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt\right| \leqq D_\alpha(U).$$

Somit ergiebt sich, als Folge der Gleichung (B.), die Ungleichung:

$$(C.) \qquad |U(\xi_0, \eta_0)-U(\xi_1, \eta_1)| \leqq \sum_{\alpha=0}^{\varrho} (\omega_\alpha D_\alpha(U)).$$

Die Coefficienten ω_α sind hierbei zunächst als Integrale

$$\int R(p, q)\,dp$$

definirt, erstreckt von einem Nullpunkte des Differentials $R(p, q)dp$ bis zu dem anderen, der auf demselben reellen Linienzug liegt.

§ 4.

Die Ungleichung (C.) bringt den bekannten Satz zur Evidenz, dass keine Function U existirt, die auf jeder Grenzlinie constant ist, ausser $U = \text{Const.}$ Denn für ein solches U wäre jedes $D_\alpha(U)$ gleich 0, somit:

$$U(\xi_0, \eta_0) = U(\xi_1, \eta_1) = \text{Const.}$$

Wohl aber giebt es Functionen U, die an den Linien $L_1, L_2, \ldots, L_\varrho$ constant, und nur längs L_0 variabel sind. Ich will eine solche Function, die den Bedingungen

$$D_1(U) = D_2(U) = \cdots = D_\varrho(U) = 0$$

genügt, allgemein mit $U_0(\xi, \eta)$ bezeichnen. Für eine solche vereinfachen sich die Gleichung (B.) und die Ungleichung (C.); es wird:

$$(B'.) \qquad U_0(\xi_0, \eta_0) - U_0(\xi_1, \eta_1) = \omega_0 \int_0^1 f(t)\,dt,$$

wo

$$f(t) = U_0(\xi_t, \eta_t) - U_0(\xi'_t, \eta'_t)$$

ist, und ξ_t, η_t den Punkt auf der positiven Seite der Linie L_0 bedeutet, der zu einem gegebenen t gehört, (ξ'_t, η'_t) den conjugirten Punkt auf der negativen Seite. — Ferner wird:

$$(C'.) \qquad |U_0(\xi_0, \eta_0) - U_0(\xi_1, \eta_1)| \leqq \omega_0 D_0(U_0).$$

Dass es solche Functionen U_0 giebt, und dass man ihre Werthe auf L_0 willkürlich vorschreiben kann, geht aus dem *Dirichlet*schen Princip hervor.

Es sei nämlich $f(\xi, \eta)$ irgend eine reelle Function von (ξ, η), die längs L_0 und in einer, wenn auch noch so engen, Umgebung von L_0 stetig, eindeutig und regulär ist; ferner seien $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_\varrho$ $\varrho+1$ willkürliche reelle Constanten. Nach dem *Dirichlet*schen Princip existirt dann eine bestimmte reelle, in dem Gebiete G eindeutige und im Innern wie auf der Grenze reguläre harmonische Function $\bar{U}(\xi, \eta)$, die auf L_0 den Werth $c_0 f(\xi, \eta)$, auf den übrigen Randlinien dagegen die constanten Werthe $c_1, c_2, \ldots, c_\varrho$ annimmt. In Bezug auf die $\varrho+1$ willkürliche Constanten c ist dieses $\bar{U}$ natürlich eine homogene lineare Function.

Damit nun auch die zu $\bar{U}$ zugeordnete Function $\bar{V}$ eindeutig ist, sind ϱ Bedingungen erforderlich, es müssen die Integrale

$$\int \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi}\, d\eta - \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta}\, d\xi \right)$$

erstreckt über die Linien $L_1, L_2, \ldots, L_\varrho$, den Werth 0 haben. Dies sind aber ϱ homogene Gleichungen zwischen $c_0, c_1, \ldots, c_\varrho$, denen jedenfalls genügt werden kann durch reelle c, die nicht sämmtlich 0 sind. Dabei muss c_0 von 0 verschieden sein. Denn sonst wäre $\bar{U}$ eine Function $U(\xi, \eta)$, die auf allen Randlinien constant, und zwar $= 0$ auf L_0 wäre. Diese müsste demnach identisch 0, und somit auch $c_1, c_2, \ldots, c_\varrho$ gleich 0 sein, was der Voraussetzung widerspricht.

Demnach können wir $c_0 = 1$ setzen. Wir erkennen so: Es giebt eine ganz bestimmte reelle Function $U_0(\xi, \eta)$, die auf L_0 der gegebenen Function $f(\xi, \eta)$ gleich wird, auf allen anderen Randlinien aber constante Werthe erhält.

Ich will jetzt $f(\xi, \eta)$ der Beschränkung unterwerfen, dass die Werthänderungen von f längs L_0 kleiner oder gleich 1 sein sollen. Dann ist:

$$D_0(U_0) \leqq 1,$$

somit zufolge (C'.):

$$|U_0(\xi_0,\ U_0) - U_0(\xi_1,\ \eta_1)| \leqq \omega_0.$$

Ich behaupte aber: Wenn $\bar{\omega}_0$ irgend eine positive Grösse bedeutet, die kleiner ist als ω_0, dann kann man die Function $f(\xi, \eta)$ so wählen, dass

$$|U_0(\xi_0,\ \eta_0) - U_0(\xi_1,\ \eta_1)| > \bar{\omega}_0$$

wird. — Wenn dies richtig ist, so stellt ω_0 die Grenze dar, bis zu der die Differenz

$$|U_0(\xi_0,\ \eta_0) - U_0(\xi_1,\ \eta_1)|$$

ansteigen, die sie aber nicht überschreiten kann, wenn U_0 die Nebenbedingungen

$$D_0(U_0) \leqq 1, \quad D_1(U_0) = 0, \quad \ldots, \quad D_\varrho(U_0) = 0$$

erfüllen soll.

Wenn wir setzen dürften: $f(\xi, \eta) = \frac{1}{2}$ auf der positiven, $= -\frac{1}{2}$ auf der negativen Seite von L_0, dann würde, wie die Gleichung (B'.) ohne weiteres zeigt,

$$U_0(\xi_0,\ \eta_0) - U_0(\xi_1,\ \eta_1) = \omega_0$$

sein, der Werth ω_0 würde also wirklich erreicht werden. Da wir uns durchweg auf Functionen U beschränken, die auch am Rande des Gebiets regulär und a fortiori stetig sind, so dürfen wir diese Annahme über $f(\xi, \eta)$ nicht machen. Wir ersetzen sie durch eine andere, ihr nahe kommende, bei der $f(\xi, \eta)$ durchweg regulär bleibt.

Es war $\bar{\omega}_0 < \omega_0$ angenommen worden. Ich kann demnach setzen:

$$\bar{\omega}_0 = \tau . \omega_0,$$

wo τ ein positiver echter Bruch ist. Ich bestimme nun zwei Zahlen t_0, t_1 so, dass

$$\tau < t_1 < 1,$$
$$0 < t_0 < t_1 - \tau,$$

dass also t_0, t_1 dem Intervalle von 0 bis 1 angehören, aber $t_1 - t_0 > \tau$ ist.

Ich setze dann:

$$\tau = (t_1 - t_0)(1-\delta)$$

wo δ ebenfalls einen positiven echten Bruch bedeutet. Nun bilden wir, was keinerlei Schwierigkeit hat, eine reelle, längs L_0 und in der Umgebung von L_0 eindeutige reguläre Function u von ξ, η, die auf L_0 nur in den Punkten A_0, B_0 verschwindet, und auf der positiven Seite positive, auf der negativen negative Werthe hat. (Es kann z. B. $u = 0$ die Gleichung der geraden Linie sein, die durch A_0, B_0 hindurchgeht; allerdings ist diese specielle Bestimmung nur in dem Falle erlaubt, wo die Gerade keinen anderen Punkt von L_0 trifft).

Wenn wir uns dann auf diejenigen Punkte der positiven und der negativen Seite von L_0 beschränken, für die

$$t_0 \leqq t \leqq t_1$$

ist, so kann u nicht 0 werden, und der absolute Werth von u wird eine von 0 verschiedene untere Grenze haben. Wir denken uns nun u mit einem so grossen positiven constanten Factor behaftet, dass auch diese untere Grenze

$$> \frac{2}{\pi . \delta}$$

wird. Alsdann ist:

$$|u| > \frac{2}{\pi . \delta} \quad \text{für} \quad t_0 \leqq t \leqq t_1.$$

Setze ich nun:

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arctg}(u),$$

wo der Arcus Tangens zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ angenommen werden soll, so ist, da u nicht unendlich wird auf L_0, dieses $f(\xi, \eta)$ jedenfalls eine längs L_0 eindeutige und reguläre Function. Die dieser Annahme entsprechende Function $U_0(\xi, \eta)$ erfüllt die Bedingungen

$$D_0(U_0) < 1; \quad D_1(U_0) = \cdots = D_\varrho(U_0) = 0.$$

Es ist aber jetzt leicht zu sehen, dass

$$U_0(\xi_0, \eta_0) - U_0(\xi_1, \eta_1) > \bar{\omega}_0$$

ist. Denn da $f(\xi, \eta)$, ebenso wie u selbst, positiv auf der positiven, negativ auf der negativen Seite von L_0 ist, so ist innerhalb des Intervalls von 0 bis 1

$$f(t) = U_0(\xi_t, \eta_t) - U_0(\xi_t', \eta_t') > 0,$$

und daher:

$$\int_0^1 f(t)\,dt > \int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt.$$

In dem Theil-Intervalle von t_0 bis t_1 ist aber:

$$\left|\frac{1}{u}\right| < \frac{\pi}{2}\cdot\delta.$$

Ferner ist

$$|\mathrm{Arctg}(u)| = \mathrm{Arctg}|u| = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctg}\left|\frac{1}{u}\right|,$$

und da

$$\mathrm{Arctg}\left|\frac{1}{u}\right| < \left|\frac{1}{u}\right|$$

ist, so ist in dem betrachteten Intervalle:

$$|\mathrm{Arctg}(u)| > \frac{\pi}{2}(1-\delta).$$

Daher ist

$$U_0(\xi_t,\ \eta_t) > \frac{1-\delta}{2},$$

$$U_0(\xi'_t,\ \eta'_t) < -\left(\frac{1-\delta}{2}\right),$$

somit

$$f(t) > 1-\delta,$$

und

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt > (t_1-t_0)(1-\delta).$$

Nun ist aber nach der Definition von δ:

$$(t_1-t_0)(1-\delta) = \tau = \frac{\bar{\omega}_0}{\omega_0}.$$

Folglich

$$\omega_0 \int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt > \bar{\omega}_0,$$

und um so mehr:

$$\omega_0 \int_0^1 f(t)\,dt > \bar{\omega}_0.$$

Es ist daher, der Gleichung (B'.) zufolge

$$U_0(\xi_0,\ \eta_0) - U_0(\xi_1,\ \eta_1) > \bar{\omega}_0.$$

Damit ist bewiesen: Für jede Function $U_0(\xi, \eta)$, die ausser den allgemein für jedes $U(\xi, \eta)$ aufgestellten Voraussetzungen, noch die speciellen Bedin-

gungen erfüllt:

$$D_0(U_0) \leqq 1, \quad D_1(U_0) = D_2(U_0) = \cdots = D_\varrho(U_0) = 0,$$

ist zwar immer

$$|U_0(\xi_0, \eta_0) - U_0(\xi_1, \eta_1)| \leqq \omega_0.$$

Wenn aber eine Zahl $\bar{\omega}_0$ angenommen wird, die kleiner ist als ω_0, so ist es möglich, unter diesen Functionen $U_0(\xi, \eta)$ besondere und zwar reelle anzugeben, für welche:

$$U_0(\xi_0, \eta_0) - U_0(\xi_1, \eta_1) > \bar{\omega}_0$$

ist.

Es seien jetzt

$$\Delta_0, \quad \Delta_1, \quad \ldots, \quad \Delta_\varrho$$

$\varrho+1$ beliebige positive Grössen. Ich nehme an, man wisse von einer Function $U(\xi, \eta)$, dass ihre Werthschwankungen auf den einzelnen Randlinien L_α dem absoluten Betrage nach diese Grössen Δ nicht überschreiten, dass also

$$D_\alpha(U) \leqq \Delta_\alpha \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, \varrho)$$

ist. Bilden wir dann

$$\sum_{\alpha=0}^{\varrho} \omega_\alpha \Delta_\alpha = \Delta,$$

so ist der Formel (C.) im vorigen Paragraphen zufolge:

$$|U(\xi_0, \eta_0) - U(\xi_1, \eta_1)| \leqq \Delta,$$

also Δ jedenfalls ein Werth, den die aufgestellte Differenz nicht überschreiten kann, wenn wir U den $\varrho+1$ Bedingungen

$$D_\alpha(U) \leqq \Delta_\alpha \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, \varrho)$$

unterwerfen. Aber die Differenz kann diesem Werthe Δ beliebig nahe kommen:

Ist Δ' irgend eine Grösse, die kleiner ist als Δ, so ist es möglich, ein den Bedingungen

$$D_\alpha(U) < \Delta_\alpha \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, \varrho)$$

genügendes und ausserdem reelles U anzugeben, wofür

$$U(\xi_0, \eta_0) - U(\xi_1, \eta_1) > \Delta'$$

ist. — Dies lässt sich folgendermassen beweisen.

Ist

$$\Delta' < \sum_{\alpha=0}^{\varrho} (\omega_\alpha \Delta_\alpha),$$

so kann man Δ' auf die Form bringen:

$$\Delta' = \sum_{\alpha=0}^{\varrho} (\bar{\omega}_\alpha \Delta_\alpha),$$

wo jedes $\bar{\omega}_\alpha$ kleiner ist als das entsprechende ω_α.

Wir haben vorhin eine reelle Function $U_0(\xi, \eta)$ gebildet, die den Bedingungen:

$$D_0(U_0) < 1, \quad D_\alpha(U_0) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

genügt, und für die

$$U_0(\xi_0, \eta_0) - U_0(\xi_1, \eta_1) > \bar{\omega}_0$$

war. Dabei konnte $\bar{\omega}_0$ irgend eine Grösse sein, die kleiner ist als ω_0.

Entsprechend denken wir uns jetzt ein ganzes System reeller Functionen

$$U_0(\xi, \eta), \quad U_1(\xi, \eta), \quad \ldots, \quad U_\varrho(\xi, \eta)$$

aufgestellt, in der Weise, dass jedesmal

$$D_\alpha(U_\alpha) < 1; \quad D_\beta(U_\alpha) = 0 \quad \text{für} \quad \beta \leqq \alpha,$$

und

$$U_\alpha(\xi_0, \eta_0) - U_\alpha(\xi_1, \eta_1) > \bar{\omega}_\alpha$$

ist. Hieraus bilden wir

$$U(\xi, \eta) = \sum_{\alpha=0}^{\varrho} (\Delta_\alpha . U_\alpha(\xi, \eta)).$$

Da von den Functionen auf der rechten Seite nur $U_\alpha(\xi, \eta)$ auf der Linie L_α veränderlich, die übrigen constant sind, so ist

$$D_\alpha(U) = \Delta_\alpha . D_\alpha(U_\alpha);$$

also, da $D_\alpha(U_\alpha) < 1$ ist,

$$D_\alpha(U) < \Delta_\alpha \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, \varrho).$$

Ferner ist

$$U(\xi_0, \eta_0) - U(\xi_1, \eta_1) > \sum_{\alpha=0}^{\varrho} (\bar{\omega}_\alpha . \Delta_\alpha);$$

daher

$$U(\xi_0, \eta_0) - U(\xi_1, \eta_1) > \Delta'.$$

Hiermit ist der Satz bewiesen:

Es sei G ein $\varrho+1$-fach zusammenhängendes Gebiet. Innerhalb desselben fassen wir zwei Punkte (ξ_0, η_0) und (ξ_1, η_1) in's Auge. Ausserdem seien $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_\varrho$ irgend welche positive oder wenigstens nicht negative Grössen. Wenn wir dann diejenigen Functionen $U(\xi, \eta)$ betrachten, deren Werthschwankungen auf den einzelnen Randlinien $L_0, L_1, \ldots, L_\varrho$ die Werthe $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_\varrho$ nicht überschreiten, so existirt für den Werthunter-

schied einer solchen Function in den beiden inneren Punkten (ξ_0, η_0), (ξ_1, η_1) eine bestimmte obere Grenze Δ, die natürlich abhängt einerseits von den gegebenen Grössen $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_\varrho$, andererseits von der Lage der beiden Punkte im Gebiete. Dieses Δ ist eine lineare homogene Function der einzelnen Grössen Δ_α:

$$\Delta = \sum_{\alpha=0}^{\varrho} (\omega_\alpha \Delta_\alpha);$$

Die Coefficienten ω_α sind positive, von der Lage der beiden Punkte im Gebiete abhängige Grössen, die bereits in bestimmter Weise definirt sind. Da die ω Integrale sind, die mit Hülfe der charakteristischen Gleichung des Gebietes gebildet werden können, so bleiben sie ungeändert bei conformer Abbildung der Figur.

Wir haben den Satz noch dadurch zu ergänzen, dass wir die geometrische Bedeutung der ω_α feststellen.

Wie verhält es sich mit den Functionen einer complexen Grösse $x = \xi + \eta i$? Die Ungleichung (C.) bleibt bestehen. Wenn man also von einer im Gebiete G regulären und eindeutigen Function $\varphi(x)$ weiss, dass ihre Werthschwankungen auf den einzelnen Linien L_α die Werthe Δ_α nicht übersteigen, so ist jedenfalls:

$$|\varphi(x_0) - \varphi(x_1)| \leqq \sum_{\alpha=0}^{\varrho} (\omega_\alpha . \Delta_\alpha).$$

Aber es ist nicht gesagt, dass dies hier die obere Grenze des Werthunterschiedes ist. Die Annäherung an den Werth Δ haben wir ja vorhin dadurch erreicht, dass wir reelle Functionen von ξ und η betrachteten. Die wahre obere Grenze für $|\varphi(x_0) - \varphi(x_1)|$ muss eine andere, wahrscheinlich transcendente, Function der Δ_α sein, die verschwindet, wenn auch nur ein Δ_α gleich 0 gesetzt wird. Denn $\varphi(x)$ ist schon nothwendig eine Constante, wenn auch nur eine der Grössen $D_\alpha(\varphi)$ gleich 0 ist.

§ 6.

Da $J(x)$ im Gebiete G nur die Periode 1 hat, so ist

$$z = e^{2\pi i J(x)}$$

eine eindeutige Function. $J(x)$ wird im Gebiet nur singulär an den Stellen x_0, x_1, und zwar wie

$$\frac{1}{2\pi i} \log \frac{x - x_0}{x - x_1}.$$

z hat daher im ganzen Gebiete, mit Einschluss der Grenze, den Charakter einer eindeutigen rationalen Function, und wird nur 0 in x_0, nur unendlich in x_1, beides von der ersten Ordnung.

An jeder Linie L_α ist der imaginäre Theil von $J(x)$ constant. Deshalb hat der absolute Betrag von z längs jeder Randlinie einen constanten Werth.

Ferner gilt folgender Satz:

z nimmt jeden Werth c entweder an einer Stelle im Innern, oder an zwei Stellen der Grenze an.

Letztere sind natürlich immer zwei conjugirte Stellen. Sie können auch zusammenfallen. Ist c ein Werth, den z an einer solchen Doppelstelle, einem der Punkte A_α, B_α, annimmt, so wird dort $z-c$ gleich 0 von der zweiten Ordnung.

Zunächst eine Vorbemerkung zum Beweise. Jedem Punkte a einer Linie L_α entspricht ein conjugirter Punkt a' derselben Linie: derjenige, in welchem $J(x)$ denselben Werth hat, wie in a. Wir können diese Definition: $J(x') = J(x)$, ausdehnen auf Punkte, die nicht auf L_α selbst, aber in der Nähe von L_α liegen. Jedem x in der Nähe von L_α wird ein bestimmtes x' entsprechen, das gleichfalls in der Nähe von L_α liegt. Da aber, wenn x die Linie L_α in einer Richtung durchläuft, der conjugirte Punkt x' den entgegengesetzten Weg macht, so muss einem Punkte x, der in der Nähe von L_α, und innerhalb des Gebietes G liegt, ein conjugirter x' entsprechen, der sich bereits jenseits dieser Grenzlinie befindet. Wenn wir demnach L_α eng umschliessen durch eine ganz im Innern von G verlaufende Linie L'_α, so wird durch die Gleichung $J(x') = J(x)$ das zwischen L'_α und L_α liegende Gebiet G'_α conform abgebildet in ein anderes G''_α, das in der Linie L_α an G'_α grenzt, aber ganz jenseits L_α liegt.

Es sei c ein beliebiger Werth. Ich bezeichne dann mit n die Anzahl der im Innern von G liegenden Wurzeln der Gleichung $z-c=0$, und mit n_α $(\alpha = 0, 1, \ldots, \varrho)$ die Anzahl derjenigen, die auf L_α liegen, jede mit der zugehörigen Ordnungszahl genommen. Dann denke ich mir $\varrho+1$ Linien

$$L'_0, \quad L'_1, \quad \ldots, \quad L'_\varrho$$

ganz im Innern von G gezogen, welche die Randlinien $L_0, L_1, \ldots, L_\varrho$ eng umschliessen. Jedenfalls soll keine Wurzel der Gleichung $z-c=0$ auf einer von den Linien L'_α oder zwischen einem L'_α und dem zugehörigen L_α liegen, und ebenso wenig der Punkt x_1, wo $z=\infty$ wird.

Zu dem Gebiete G'_α, das von L'_α und L_α begrenzt wird, denke ich mir

nun das conjugirte G_α'' auf der andern Seite von L_α hinzugefügt. Das durch Vereinigung beider entstehende nenne ich G_α. Es enthält die Linie L_α in seinem Innern und wird begrenzt nach der einen Seite durch die Linie L_α, nach der anderen durch die zu L_α' conjugirte Linie L_α'', welche ganz ausserhalb des Gebiets G verläuft.

Es sei $2\pi i m_\alpha$ — wo m_α eine ganze Zahl ist — die Aenderung, welche $\log(z-c)$ erfährt, wenn x die Linie L_α' in dem Sinne durchläuft, dass das Innere von G_α zur Linken bleibt.

Es wird dann der zu x conjugirte Punkt x' die andere Grenzlinie von G_α durchlaufen, ebenfalls in der Richtung, dass das Innere zur Linken bleibt. Da nun zu conjugirten Punkten x, x' derselbe Werth von $J(x)$, also auch von z gehört, so muss $\log(z-c)$ auf L_α'' genau dieselbe Aenderung $2\pi i m_\alpha$ erfahren, wie vorhin auf L_α', vorausgesetzt, dass auch hier x die Linie so durchläuft, dass das Innere zur Linken liegt.

Die Summe beider Aenderungen, also $4\pi i m_\alpha$, ist aber nach einem bekannten Satz gleich $2\pi i\,(p-q)$, wo p die Anzahl der Stellen im Innern von G_α bedeutet, in denen $z-c=0$ wird, und q die Anzahl derer, wo $z=\infty$ wird. Es ist aber offenbar $q=0$ und $p=n_\alpha$, da den Voraussetzungen nach zwischen L_α' und L_α, und ebenso natürlich zwischen L_α und L_α'', keine Wurzeln der Gleichung $z-c=0$ liegen. Daher ist:

$$4\pi i m_\alpha = 2\pi i n_\alpha,$$

oder:

$$n_\alpha = 2m_\alpha.$$

Die Zahl n_α ist demnach eine gerade, und m_α ist positiv oder 0.

Nun betrachte ich den $(\varrho+1)$-fach zusammenhängenden Bereich G', der von den Linien L_α' begrenzt wird. Auf der Grenze von G' liegt keine, und im Innern liegen n Wurzeln der Gleichung $z-c=0$; ferner liegt im Innern eine Stelle, wo $z=\infty$ wird. Daher ist die Summe der Aenderungen, welche $\log(z-c)$ erfährt, wenn x die einzelnen Linien L_α' im negativen Sinne durchläuft, also in der Weise, dass jedesmal G' zur Rechten, und G_α wie vorhin zur Linken bleibt:

$$-2\pi i(n-1).$$

Dadurch entsteht die Relation

$$\sum_{\alpha=0}^{\varrho} 2\pi i m_\alpha = -2\pi i(n-1),$$

oder

$$n+\sum_{\alpha=0}^{\varrho} m_\alpha = 1.$$

Es kann aber von den ganzen Zahlen n und m_α keine negativ sein; folglich muss immer eine dieser $\varrho+2$ Zahlen 1 sein, während alle übrigen 0 sind. Entweder ist also $n=1$, und dann sind alle Zahlen m_α, mithin auch alle n_α gleich 0; oder es ist $n=0$, dann ist ein m_α gleich 1, also ein n_α gleich 2, während alle übrigen n_α ebenfalls 0 sind. Mit anderen Worten:

Entweder wird der Werth c von der Function z an einer Stelle innerhalb des Gebiets angenommen; dann ist an allen anderen Stellen innerhalb und auf der Grenze des Gebiets z von c verschieden.

Oder der Werth c wird nicht innerhalb des Gebiets angenommen. Dann giebt es auf einer Linie L_α zwei conjugirte Punkte, die auch zusammenfallen können, in denen $z=c$ wird; an allen anderen Punkten der Grenze ist dann aber z von c verschieden.

Hieraus folgt:

Die Grössen $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\varrho$ sind sämmtlich kleiner als 1.

Denn wäre $\omega_\alpha \geqq 1$, so würde der Werth $\frac{1}{\omega_\alpha}$ dem Intervall von 0 bis 1 angehören. Es würde daher die Function

$$z = e^{2\pi i J(x)} = e^{2\pi i(c_\alpha+\omega_\alpha t)}$$

den Werth, den sie in dem Punkte A_α, wo $t=0$ ist, besitzt, noch in einem anderen, dem Werthe $t=\frac{1}{\omega_\alpha}$ entsprechenden Punkte der Linie L_α annehmen. Dies ist unmöglich, da in A_α zwei conjugirte Punkte zusammenfallen.

§ 7.

Construiren wir in der Ebene der complexen Grösse z diejenigen Punkte oder Werthe von z, die den Randlinien des Gebietes G entsprechen. Für die Linie L_α hatten wir gesetzt:

$$J(x) = c_\alpha+\omega_\alpha t,$$

wo t von 0 bis 1 zunimmt und wieder von 1 bis 0 abnimmt, wenn x von A_α aus die ganze Linie durchläuft. Es beschreibt daher

$$z = e^{2\pi i c_\alpha}.e^{2\pi i\omega_\alpha t}$$

im positiven Sinne und dann wieder zurück im negativen einen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt ist, und dessen Anfangs- und Endpunkt durch die Werthe

$$z_\alpha = e^{2\pi i c_\alpha},\ z'_\alpha = z_\alpha e^{2\pi i\omega_\alpha}$$

gegeben sind. Dieser Bogen, den wir K_α nennen wollen, ist keine volle Peripherie, weil $\omega_\alpha < 1$ ist; ω_α selbst ist das Verhältniss der Länge dieses Bogens K_α zur ganzen Peripherie.

Den Linien $L_0, L_1, \ldots, L_\varrho$ entspricht auf diese Weise ein System concentrischer Kreisbögen:

$$K_0, \quad K_1, \quad \ldots, \quad K_\varrho,$$

und der analytische Satz, den wir im vorigen Paragraphen bewiesen haben, lässt sich jetzt geometrisch so fassen:

Zu jedem Punkte $z = c$, der nicht auf einer der Linien K liegt, gehört ein und nur ein Punkt im Innern von G, und keiner auf der Grenze. Einem Punkte $z = c$ aber, der auf einer der Linien K liegt, entspricht kein Punkt im Innern, dagegen zwei und nur zwei Punkte der Grenze, die auf einer und derselben Randlinie liegen. Endlich entsprechen den $2\varrho+2$ Endpunkten der Linie K die Punkte, die wir mit A_α, B_α bezeichnet haben.

Man sieht auch, dass zwei verschiedene Linien K keinen Punkt mit einander gemeinsam haben können, auch wenn sie denselben Radius besitzen sollten. Denn dies würde heissen, dass z auf zwei verschiedenen Linien L_α denselben Werth annimmt.

Dem Punkte x_0 entspricht in der z-Ebene der Nullpunkt, dem Punkte x_1 der unendlich ferne.

Wir können die Gesammtheit aller nicht auf den Linien K liegenden Punkte der z-Ebene als das Innere, die Linien K selbst als die Begrenzung eines $(\varrho+1)$-fach zusammenhängenden Gebietes $\overline{G}$ auffassen. In dieses wird durch die Gleichung:

$$z = e^{2\pi i J(x)} = f(x)$$

das Gebiet G conform abgebildet, und zwar so, dass x_0 in den Nullpunkt, x_1 in den unendlich fernen übergeht, und die Linien L in Bögen concentrischer Kreise, die um den Nullpunkt beschrieben sind.

Abgesehen davon, dass man zu z noch einen constanten Factor hinzufügen kann, ist diese Abbildung eine völlig bestimmte.

Denn nehme ich an, dass eine Function $z = f(x)$ gegeben ist, die eine gegenseitig eindeutige Abbildung der Gebiete G und $\overline{G}$ vermittelt, und dass $z = 0$ für $x = x_0$, $z = \infty$ für $x = x_1$ wird. Wenn ich dann im Gebiete G eine Linie L'_α ziehe, welche die Randlinie L_α eng umschliesst, und in der z-Ebene die entsprechende Linie K'_α construire, die den Bogen K_α umgiebt, so wird offenbar nicht nur z, sondern auch $\log(z)$ in sich selbst

zurückkehren, wenn z die Linie K'_α durchläuft. Daher wird auch

$$\frac{1}{2\pi i}\log f(x)$$

in sich selbst zurückkehren, wenn x die Linie L'_α beschreibt. Die Eigenschaften dieser Function stimmen demnach genau mit denen überein, durch welche unser $J(x)$ bis auf eine additive Constante bestimmt war.

Bei dieser Abbildung des Gebietes G in die ganze unendliche Ebene (z) erhalten die Coefficienten ω_α, wie bereits erwähnt, eine sehr einfache geometrische Bedeutung. Ich will deshalb unseren Hauptsatz noch einmal, jetzt in dieser Form, aussprechen:

Es sei ein $(\varrho+1)$-fach zusammenhängendes Gebiet mit regulärer Begrenzung gegeben und eine harmonische Function $U(\xi, \eta)$, von der man weiss: erstens, dass sie in dem ganzen Gebiete, mit Einschluss der Grenze, regulär und nebst ihrer zugeordneten Function $V(\xi, \eta)$ eindeutig ist, zweitens, dass die Werthänderungen, welche $U(\xi, \eta)$ auf den einzelnen Randlinien $L_0\ L_1, \ldots, L_\varrho$ des Gebietes erfährt, ihrem absoluten Betrage nach unterhalb gegebener Werthe $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_\varrho$ bleiben.

Fasse ich dann mit dieser einen Function U zugleich die Gesammtheit aller ins Auge, die beiden Bedingungen genügen, so wird der absolute Werth der Aenderung, die ein solches U beim Uebergange von einem Punkte P_0 innerhalb des Gebietes zu einem anderen P_1 erfährt, insofern eine variable Grösse sein, als ich die Function U variiren kann.

Diese variable Grösse $|U_0-U_1|$ hat indess eine endliche obere Grenze Δ, der sie durch geeignete Wahl von U beliebig nahe gebracht, die aber nie überstiegen werden kann. Der Werth von Δ wird natürlich abhängen einerseits von den gegebenen Werthen $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_\varrho$, andererseits von der Lage der beiden Punkte P_0, P_1 im Gebiete. Nach unseren Beweisen gilt nun Folgendes:

Δ ist eine lineare Function von $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_\varrho$:

$$\Delta = \sum_{\alpha=0}^{\varrho} \omega_\alpha \Delta_\alpha,$$

deren Coefficienten ω_α zwischen 0 und 1 gelegene Grössen sind.

Die Art, wie die einzelnen ω_α von der Lage der beiden Punkte P_0, P_1 im Gebiete abhängig sind, wird angegeben durch den Satz:

Bildet man — was im wesentlichen nur auf eine Weise möglich ist — das Gebiet G conform ab auf die ganze unendliche Ebene, und zwar so, dass dem Punkte P_0 der Nullpunkt, P_1 der unendlich ferne ent-

spricht, und dass die Linien L in Bögen concentrischer Kreise übergehen, die um den Nullpunkt beschrieben sind, so ist jedes ω_a gleich der Länge eines solchen Kreisbogens, dividirt durch dessen ganze Peripherie.

Eine Folgerung möge noch erwähnt werden. Da die ω_a sämmtlich kleiner als 1 sind, so ist:

$$\Delta < \sum_{a=0}^{\varrho} \Delta_a$$

Hier ist der Ausdruck auf der rechten Seite vollkommen unabhängig von P_0, P_1. Wir ziehen hieraus den Satz:

Die grösste Werthschwankung einer Function U in einem Gebiete G ist kleiner oder gleich der Summe der grössten Werthschwankungen, die U auf den einzelnen Randlinien von G erfährt.

§ 8.

Für den Fall $\varrho = 0$, wo nur eine Randlinie vorhanden ist, hätte sich die ganze Betrachtung hauptsächlich insofern vereinfacht, als hier jede im Gebiete reguläre harmonische Function U zugleich eindeutig ist und eine eindeutige zugeordnete Function hat. Das Resultat bleibt bestehen. Wenn ich also die Function U der Bedingung unterwerfe, dass ihre Werthschwankungen auf der Randlinie den Werth Δ_0 nicht übersteigen sollen, so ist $\omega\Delta_0$ die obere Grenze für den Werthunterschied $|U_0 - U_1|$ der Function in zwei fest angenommenen Punkten P_0, P_1 innerhalb des Gebietes. Dabei ist ω ein positiver echter Bruch, dessen geometrische Definition folgende ist:

Transformire ich das gegebene Gebiet G durch eine Gleichung $z = f(x)$ so, dass x_0 in den Nullpunkt, x_1 in den unendlich fernen und die Randlinie in den Bogen K eines um den Nullpunkt beschriebenen Kreises übergeht, während dem Innern von G die ganze z-Ebene mit Ausnahme der Linie K entspricht, so ist ω gleich der Länge dieses Bogens K, dividirt durch die ganze Peripherie.

Vergleichen wir damit das Resultat, das wir in den ersten Paragraphen, allerdings nur für die Functionen $U = \varphi(\xi + \eta i)$, erhalten haben. Danach ist $|U_0 - U_1|$ immer kleiner als $E.\Delta_0$, wo E ebenfalls einen von der Lage der beiden Punkte P_0, P_1 abhängigen echten Bruch bedeutet, der aber anders definirt war, nämlich folgendermassen:

Transformire ich durch eine Gleichung

$$y = g(x)$$

das gegebene Gebiet in den Einheitskreis:

$$|y| \leqq 1,$$

und zwar so, dass dem Punkte x_0 der Mittelpunkt $y = 0$ dieses Kreises entspricht, dann ist E die Entfernung des Mittelpunktes von derjenigen Stelle y_1 im Innern des Kreises, die dem Punkte x_1 entspricht.

Es ist von Interesse, zu untersuchen, welcher von diesen beiden Werthen E und ω der kleinere ist. Die Beziehung, welche zwischen E und ω besteht, wird man am einfachsten erhalten, wenn man das Gebiet $\overline{G}$, also die volle z-Ebene mit dem Kreisbogen K als Grenze, in den Einheitskreis der y-Ebene abbildet, und zwar so, dass dem Punkte $z = 0$ wiederum der Punkt $y = 0$ entspricht. Wenn wir ausserdem die Substitution so einrichten, dass der Werth y_1, der zu $z = \infty$ (also zu $x = x_1$) gehört, ein positiver wird, so ist offenbar direct $y_1 = E$.

Es seien

$$c' \quad \text{und} \quad c'' = c' e^{2\pi i \omega}$$

die beiden Endpunkte des Bogens K. Dann stellt

$$c = c' e^{\pi i \omega}$$

die Mitte desselben dar, und der Ausdruck

$$z = c \frac{c\tau + c'}{c + c'\tau},$$

der für $\tau = 0$ den Werth c', für $\tau = 1$ den Werth c, endlich für $\tau = \infty$ den Werth c'' annimmt, stellt analytisch den ganzen Bogen K dar, wenn ich unter τ eine positive Veränderliche verstehe, die von 0 bis ∞ variirt.

Einem Punkte z, der nicht auf K liegt, entspricht ein negatives oder imaginäres τ. Setze ich nun $\tau = t^2$, also

$$z = c \frac{ct^2 + c'}{c + c't^2},$$

so gehören zu jedem Punkte der Linie K zwei reelle Werthe t und $-t$, zu jedem z ausserhalb K aber zwei imaginäre. Wenn wir unter t denjenigen der beiden Werthe verstehen, dessen zweite Coordinate > 0 ist, so wird hierdurch das Gebiet $\overline{G}$ conform abgebildet auf die positive Halbebene (t).

Nun seien t_0 und t_1 die beiden Werthe von t, die zu $z = 0$ und $z = \infty$ gehören:

$$t_0 = \sqrt{\frac{-c'}{c}}, \quad t_1 = \sqrt{\frac{-c}{c'}}.$$

Sie sind mit positiver zweiter Coordinate zu nehmen; also ist:

$$t_0 = ie^{-\frac{\pi i\omega}{2}}; \quad t_1 = ie^{+\frac{\pi i\omega}{2}}.$$

Setzen wir weiter:

$$\frac{t-t_0}{t_0 t-1} = y,$$

so entsprechen den Werthen $t=0$, $t=1$ und $t=\infty$ die Werthe:

$$y = t_0, \quad -1, \quad \frac{1}{t_0},$$

die sämmtlich dem absoluten Betrage nach 1 sind. Daher geht durch diese Substitution die reelle Gerade in den Einheitskreis der y-Ebene über. Dem Werthe t_0 entspricht der Werth $y=0$, und dem Werthe $t=t_1$ der Werth

$$y_1 = \frac{t_0-t_1}{2} = \sin\left(\frac{\pi\omega}{2}\right).$$

Durch die beiden Substitutionen

$$z = c\frac{ct^2+c'}{c+c't^2}, \quad t = \frac{y-t_0}{t_0 y-1}$$

wird demnach die Fläche $\bar{G}$ zuerst in die positive Halbebene, dann in den Einheitskreis der Ebene (y) übergeführt. Dabei entsprechen den Punkten $z=0$ und $z=\infty$ (die ihrerseits durch die Gleichung $z=f(x)$ aus x_0 und x_1 hervorgingen) zuerst die Punkte $t=t_0$ und $t=t_1$, dann $y=0$ und $y=\sin\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)$. Folglich ist:

$$E = \sin\left(\frac{\pi\omega}{2}\right),$$

$$\omega = \frac{2}{\pi}\operatorname{Arc}\sin(E).$$

Diese Formel zeigt, dass ω kleiner ist als E, dass demnach die Ungleichung (B.) auch für das einfach zusammenhängende Gebiet in Bezug auf die Functionen eines complexen Arguments mehr aussagt, als der Satz, welcher in den ersten Paragraphen aufgestellt wurde. Allerdings ist auch für diesen kleineren Werth $\Delta_0.\omega$, oder $D(\varphi).\omega$, nicht bewiesen, dass er die wahre obere Grenze von $|\varphi(x_0)-\varphi(x_1)|$ darstellt, was hier noch einmal hervorgehoben werden soll; dies steht vielmehr nur fest für das umfassendere Geschlecht der harmonischen Functionen.

Nehmen wir noch einmal für G die Fläche des Kreises, der mit dem Radius R um den Nullpunkt beschrieben ist. Es sei wieder $\varphi(x)$ eine in

diesem Kreise reguläre Function, $D(\varphi)$ ihre grösste Werthschwankung auf der Grenze. Dann gilt jetzt allgemein die Formel:

$$|\varphi(x_0)-\varphi(x_1)| \leqq D(\varphi)\cdot\frac{2}{\pi}\operatorname{Arcsin}\left|\frac{R(x_0-x_1)}{R^2-x_0\bar{x}_1}\right|.$$

Daraus folgen die specielleren, in denen r irgend eine positive Grösse bedeuten möge, die kleiner als R ist:

$$|\varphi(r)-\varphi(0)| \leqq D(\varphi)\cdot\frac{2}{\pi}\operatorname{Arcsin}\left(\frac{r}{R}\right),$$

$$|\varphi(r)-\varphi(-r)| \leqq D(\varphi)\cdot\frac{2}{\pi}\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2Rr}{R^2+r^2}\right).$$

Letztere kann einfacher so dargestellt werden:

$$|\varphi(r)-\varphi(-r)| \leqq D(\varphi)\cdot\frac{4}{\pi}\operatorname{Arctg}\left(\frac{r}{R}\right).$$

Endlich folgt, wenn man x_1 mit x_0 zusammenrücken lässt:

$$|\varphi'(r)| \leqq D(\varphi)\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{R}{R^2-r^2},$$

und für $r=0$:

$$|\varphi'(0)| \leqq \frac{2}{\pi}\cdot\frac{D(\varphi)}{R}.$$

Wenn also $D(\varphi)$ die grösste Werthschwankung einer Function in einem Kreise vom Radius R bedeutet, so kann der absolute Betrag der Ableitung im Mittelpunkte des Kreises den Werth

$$\frac{2}{\pi}\frac{D(\varphi)}{R}$$

nicht übersteigen.

Marburg, den 7. Juli 1896.

Ueber die Reihenentwickelung der Integrale eines Systems von Differentialgleichungen in der Umgebung gewisser singulärer Stellen.

(Fortsetzung der Arbeit aus Band 117 S. 104—128.)

(Von Herrn *J. Horn* in Charlottenburg.)

Die vorliegende Arbeit bringt zu der unter gleichem Titel im 116. und 117. Bande dieses Journals erschienenen Abhandlung einige Ergänzungen, welche zum Theil durch den dritten Band von *Picard*'s Traité d'Analyse veranlasst worden sind (§ 10 und § 11). Hieran knüpfen sich einige Bemerkungen über die Art, wie die willkürlichen Constanten in den früher aufgestellten Reihenentwickelungen auftreten (§ 12).

§ 10.

Im ersten Kapitel des dritten Bandes des Traité d'Analyse wird nach Vorarbeiten der Herren *Poincaré* und *Picard* ein System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}$$

betrachtet, worin X_α $(\alpha = 1, \ldots, n)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ darstellt, welche für $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ verschwindet und für hinreichend kleine absolute Beträge der Argumente convergirt:

$$X_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha\beta} x_\beta + \cdots . \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$

Es handelt sich um die Integralcurven, welche durch den Punkt $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ gehen oder sich demselben beliebig nähern. Das System wird auf die Form

$$t \frac{dx_\alpha}{dt} = X_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

gebracht, und es werden $x_1, \ldots, x_n$ als Functionen von t dargestellt. Es seien folgende Bedingungen erfüllt:

1) die Determinante $|a_{\alpha\beta}-s\delta_{\alpha\beta}|$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$ habe lauter einfache Elementartheiler $s-a_1, \ldots, s-a_n$;

2) die Punkte $a_1, \ldots, a_m$ $(m \leqq n)$ liegen in der Ebene der complexen Zahlen auf derselben Seite einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden;

3) es bestehe keine Beziehung von der Form

$$a_\alpha = \varrho_1 a_1 + \cdots + \varrho_m a_m,$$

wo α eine der Zahlen $1, \ldots, n$ bedeutet und $\varrho_1, \ldots, \varrho_m$ ganze positive Zahlen (einschl. 0) mit einer Summe $\varrho_1 + \cdots + \varrho_m > 1$ sind.

Dann ergeben sich, wenn mit $C_1, \ldots, C_m$ willkürliche Constante bezeichnet werden, für $x_1, \ldots, x_n$ Potenzreihen von $C_1 t^{a_1}, \ldots, C_m t^{a_m}$, welche convergiren, wenn die absoluten Beträge dieser m Grössen gewisse Werthe nicht überschreiten, und welche mit diesen Grössen verschwinden.

Es fragt sich zunächst, unter welcher Bedingung es möglich ist, die Veränderliche t einen Weg durchlaufen zu lassen, auf welchem sich $t^{a_1}, \ldots, t^{a_m}$ gleichzeitig der Grenze Null nähern. Es sei $a_i = p_i + q_i\sqrt{-1}$ $(i = 1, \ldots, m)$. Wir setzen

$$t = re^{\vartheta\sqrt{-1}}$$

$$t^{a_i} = R_i e^{\theta_i\sqrt{-1}}, \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

so dass

$$R_i = e^{p_i \log r - q_i \vartheta}, \quad \theta_i = p_i\vartheta + q_i \log r.$$

Die Variable t durchlaufe die Curve $\vartheta = f(r)$ mit $\lim r = 0$ oder $\lim r = \infty$; es handelt sich um die Bedingung dafür, dass sich die Ausdrücke

$$\log R_i = p_i \log r - q_i f(r) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

gleichzeitig der Grenze $-\infty$ nähern. Ist 1) $\lim \frac{f(r)}{\log r} = \pm\infty$ (z. B. wenn t die hyperbolische Spirale $\vartheta = \frac{1}{r}$ mit dem asymptotischen Punkt $t = 0$ durchläuft), so ist

$$\lim \log R_i = -q_i \lim f(r) = -\infty,$$

wenn $\lim f(r) = +\infty$ und sämmtliche q_i positiv oder $\lim f(r) = -\infty$ und sämmtliche q_i negativ sind. Ist 2) $\lim \frac{f(r)}{\log r} = 0$ (z. B. wenn sich t auf der Geraden $\vartheta = \vartheta^0$ nach $t = 0$ bewegt), so ist $\lim \log R_i = p_i \lim \log r = -\infty$ $(i = 1, \ldots, m)$, wenn $\lim r = 0$ und sämmtliche p_i positiv oder $\lim r = \infty$ und sämmtliche p_i negativ sind. Ist 3) $\lim \frac{f(r)}{\log r} = \frac{1}{m}$ endlich und von Null

verschieden, so kann man $f(r)=\frac{1}{m}\log r$ setzen, also t die logarithmische Spirale $r=e^{m\vartheta}$ durchlaufen lassen. Setzen wir

$$\vartheta = \frac{1}{m}\log r+\vartheta^0,$$

so wird

$$\theta_i = \frac{1}{M_i}\log R_i+\theta_i^0,$$

wo

$$\frac{1}{M_i}=\frac{q_i+\frac{p_i}{m}}{p_i-\frac{q_i}{m}}, \quad \theta_i^0=\frac{p_i^2+q_i^2}{p_i-\frac{q_i}{m}}\vartheta^0$$

ist, so dass auch t^{a_i} eine logarithmische Spirale durchläuft. (t und t^{a_i} werden nur dann gleichzeitig mit endlichem Argument Null oder unendlich gross, wenn m und M_i gleichzeitig unendlich werden, d. h. wenn $q_i=0$, also a_i reell ist.) Wir haben

$$\log R_i = \left(p_i-\frac{q_i}{m}\right)\log r-q_i\vartheta^0;$$

damit $\lim\log R_i=-\infty$ $(i=1,\ldots,m)$ wird, müssen die m Zahlen

$$p_i-\frac{q_i}{m} \qquad (i=1,\ldots,m)$$

dasselbe Vorzeichen haben, d. h. die Punkte $a_i=p_i+q_i\sqrt{-1}$ $(i=1,\ldots,m)$ müssen auf derselben Seite einer Geraden liegen, welche, wenn p, q die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Zahlenebene bezeichnen, die Gleichung $p-\frac{q}{m}=0$ oder $q=mp$ besitzt.

Es sei schliesslich $\lim\vartheta=\pm\infty$, ohne dass sich r der Grenze 0 oder ∞ nähert; $\lim\log R_i=-q_i\lim\vartheta$ ist nur dann gleich $-\infty$, wenn $\lim\vartheta=+\infty$ und sämmtliche q_i negativ oder $\lim\vartheta=-\infty$ und sämmtliche q_i positiv sind. Alle Fälle zusammenfassend, haben wir den Satz:

Die Grössen $t^{a_1}, \ldots, t^{a_m}$ können sich nur dann gleichzeitig der Grenze Null nähern, wenn die Punkte $a_1, \ldots, a_m$ auf derselben Seite einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden liegen.

Wenn nun die Punkte $a_i=\varrho_i e^{\varphi_i\sqrt{-1}}$ $(i=1,\ldots,m)$ auf derselben Seite einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden liegen, d. h. wenn ein Winkel φ derart vorhanden ist, dass

$$\varphi < \varphi_i < \varphi+\pi, \qquad (i=1,\ldots,m)$$

so geht das System

$$t\frac{dx_\alpha}{dt} = \sum_\beta a_{\alpha\beta}x_\beta + \cdots \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$

durch die Substitution

$$t = t'e^{\omega\sqrt{-1}}$$

über in

$$t'\frac{dx_\alpha}{dt'} = \sum_\beta a'_{\alpha\beta}x_\beta + \cdots, \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$

wobei

$$a'_{\alpha\beta} = e^{\omega\sqrt{-1}}a_{\alpha\beta}$$

ist; die Gleichung $|a'_{\alpha\beta} - s'\delta_{\alpha\beta}| = 0$ hat die Wurzeln

$$a'_1 = e^{\omega\sqrt{-1}}a_1, \quad \ldots, \quad a'_n = e^{\omega\sqrt{-1}}a_n,$$

das Argument $\varphi'_i = \varphi_i + \omega$ von a_i erfüllt die Bedingung

$$\varphi + \omega < \varphi'_i < \varphi + \omega + \pi$$

oder, wenn man $\omega = -\frac{\pi}{2} - \varphi$ annimmt,

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi'_i < \frac{\pi}{2}, \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

d. h. die reellen Theile der Grössen $a'_1, \ldots, a'_m$ sind positiv.

Die obige Bedingung 2) ***kann demnach zurückgeführt werden auf die Bedingung, dass die reellen Theile von*** $a_1, \ldots, a_m$ ***positiv sind.***

Die Gestalt, welche die Reihenentwickelungen der Integrale annehmen, wenn die Bedingungen 1) und 3) nicht erfüllt sind, wurde in der früheren Arbeit unter der Voraussetzung untersucht, dass $a_1, \ldots, a_m$ positive reelle Theile besitzen; nach dem, was soeben gezeigt wurde, gelten dieselben Entwickelungen, wenn $a_1, \ldots, a_m$ auf derselben Seite einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden liegen. ***An Stelle von*** $t^{a_1}, \ldots, t^{a_m}$ ***treten Ausdrücke***

$$t^{a_1}(\log t)^{k_1}, \quad \ldots, \quad t^{a_m}(\log t)^{k_m},$$

wo $k_1, \ldots, k_m$ ***ganze positive Zahlen (einschl. Null) sind, welche durch die Elementartheiler der Determinante*** $|a_{\alpha\beta} - s\delta_{\alpha\beta}|$ ***und durch die zwischen*** $a_1, \ldots, a_m$ ***bestehenden Beziehungen bedingt sind.****) Unter der über $a_1, \ldots, a_m$ gemachten

*) Die Modificationen, welche in Folge davon eintreten, dass auf der rechten Seite der Differentialgleichung $t\frac{dx_\alpha}{dt} = X_\alpha$ die unabhängige Veränderliche t nicht erscheint, sind leicht zu erkennen. Zunächst tritt in den Potenzreihen für $x_1, \ldots, x_n$ die Grösse

Voraussetzung ist es möglich, t einen solchen Weg durchlaufen zu lassen, dass sich die Grössen $t^{a_i}(\log t)^{k_i}$ $(i = 1, \ldots, m)$ gleichzeitig der Grenze Null nähern; denn durch die Substitution $t = t'^{e^{\omega\sqrt{-1}}}$ gehen diese Grössen über in $t'^{a'_i}(\log t')^{k_i}.e^{k_i\omega\sqrt{-1}}$, wo die reellen Theile der a'_i positiv sind. Die letzteren Grössen werden aber Null, wenn t' mit endlichem Argument Null wird; der entsprechende Weg von t ist im allgemeinen eine logarithmische Spirale.

§ 11.

Das Differentialgleichungssystem habe wieder die in der früheren Arbeit zu Grunde gelegte Form

$$x\frac{dy_\alpha}{dx} = G_\alpha(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

$$G_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha\beta}y_\beta + \cdots$$

und die Gleichung $|a_{\alpha\beta} - s\delta_{\alpha\beta}| = 0$ habe die Wurzeln $a_1, \ldots, a_n$. In der Ebene der complexen Zahlen mögen die Punkte $1, a_1, \ldots, a_m$ auf der einen, die Punkte $a_{m+1}, \ldots, a_n$ auf der anderen Seite einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden liegen*). Meine früheren Entwickelungen, welche auf der specielleren Voraussetzung beruhen, dass die reellen Theile von $a_1, \ldots, a_m$ positiv sind, erfahren nur kleine Aenderungen.

Die Determinante $|a_{\alpha\beta} - s\delta_{\alpha\beta}|$ habe zunächst lauter einfache Elementartheiler $s - a_1, \ldots, s - a_n$, sodass man dem System die Form geben kann:

$$x\frac{dy_\alpha}{dx} = a_\alpha y_\alpha + \cdots, \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

welche unter der Voraussetzung, dass zwischen $a_1, \ldots, a_m$ keine Relationen

---

t nicht selbst als Argument auf. Wenn ferner die Grössen $a_1, \ldots, a_m$ so angeordnet werden, dass die reellen Theile der Grössen $e^{\omega\sqrt{-1}}a_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ (oder, was dasselbe ist, die Entfernungen der Punkte a_i von derjenigen Geraden, auf deren einer Seite diese Punkte liegen) nicht abnehmen, kommen nur Beziehungen von der Form

$$a_i = \varrho_1 a_1 + \cdots + \varrho_{i-1}a_{i-1}$$

in Betracht, während es sich früher, als X_α auch die unabhängige Veränderliche t enthielt, um Relationen von der Gestalt $a_i = \varrho + \varrho_1 a_1 + \cdots + \varrho_{i-1}a_{i-1}$ handelte.

*) Im Traité d'Analyse Bd. III, S. 21 ist ein solches System auf ein System von der in § 10 betrachteten Gestalt zurückgeführt; es bedarf jedoch noch des Nachweises, dass Relationen von der Form $1 = p_1\lambda_1 + \cdots + p_n\lambda_n$ (in der Bezeichnung des Herrn *Picard*) nicht in Betracht kommen.

bestehen, in § 1 (Bd. 116) behandelt ist. Die dortigen Entwickelungen bleiben Wort für Wort bestehen; nur zum Convergenzbeweis ist Folgendes zu bemerken.

Es handelt sich wie in § 1 um den Nachweis, dass eine positive Zahl M so vorhanden ist, dass

$$|\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m-a_\alpha| > M$$

ist für alle Systeme ganzer positiver Werthe $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ mit Ausnahme von $\lambda=0,\ \lambda_1+\cdots+\lambda_m=1$. Derselbe lässt sich wie folgt führen. Der Winkel ω sei (ähnlich wie in § 10) so gewählt, dass die reellen Theile von $a'=e^{\omega\sqrt{-1}}$ und $a_i'=e^{\omega\sqrt{-1}}a_i$ $(i=1,\ldots,m)$ positiv, diejenigen von $a_k'=e^{\omega\sqrt{-1}}a_k$ $(k=m+1,\ldots,n)$ negativ oder Null sind, und man beweist wie in § 1 das Vorhandensein einer solchen Zahl M, dass für alle Werthsysteme $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ mit Ausnahme von $\lambda=0,\ \lambda_1+\cdots+\lambda_m=1$

$$|\lambda a'+\lambda_1 a_1'+\cdots+\lambda_m a_m'-a_\alpha'| > M$$

ist. Man braucht nur auf S. 270, Bd. 116 $a', a_1', \ldots, a_m'$ an Stelle von $1, a_1, \ldots, a_m$ zu setzen. Wegen

$$\lambda a'+\lambda_1 a_1'+\cdots = e^{\omega\sqrt{-1}}(\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots)$$

ist dann auch

$$|\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m-a_\alpha| > M,$$

w. z. b. w.

Falls Relationen zwischen den Grössen $a_1, \ldots, a_m$ bestehen (§ 2), erfährt auch nur der Convergenzbeweis geringe Modificationen. Es handelt sich um Beziehungen

$$a_\alpha = \lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m,$$

wo $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ganze positive Zahlen einschl. Null (mit Ausnahme von $\lambda=0,\ \lambda_1+\cdots+\lambda_m \leqq 1$) sind. Diejenigen Grössen $a_1, \ldots, a_m$, welche nicht auf der linken Seite einer solchen Gleichung auftreten, seien wieder mit $a_1, \ldots, a_l$ bezeichnet; die übrigen Grössen seien so geordnet, dass die reellen Theile von $e^{\omega\sqrt{-1}}a_i$ $(i=l+1,\ldots,m)$ eine nicht abnehmende Reihe bilden. Die Grössen $a'=e^{\omega\sqrt{-1}}$, $a_i'=e^{\omega\sqrt{-1}}a_i$ $(i=1,\ldots,m)$ haben positive reelle Theile, und es können zwischen denselben nur Beziehungen von der Form

$$a_i' = \varrho a'+\varrho_1 a_1'+\cdots+\varrho_{i-1}a_{i-1}',$$

also zwischen $a_1, \ldots, a_m$ nur Beziehungen von der Form

$$a_i = \varrho+\varrho_1 a_1+\cdots+\varrho_{i-1}a_{i-1}$$

bestehen. Die reellen Theile der Grössen $a'_k = e^{\omega\sqrt{-1}} a_k$ $(k = m+1, \ldots, n)$ sind negativ oder Null. Auf S. 282, Bd. 116 sind jetzt die Grössen $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ folgendermassen einzuführen. Es sei

$$0 < \mathfrak{a}' \leqq \Re(a'),$$

$$0 < \mathfrak{a}'_i \leqq \Re(a'_i), \qquad (i = 1, \ldots, l)$$

$$\mathfrak{a}'_i = \mu_i \mathfrak{a}' + \mu_{i1} \mathfrak{a}'_1 + \cdots + \mu_{i,i-1} \mathfrak{a}'_{i-1}; \qquad (i = l+1, \ldots, m)$$

dann setzen wir

$$\mathfrak{a}_i = \frac{\mathfrak{a}'_i}{\mathfrak{a}'}, \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

ferner

$$\mathfrak{a}_k = \frac{\Re(a'_k)}{\mathfrak{a}'}, \qquad (k = m+1, \ldots, n)$$

sodass $\mathfrak{a}_k$ negativ oder Null ist. Wenn man wie früher $\mathfrak{a} = \lambda + \lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \cdots + \lambda_m \mathfrak{a}_m$ setzt, so ist eine Zahl $\mathfrak{r}$ so vorhanden, dass für $\mathfrak{a} > \mathfrak{r}$ der Coefficient von $\mathfrak{G}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1 \ldots \lambda_m}$ in der Recursionsformel (16.), § 2 positiv ist. Es ist nun zu beweisen, dass zwei Zahlen $\mathfrak{r}$ und g so vorhanden sind, dass für $\mathfrak{a} > \mathfrak{r}$

$$|Q^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1 \ldots \lambda_m}| < g$$

ist (Bd. 116, S. 288). Wir schreiben

$$Q^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1 \ldots \lambda_m} = \frac{\lambda + \lambda_1(\mathfrak{a}_1 - \nu_1\varepsilon) + \cdots - (\mathfrak{a}_\alpha - \nu_\alpha\varepsilon)}{\lambda + \lambda_1 a_1 + \cdots - a_\alpha} = \frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}'} \frac{\lambda\mathfrak{a}' + \lambda_1(\mathfrak{a}'_1 - \nu_1\varepsilon') + \cdots - (\mathfrak{a}'_\alpha - \nu_\alpha\varepsilon')}{\lambda a' + \lambda_1 a'_1 + \cdots - a'_\alpha},$$

wobei $\varepsilon' = \mathfrak{a}'\varepsilon$ gesetzt ist. Durch Anwendung des früheren Beweisverfahrens ergiebt sich das Vorhandensein zweier Zahlen $\mathfrak{r}'$ und g' in der Weise, dass für $\lambda\mathfrak{a}' + \lambda_1\mathfrak{a}'_1 + \cdots + \lambda_m\mathfrak{a}'_m > \mathfrak{r}'$:

$$\left| \frac{\lambda\mathfrak{a}' + \lambda_1(\mathfrak{a}'_1 - \nu_1\varepsilon') + \cdots - (\mathfrak{a}'_\alpha - \nu_\alpha\varepsilon')}{\lambda a' + \lambda_1 a'_1 + \cdots - a'_\alpha} \right| < g'$$

ist. Setzt man

$$\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{r}'}{\mathfrak{a}'}, \quad g = g' \cdot \frac{|a'|}{\mathfrak{a}'} = \frac{g'}{\mathfrak{a}'},$$

so ist für $\lambda + \lambda_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + \lambda_m\mathfrak{a}_m > \mathfrak{r}$

$$|Q^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1 \ldots \lambda_m}| < g,$$

w. z. b. w. Im übrigen bleibt der in § 2 geführte Beweis ungeändert bestehen. Aus dem Angeführten sind auch die Aenderungen ersichtlich, welche im Falle mehrfacher Elementartheiler in § 6 und § 7 Bd. 117 vorzunehmen sind.

Demnach ergeben sich auch dann, wenn die Punkte $1, a_1, \ldots, a_m$ ***auf derselben Seite einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden liegen, Reihen von der Form***

$$y_\alpha = \mathfrak{P}_\alpha(x, x^{a_1}(\log x)^{k_1}, \quad \ldots, \quad x^{a_m}(\log x)^{k_m}), \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

wo $\mathfrak{P}_\alpha$ ***eine mit*** m ***willkürlichen Constanten behaftete Potenzreihe der beigefügten Argumente bedeutet, welche für hinreichend kleine absolute Beträge dieser Argumente convergirt und für die Nullwerthe derselben verschwindet;*** $k_1, \ldots, k_m$ ***sind ganze positive Zahlen (einschl. Null).*** Es ist möglich, die Variable x eine solche sich dem Nullpunkt unbegrenzt nähernde Curve durchlaufen zu lassen (im allgemeinen eine logarithmische Spirale), dass auch die absoluten Beträge der Grössen $x^{a_i}(\log x)^{k_i}$ $(i = 1, \ldots, m)$ beliebig klein werden.

§ 12.

Es möge nun noch auf die Abhängigkeit der Reihenentwickelungen der Integrale von den willkürlichen Constanten ohne Rücksicht auf Vollständigkeit kurz eingegangen werden.

Beginnen wir zur Darstellung der Methode mit dem bereits erledigten Fall*), dass die Determinante $|a_{\alpha\beta} - s\delta_{\alpha\beta}|$ lauter einfache Elementartheiler $s - a_1, \ldots, s - a_n$ besitzt und dass zwischen $a_1, \ldots, a_m$ keine Relationen bestehen (Bezeichnung wie in § 1; dabei kann wie in § 11 die Annahme gemacht werden, dass die Punkte $1, a_1, \ldots, a_m$ auf derselben Seite einer beliebigen durch den Nullpunkt gehenden Geraden liegen; $a_1, \ldots, a_m$ mögen verschieden sein). Für $y_1, \ldots, y_n$ wurden in § 1 Potenzreihen der Grössen $x_1, z_1, \ldots, z_m$ gefunden, wobei die Coefficienten $(y_i)_{z_i}$ $(i = 1, \ldots, m)$ willkürlich gewählt werden konnten; die Reihen mit $(y_i)_{z_i} = 1$ $(i = 1, \ldots, m)$ seien

$$y_\alpha = \mathfrak{P}_\alpha(x, z_1, \ldots, z_m). \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

Es war $z_i = x^{a_i}$ angenommen, aber für die Entwickelungen des § 1 ist nur wesentlich, dass $z_1, \ldots, z_m$ den Differentialgleichungen

$$x\frac{dz_i}{dx} = a_i z_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

---

*) ***Königsberger***, Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen (Kap. 5, IV); ***Picard,*** Traité d'Analyse (Bd. III, Kap. 1); sowie § 1 der Arbeit des Verf.

genügen; wir können also, ohne im übrigen etwas zu ändern, setzen:

$$z_i = C_i x^{a_i}, \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

wo $C_1, \ldots, C_m$ willkürliche Constante bezeichnen. Dann stellt das Reihensystem

$$y_a = \mathfrak{P}_a(x, C_1 x^{a_1}, \ldots, C_m x^{a_m}) \qquad (a = 1, \ldots, n)$$

die in § 1 nachgewiesene Lösung des Differentialgleichungssystems dar, denn wegen

$$y_i = C_i x^{a_i} + \cdots \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

sind $C_1, \ldots, C_m$ genau die in § 1 eingeführten willkürlichen Constanten.

Aehnlich verfahren wir für den Fall mehrfacher Elementartheiler im Anschluss an § 6 (Bezeichnung von S. 106, Bd. 117). Die dortigen Entwickelungen werden nicht geändert, wenn wir unter $t_{i\varrho}$ die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$x \frac{dt_{i\varrho}}{dx} = a^{(i)} t_{i\varrho} - (\varrho - 1) t_{i,\varrho-1} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m \\ \varrho = 1, \ldots, e^{(i)} \end{pmatrix}$$

verstehen, d. i.

$$t_{i\varrho} = x^{a^{(i)}} \sum_{k=1}^{\varrho} (\varrho - 1)_{k-1} C^{(i)}_{\varrho-k+1} (-\log x)^{k-1} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m \\ \varrho = 1, \ldots, e^{(i)} \end{pmatrix}$$

wo $C^{(i)}_1, \ldots, C^{(i)}_{e^{(i)}}$ willkürliche Constante sind. Es ist nämlich

$$x \frac{dt_{i\varrho}}{dx} = a^{(i)} x^{a^{(i)}} \sum_{k=1}^{\varrho} (\varrho - 1)_{k-1} C^{(i)}_{\varrho-k+1} (-\log x)^{k-1} - x^{a^{(i)}} \sum_{k=1}^{\varrho-1} k(\varrho - 1)_k C^{(i)}_{\varrho-k} (-\log x)^{k-1};$$

nun ist aber

$$(\varrho - 1) t_{i,\varrho-1} = (\varrho - 1) x^{a^{(i)}} \sum_{k=1}^{\varrho-1} (\varrho - 2)_{k-1} C^{(i)}_{\varrho-k} (-\log x)^{k-1}$$

und

$$k(\varrho - 1)_k = (\varrho - 1).(\varrho - 2)_{k-2},$$

woraus die Behauptung folgt. Das in § 6 gefundene Reihensystem (3.) werde, wenn die willkürlich zu wählenden Grössen

$$(y_{a^{(i)}_\varrho})_{t_{i1}} \qquad (i = 1, \ldots, m;\ \varrho = 1, \ldots, e^{(i)})$$

sämmtlich gleich 1 angenommen werden, mit

$$y_a = \mathfrak{P}_a(x, t_{11} \ldots t_{1e'}, \ldots, t_{m1} \ldots t_{me^{(m)}})$$

bezeichnet; dasselbe stellt, wenn man für die $t_{i\varrho}$ die obigen Ausdrücke setzt, die in § 6 gefundene Lösung mit $e'+\cdots+e^{(m)}$ willkürlichen Constanten dar. Die Grössen $C_\varrho^{(i)}$ lassen sich nämlich so bestimmen, dass, wenn man y_a in eine Potenzreihe der Grössen x, $x^{a^{(i)}}(-\log x)^{\varrho-1}$ $(i=1,\ldots,m;\ \varrho=1,\ldots,e^{(i)})$ entwickelt, der Coefficient von $x^{a^{(i)}}$ in der Reihe für $y_{a_\varrho^{(i)}}$ einen beliebig vorgeschriebenen Werth erhält. In § 6 hatte sich ergeben:

$$y_{a_\varrho^{(i)}} = \sum_{\nu=1}^{e^{(i)}} c_{\nu-1}^{(a_\varrho^{(i)})} t_{i\nu}+\cdots,$$

und zwar ist unter der jetzigen Annahme $c_0^{(a_\varrho^{(i)})}=1$:

$$c_{\nu-1}^{(a_\varrho^{(i)})}=0 \quad (\nu>\varrho), \quad c_{\nu-1}^{(a_\varrho^{(i)})}=\frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \quad (\nu\leqq\varrho);$$

wir haben demnach

$$y_{a_\varrho^{(i)}} = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} t_{i\nu}+\cdots$$

oder unter Einsetzung des jetzigen Ausdrucks für $t_{i\nu}$:

$$y_{a_\varrho^{(i)}} = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} C_\nu^{(i)} x^{a^{(i)}}+\cdots.$$

Sind $\left(y_{a_\varrho^{(i)}}\right)_{x^{a^{(i)}}}$ die vorgeschriebenen Werthe, so lassen sich die $C_\nu^{(i)}$ aus den Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{\varrho} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} C_\nu^{(i)} = \left(y_{a_\varrho^{(i)}}\right)_{x^{a^{(i)}}} \qquad \begin{pmatrix} i=1,\ldots,m \\ \varrho=1,\ldots,e^{(i)} \end{pmatrix}$$

bestimmen.

Einer ähnlichen Darstellungsweise der Integrale durch Potenzreihen mit vollständig festgelegten Coefficienten, deren Argumente in einfacher Weise von den willkürlichen Constanten abhängen, stellen sich gewisse Schwierigkeiten entgegen, wenn zwischen $a_1,\ldots,a_m$ Relationen bestehen (§ 2 und § 7). Im Falle des § 2 wirkt der Umstand störend, dass zwischen den dort eingeführten Grössen $t_1,\ldots,t_m$ Beziehungen von der Form

$$x^{\mu_i^{(k)}} t_1^{\mu_{i1}^{(k)}} \ldots t_{i,i-1}^{\mu_{i,i-1}^{(k)}} = x^{\varrho_i^{(k)}} t_1^{\varrho_{i1}^{(k)}} \ldots t_{i-1}^{\varrho_{i,i-1}^{(k)}}$$

bestehen können, welche bei Berechnung der Reihen zu berücksichtigen sind, so dass $x, t_1,\ldots,t_m$ nicht durchweg wie unabhängige Veränderliche behandelt werden können (vgl. die drei letzten Beispiele in § 3). Aber

auch in dem Falle, dass zwischen $a_1, \ldots, a_m$ *nur* die Relationen

$$a_i = \mu_i^{(k)} + \mu_{i1}^{(k)} a_1 + \cdots + \mu_{i,i-1}^{(k)} a_{i-1} \qquad (i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, \nu_i)$$

bestehen (wie in den beiden ersten Beispielen des § 3), wird eine stets gültige Darstellungsweise ähnlicher Art durch den Umstand vereitelt, dass die Reihenentwickelungen der Integrale im Falle gewisser Beziehungen zwischen den Coefficienten der Differentialgleichungen überhaupt nicht alle Grössen $t_1, \ldots, t_m$ enthalten. Wir wollen uns auf die Behandlung des folgenden Beispiels beschränken:

$$(1.) \qquad \begin{cases} x \dfrac{dy_\alpha}{dx} = G_\alpha(x,\ y_1,\ y_2), & (\alpha = 1, 2) \\ G_\alpha(x,\ y_1,\ y_2) = a_\alpha y_\alpha + \Sigma A^{(\alpha)}_{\varkappa\varkappa_1\varkappa_2} x^\varkappa y_1^{\varkappa_1} y_2^{\varkappa_2}, & \left(\begin{smallmatrix}\varkappa = 1,\ \varkappa_1 = \varkappa_2 = 0 \\ \varkappa + \varkappa_1 + \varkappa_2 > 1\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$$

wobei wir bisweilen die Bezeichnung benutzen:

$$A^{(\alpha)}_{\varkappa\varkappa_1\varkappa_2} = G^{(\alpha)}_{x^\varkappa y_1^{\varkappa_1} y_2^{\varkappa_2}};$$

es sei $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, so dass die Relationen bestehen:

$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = 2a_1 = 1 + a_1 = 2.$$

Nach § 2 ist $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 3$. Setzt man

$$(2.) \qquad \begin{cases} x \dfrac{dt_1}{dx} = a_1 t_1 - x, \\ x \dfrac{dt_2}{dx} = a_2 t_2 - 3t_1^2, \end{cases}$$

woraus sich

$$(3.) \qquad \begin{cases} t_1 = x^{a_1}(C_1 - \log x), \\ t_2 = x^{a_2}(C_2 + 3C_1^2(-\log x) + 3C_1(-\log x)^2 + (-\log x)^3) \end{cases}$$

ergiebt, so wird dem System (1.) durch ein Reihensystem

$$(4.) \qquad y_\alpha = \Sigma C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\lambda_2} x^\lambda t_1^{\lambda_1} t_2^{\lambda_2} \qquad (\alpha = 1, 2)$$

genügt, für dessen Coefficienten man die Recursionsformel erhält:

$$(5.) \quad (\lambda + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 - a_\alpha) C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\lambda_2} = (\lambda_1 + 1) C^{(\alpha)}_{\lambda-1,\lambda_1+1,\lambda_2} + 3(\lambda_2 + 1) C^{(\alpha)}_{\lambda,\lambda_1-2,\lambda_2+1} + \cdots.$$

Für $\alpha = 1$; $\lambda_1 = 1$*) und $\alpha = 2$; $\lambda_2 = 1$ ergiebt die Formel (5.) $0 = 0$; für

$$\alpha = 1; \quad \lambda = 1,$$
$$\alpha = 2; \quad \lambda_1 = 2,$$
$$\alpha = 2; \quad \lambda = 1, \quad \lambda_1 = 1,$$
$$\alpha = 2; \quad \lambda = 2$$

*) Die nicht angegebenen Zahlen λ, λ_1, λ_2 sind gleich Null zu setzen.

erhält man

$$(6.)\qquad \begin{cases} 0 = (y_1)_{t_1} + P', \\ 0 = 3(y_2)_{t_2} + P'', \\ 0 = 2(y_2)_{t_1^2} + P_1'', \\ 0 = (y_2)_{xt_1} + P_2''; \end{cases}$$

unter Berücksichtigung von $(y_2)_{t_1} = 0$ ergiebt sich

$$P' = G_x', \quad P'' = G_{y_1^2}'' (G_x')^2;$$

P_1'' und P_2'' hängen auch von der Grösse $(y_1)_x$ ab, welche nebst $(y_2)_{x^2}$ unbestimmt bleibt. ***Sind P' und P'' beide von Null verschieden***, d. h. ist $G_x' \neq 0$, $G_{y_1^2}'' \neq 0$, so ist $(y_1)_{t_1} \neq 0$, $(y_2)_{t_2} \neq 0$, die Reihen für y_1, y_2 hängen wirklich von t_1 und t_2 ab. Die Reihen (4.), welche man erhält, wenn man die Werthe $(y_1)_x$, $(y_2)_{x^2}$ irgend wie festlegt, seien mit $\mathfrak{P}_\alpha(x, t_1, t_2)$ $(\alpha = 1, 2)$ bezeichnet; durch Einsetzen der Ausdrücke (3.) mit den willkürlichen Constanten C_1, C_2 erhält man die Lösung des Systems (1.):

$$(7.)\qquad y_\alpha = \mathfrak{P}_\alpha(x,\ x(C_1 - \log x),\ x^2(C_2 \ldots - (\log x)^3)), \qquad (\alpha = 1, 2)$$

welche mit der in § 2 nachgewiesenen Lösung übereinstimmt. Man kann nämlich die Reihen (7.) in Potenzreihen von x, $x(-\log x)$, $x^2(-\log x)^3$ umwandeln und C_1 und C_2 so bestimmen, dass der Coefficient von x in y_1 und der Coefficient von x^2 in y_2 beliebig gegebene Werthe erhalten.

Es können verschiedene Ausnahmefälle eintreten, von denen nur einer betrachtet werden möge. Ist $P' \neq 0$, $P'' = 0$, d. h. $G_x' \neq 0$, $G_{y_1^2}'' = 0$, so würden wegen $(y_2)_{t_2} = 0$ die nach der früheren Methode bestimmten Reihen t_2 überhaupt nicht enthalten; will man die Abhängigkeit des Integrals von den Constanten ähnlich wie vorhin darstellen, so kann man t_1, t_2 durch die Differentialgleichungen definiren:

$$(2'.)\qquad \begin{cases} x\dfrac{dt_1}{dx} = a_1 t_1 - x, \\ x\dfrac{dt_2}{dx} = a_2 t_2, \end{cases}$$

so dass man erhält:

$$(3'.)\qquad \begin{cases} t_1 = x^{a_1}(C_1 - \log x), \\ t_2 = C_2 x^{a_2}, \end{cases}$$

als ob nur die Beziehung $a_1 = 1$ bestände. Das zweite Glied auf der

rechten Seite der Recursionsformel (5.) fällt fort, ebenso die zweite der Gleichungen (6.), so dass auch $(y_2)_{t_2}$ unbestimmt bleibt. Legt man die Grössen $(y_1)_x$, $(y_2)_{x^2}$, $(y_2)_{t_2}$ irgend wie fest, aber so, dass $(y_2)_{t_2} \neq 0$ ist, so erhält man ein Reihensystem $\mathfrak{P}'_\alpha(x, t_1, t_2)$ $(\alpha = 1, 2)$, und dem System (1.) wird genügt durch

$$(7'.) \qquad y_\alpha = \mathfrak{P}'_\alpha(x,\ x(C_1 - \log x),\ C_2 x^2). \qquad (\alpha = 1, 2)$$

Nach § 2 ergeben sich für y_1, y_2 Potenzreihen von x, $x(-\log x)$, auf welche Form sich die Reihen (7'.) bringen lassen, und zwar lassen sich C_1, C_2 so bestimmen, dass nach der Umformung der Coefficient von x in y_1 und derjenige von x^2 in y_2 beliebig vorgeschriebene Werthe erhalten.

Charlottenburg, 22. Januar 1896.

Ueber eine Art von simultaner Darstellung bestimmter Integrale.

(Von Herrn *G. Kowalewski* in Greifswald.)

$\varphi(t)$ und $\psi(t)$ seien Functionen der reellen Variablen t, von denen nur die Stetigkeit in dem Intervalle $(t_0 \dots T)$ mit Einschluss der Grenzen vorausgesetzt wird. Dann lassen sich, wie im Folgenden gezeigt werden soll, zwischen t_0 und T zwei Werthe t_1, t_2 und ausserdem zwei positive Grössen λ_1, λ_2 mit der Summe $\lambda_1+\lambda_2=1$ nachweisen derart, dass man hat:

$$\int_{t_0}^{T} \varphi(t)dt = (T-t_0)[\lambda_1\varphi(t_1)+\lambda_2\varphi(t_2)],$$

$$\int_{t_0}^{T} \psi(t)dt = (T-t_0)[\lambda_1\psi(t_1)+\lambda_2\psi(t_2)].$$

Denkt man sich in einem rechtwinkligen Coordinatensystem $\varphi(t)$ als Abscisse, $\psi(t)$ als Ordinate aufgetragen, so entspricht jedem Werthe t des Intervalles $(t_0 \dots T)$ ein Punkt in der Ebene. Die Gesammtheit aller dieser Punkte wird im Folgenden als die Punktmenge F bezeichnet, absichtlich nicht als Curve, da aus der Stetigkeit von φ und ψ bekanntlich nicht folgt, dass man es mit einer eigentlichen, mechanisch durchlaufbaren Curve zu thun hat. Die Punktmenge F hat folgende Eigenschaften, auf die sich der Beweis unseres Satzes stützen wird:

1. Sie ist ganz im Endlichen gelegen, da $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ wegen der Stetigkeit obere und untere Grenzen haben.

2. Alle Häufungsstellen von F gehören selbst zu F. Ist nämlich (α, β) eine solche, so hat die Function

$$[\alpha-\varphi(t)]^2+[\beta-\psi(t)]^2$$

die Null zur unteren Grenze, woraus wegen der Stetigkeit von φ und ψ folgt, dass sie für einen gewissen Werth von t thatsächlich verschwindet, das heisst

$$\alpha = \varphi(t), \quad \beta = \psi(t).$$

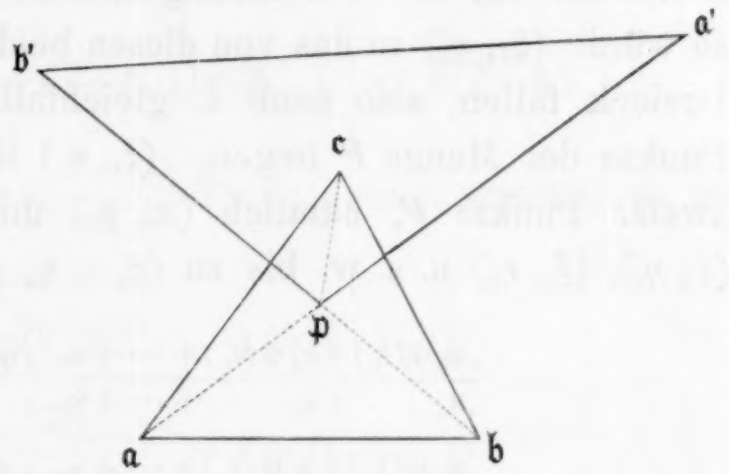
3. Hat man in der Ebene ein von einer stetigen Curve begrenztes, mit G bezeichnetes Gebiet (es genügt für das folgende ein Dreieck), und ein Punkt von F liegt innerhalb, ein zweiter ausserhalb von G, so giebt es auch einen auf der Begrenzung.

Der Beweis ergiebt sich mit Hülfe des bekannten, von *Bolzano* eingeführten Verfahrens. Zu $t = a$ gehöre ein Punkt F ausserhalb, zu $t = b$ ein solcher innerhalb von G, und wir nehmen an, unsere Behauptung sei nicht richtig. Dann liegt der zu $t = \frac{a+b}{2}$ gehörige Punkt F entweder innerhalb oder ausserhalb von G. Im ersten Falle betrachte man das Intervall $\left(a \cdots \frac{a+b}{2}\right)$, im zweiten $\left(\frac{a+b}{2} \cdots b\right)$ und wiederhole denselben Schluss in infinitum. So erhält man eine unendliche Reihe von Intervallen, wo jedes folgende eine Hälfte des vorhergehenden ist und immer dem einen Endpunkt des Intervalles ein Punkt F innerhalb, dem anderen ein solcher ausserhalb von G entspricht. Dadurch wird aber ein Werth ξ bestimmt, der in allen jenen Intervallen enthalten ist, und der zu $t = \xi$ gehörige Punkt F liegt auf der Begrenzung von G. Wäre dies nicht der Fall, so könnte man einen Kreis δ um ihn construiren, der ganz innerhalb, resp. ganz ausserhalb von G liegt. Ferner könnte man wegen der Stetigkeit von φ und ψ ε so klein wählen, dass allen Werthen t des Intervalles $(\xi-\varepsilon \ldots \xi+\varepsilon)$ Punkte F entsprechen, die in jenem Kreise liegen. Endlich werden die den Werth ξ einschliessenden Intervalle in unserer unendlichen Reihe schliesslich so klein, dass sie ganz zwischen $\xi-\varepsilon$ und $\xi+\varepsilon$ fallen. Dann müssten aber auch die zu ihren Endpunkten gehörigen Punkte F beide in den Kreis δ fallen, also beide innerhalb, resp. beide ausserhalb von G liegen, was nicht der Fall ist.

4. Das durch drei Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ der Menge F bestimmte Dreieck hat folgende fundamentale Eigenschaft:

Jeder Punkt $\mathfrak{p}$ in diesem Dreieck liegt auf der Verbindungsstrecke zweier Punkte der Menge F.

Man verlängere nämlich irgend zwei der Strecken $\mathfrak{ap}$, $\mathfrak{bp}$, $\mathfrak{cp}$, z. B. $\mathfrak{ap}$ und $\mathfrak{bp}$ über $\mathfrak{p}$ hinaus bis zu den Punkten $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ so weit, dass die Strecke $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ keinen Punkt F mehr enthält, und $\mathfrak{c}$ in dem Dreieck $\mathfrak{pa}'\mathfrak{b}'$ liegt. (Dies ist wegen 1. stets möglich, wenn nicht etwa $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in gerader Linie liegen. Dieser Fall erledigt sich aber von selbst, da dann jeder Punkt des Dreiecks $\mathfrak{abc}$ entweder auf $\mathfrak{ab}$ oder $\mathfrak{bc}$ oder $\mathfrak{ca}$, also jedenfalls auf der Verbindungsstrecke zweier Punkte F liegt.)



Betrachtet man nun das Dreieck $\mathfrak{pa}'\mathfrak{b}'$, so giebt es sowohl innerhalb, als auch ausserhalb desselben Punkte F, nämlich innerhalb den Punkt $\mathfrak{c}$, ausserhalb $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Folglich giebt es nach 3. auch auf der Begrenzung einen Punkt F, und zwar liegt er entweder auf $\mathfrak{pa}'$ oder auf $\mathfrak{pb}'$, da $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ keinen Punkt F enthalten soll. Jedenfalls ist damit unsere Behauptung bewiesen.

5. Es seien jetzt

$$x_0 = \varphi(t_0), \quad x_1 = \varphi(t_1), \quad \ldots, \quad x_{n-1} = \varphi(t_{n-1}),$$
$$y_0 = \psi(t_0), \quad y_1 = \psi(t_1), \quad \ldots, \quad y_{n-1} = \psi(t_{n-1})$$

die Coordinaten von n Punkten der Menge F, und man betrachte die Punkte

$$(\xi_0, \eta_0), \quad (\xi_1, \eta_1), \quad \ldots, \quad (\xi_{n-1}, \eta_{n-1}),$$

wobei

$$\xi_h = \frac{\varkappa_0 x_0 + \varkappa_1 x_1 + \cdots + \varkappa_h x_h}{\varkappa_0 + \varkappa_1 + \cdots + \varkappa_h}$$
$$\eta_h = \frac{\varkappa_0 y_0 + \varkappa_1 y_1 + \cdots + \varkappa_h y_h}{\varkappa_0 + \varkappa_1 + \cdots + \varkappa_h}$$

und

$$\varkappa_0, \quad \varkappa_1, \quad \ldots, \quad \varkappa_{n-1} > 0$$

sein soll.

Offenbar ist dann

$$\xi_h = \frac{(\varkappa_0 + \varkappa_1 + \cdots + \varkappa_{h-1})\xi_{h-1} + \varkappa_h x_h}{\varkappa_0 + \varkappa_1 + \cdots + \varkappa_{h-1} + \varkappa_h}$$
$$\eta_h = \frac{(\varkappa_0 + \varkappa_1 + \cdots + \varkappa_{h-1})\eta_{h-1} + \varkappa_h y_h}{\varkappa_0 + \varkappa_1 + \cdots + \varkappa_{h-1} + \varkappa_h}$$

Geometrisch bedeutet dies, dass der Punkt (ξ_h, η_h) auf der Verbindungsstrecke der Punkte (ξ_{h-1}, η_{h-1}) und (x_h, y_h) liegt. Würde nun (ξ_{h-1}, η_{h-1}) seinerseits auf der Verbindungsstrecke zweier Punkte der Menge F liegen, so würde (ξ_h, η_h) in das von diesen beiden und dem Punkte (x_h, y_h) gebildete Dreieck fallen, also nach 4. gleichfalls auf der Verbindungsstrecke zweier Punkte der Menge F liegen. (ξ_1, η_1) liegt aber auf der Verbindungsstrecke zweier Punkte F, nämlich (x_0, y_0) und (x_1, y_1), also gilt dies auch von (ξ_2, η_2), (ξ_3, η_3) u. s. w. bis zu (ξ_{n-1}, η_{n-1}), und man kann setzen:

$$\frac{\varkappa_0\varphi(t_0)+\varkappa_1\varphi(t_1)+\cdots+\varkappa_{n-1}\varphi(t_{n-1})}{\varkappa_0 \quad +\varkappa_1 \quad +\cdots+\varkappa_{n-1}} = \lambda\varphi(t)+\bar{\lambda}\varphi(\bar{t}),$$

$$\frac{\varkappa_0\psi(t_0)+\varkappa_1\psi(t_1)+\cdots+\varkappa_{n-1}\psi(t_{n-1})}{\varkappa_0 \quad +\varkappa_1 \quad +\cdots+\varkappa_{n-1}} = \lambda\psi(t)+\bar{\lambda}\psi(\bar{t}),$$

wo

$$t_0 \leqq t \leqq \bar{t} \leqq T; \quad \lambda, \bar{\lambda} \geqq 0; \quad \lambda+\bar{\lambda}=1$$

ist. Die Gesammtheit aller Punkte mit Coordinaten wie

$$\lambda\varphi(t)+\bar{\lambda}\varphi(\bar{t}), \quad \lambda\psi(t)+\bar{\lambda}\psi(\bar{t}),$$

d. h. ausser den Punkten F alle Punkte der Verbindungsstrecken von Punkten F, bezeichnen wir mit $\bar{F}$.

6. Wir brauchen für das Folgende nur noch eine Eigenschaft der Punktmenge $\bar{F}$, dass nämlich alle Häufungsstellen von $\bar{F}$ selbst zu $\bar{F}$ gehören. Dies ergiebt sich auf ähnliche Weise wie 2. Ist nämlich (γ, δ) eine Häufungsstelle von $\bar{F}$, so hat die Function

$$[\gamma-\lambda\varphi(t)-\bar{\lambda}\varphi(\bar{t})]^2+[\delta-\lambda\psi(t)-\bar{\lambda}\psi(\bar{t})]^2$$

die untere Grenze Null. Sie ist aber eine stetige Function in dem durch die Ungleichungen $0 \leqq \lambda \leqq 1$, $t_0 \leqq t$, $\bar{t} \leqq T$ bestimmten Gebiete und nimmt daher wirklich den Werth Null an.

Nach diesen Vorbereitungen ergiebt sich der Beweis unseres Satzes sehr einfach.

Wegen der Stetigkeit von $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ ist es möglich, zwischen t_0 und T eine Einschaltung von Werthen $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ so vorzunehmen, dass die Schwankung der Functionen φ und ψ in den Theilintervallen kleiner als eine beliebig vorgegebene positive Grösse ε ist.

Dann ist aber:

$$\left|\int_{t_0}^{T}\varphi(t)dt-[(t_1-t_0)\varphi(t_0)+\cdots+(T-t_{n-1})\varphi(t_{n-1})]\right|<\varepsilon(T-t_0),$$

$$\left|\int_{t_0}^{T}\psi(t)dt-[(t_1-t_0)\psi(t_0)+\cdots+(T-t_{n-1})\psi(t_{n-1})]\right|<\varepsilon(T-t_0).$$

Denkt man sich $t_1-t_0=\tau_0$, $t_2-t_1=\tau_1$, ..., $T-t_{n-1}=\tau_{n-1}$ gesetzt, so ist unter Benutzung von 5.:

$$\frac{(t_1-t_0)\varphi(t_0)+\cdots+(T-t_{n-1})\varphi(t_{n-1})}{T-t_0}=\lambda\varphi(t)+\bar{\lambda}\varphi(\bar{t}),$$

$$\frac{(t_1-t_0)\psi(t_0)+\cdots+(T-t_{n-1})\psi(t_{n-1})}{T-t_0}=\lambda\psi(t)+\bar{\lambda}\psi(\bar{t}).$$

Die obigen Ungleichungen nehmen dann, durch $T-t_0$ dividirt, folgende Gestalt an:

$$\left|\frac{1}{T-t_0}\int_{t_0}^{T}\varphi(t)dt-[\lambda\varphi(t)+\bar{\lambda}\varphi(\bar{t})]\right|<\varepsilon,$$

$$\left|\frac{1}{T-t_0}\int_{t_0}^{T}\psi(t)dt-[\lambda\psi(t)+\bar{\lambda}\psi(\bar{t})]\right|<\varepsilon.$$

Da ε beliebig klein ist, so bedeutet dies, dass der Punkt mit den Coordinaten

$$\frac{1}{T-t_0}\int_{t_0}^{T}\varphi(t)dt,\quad\frac{1}{T-t_0}\int_{t_0}^{T}\psi(t)dt$$

eine Häufungsstelle von Punkten $\bar{F}$ ist. Daraus folgt nach 6., dass er selbst zu $\bar{F}$ gehört, d. h. es bestehen folgende Gleichungen (nach Multiplication mit $T-t_0$)

$$\int_{t_0}^{T}\varphi(t)dt=(T-t_0)[\lambda_1\varphi(t_1)+\lambda_2\varphi(t_2)],$$

$$\int_{t_0}^{T}\psi(t)dt=(T-t_0)[\lambda_1\psi(t_1)+\lambda_2\psi(t_2)],$$

wo

$$\lambda_1,\quad\lambda_2\geqq 0,\quad\lambda_1+\lambda_2=1\quad\text{und}\quad t_0\leqq t_1,\ t_2\leqq T$$

ist.

Durch Anwendung einer ganz entsprechenden Schlussweise würde man für drei Integrale erhalten:

$$\int_{t_0}^{T} \varphi(t)dt = (T-t_0)[\lambda_1\varphi(t_1)+\lambda_2\varphi(t_2)+\lambda_3\varphi(t_3)],$$

$$\int_{t_0}^{T} \psi(t)dt = (T-t_0)[\lambda_1\psi(t_1)+\lambda_2\psi(t_2)+\lambda_3\psi(t_3)],$$

$$\int_{t_0}^{T} \chi(t)dt = (T-t_0)[\lambda_1\chi(t_1)+\lambda_2\chi(t_2)+\lambda_3\chi(t_3)],$$

wo

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \geqq 0, \quad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 1 \quad \text{und} \quad t_0 \leqq t_1,\ t_2,\ t_3 \leqq T$$

ist.

Ueberhaupt gilt, wenn $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ in dem Intervalle $(t_0 \ldots T)$ mit Einschluss der Grenzen stetig sind, eine simultane Darstellung der Integrale $\int_{t_0}^{T} \varphi_h(t)dt$ von folgender Art:

$$\int_{t_0}^{T} \varphi_h(t)dt = (T-t_0)[\lambda_1\varphi_h(t_1)+\lambda_2\varphi_h(t_2)+\cdots+\lambda_n\varphi_h(t_n)], \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

wo wieder

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n \geqq 0, \quad \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = 1, \quad t_0 \leqq t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n \leqq T$$

ist.

Ueber die Beschaffenheit der Differentialgleichungen der n Adjungirten, die zu einer linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung gehören.

(Von Herrn *E. Grünfeld* in Nikolsburg.)

1.

Dass die Coefficienten der zu der linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung:

$$(1.) \qquad P(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0$$

gehörigen *Lagrange*schen Multiplicatorgleichung

$$(2.) \qquad P_1(z) = \frac{d^n z}{dx^n} - \frac{d^{n-1}(p_1 z)}{dx^{n-1}} + \cdots + (-1)^n p_n z = 0$$

oder, was dasselbe ist, der Differentialgleichung ihrer $n$ten Adjungirten, in jedem Falle Functionen derselben Beschaffenheit wie die Coefficienten $p_1, \ldots, p_n$ der Differentialgleichung (1.) selbst sind, ist unmittelbar ersichtlich. Dass dasselbe dann aber auch von den Coefficienten der Differentialgleichungen der übrigen $n-1$ Adjungirten, die zur Differentialgleichung (1.) gehören, gilt, geht daraus hervor, dass diese aus den folgenden zwei Gleichungen:

$$(3.) \quad \begin{cases} u_{(k)} = p_{n-k} z - \dfrac{d}{dx}(p_{n-k-1} z) + \cdots + (-1)^{n-k} \dfrac{d^{n-k} z}{dx^{n-k}}, \\ \dfrac{d^k u_{(k)}}{dx^k} = \dfrac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(p_{n-k+1} z) - \dfrac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}(p_{n-k+2} z) + \cdots + (-1)^{k-1}(p_n z), \end{cases}$$

in denen $u_{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ die $k$te Adjungirte bedeutet, durch Elimination von z, welches die Lösung von (2.) und mit $u_{(n)}$ identisch ist, hergeleitet werden (dieses Journal Bd. 115, S. 329).

Die beiden Gleichungen (3.) lassen sich übrigens durch das folgende System von Gleichungen ersetzen: (vgl. *J. Cels*, Annales de l'École Nor-

male, 1891)

$$(4.)\qquad \begin{cases} \dfrac{du_{(1)}}{dx} = p_n z, \\ \dfrac{du_{(2)}}{dx} = p_{n-1} z - u_{(1)}, \\ \dfrac{du_{(3)}}{dx} = p_{n-2} z - u_{(2)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{du_{(n)}}{dx} = p_1 z - u_{n-1}, \end{cases} \qquad (u_{(n)} = z)$$

welche wie folgt abgeleitet werden: für $k = 1$ ist nämlich die erste der Gleichungen (3.):

$$(5.)\quad u_{(1)} = p_{n-1} z - \frac{d}{dx}(p_{n-2} z) + \frac{d^2}{dx^2}(p_{n-3} z) - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}},$$

daher:

$$\frac{du_{(1)}}{dx} = \frac{d}{dx}(p_{n-1} z) - \frac{d^2}{dx^2}(p_{n-2} z) + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{d^n z}{dx^n},$$

welch letzterer Differentialausdruck aber zufolge (2.) identisch ist mit $p_n z$, womit die erste der Gleichungen (4.) hergeleitet ist. Für $k = 2$ ist die erste der Gleichungen (3.):

$$(5'.)\qquad u_{(2)} = p_{n-2} z - \frac{d}{dx}(p_{n-3} z) + \cdots + (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}},$$

daher:

$$\frac{du_{(2)}}{dx} = \frac{d}{dx}(p_{n-2} z) - \frac{d^2}{dx^2}(p_{n-3} z) + \cdots + (-1)^{n-2} \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}},$$

dieser letztere Differentialausdruck aber ist, wie aus (5.) hervorgeht, identisch mit $p_{n-1} z - u_{(1)}$, womit die zweite der Gleichungen (4.) abgeleitet ist. Setzt man ferner in der ersten der Gleichungen (3.) $k = 3$ und differentiirt, so ergiebt sich mittelst (5'.) die dritte der Gleichungen (4.) u. s. w.

Die Gleichungen (4.) lassen in gleicher Weise erkennen, dass die Adjungirten $u_{(1)}, u_{(2)}, \ldots, u_{(n-1)}$ Functionen derselben Beschaffenheit, wie die $n$te Adjungirte $z = u_{(n)}$ sind und dass daher auch die Differentialgleichungen derselben so beschaffen sein müssen, wie die Differentialgleichung (2.), welcher z genügt, also auch wie die Differentialgleichung (1.) selbst.

Wenn insbesondere die Coefficienten der letzteren Gleichung $p_1, \ldots, p_n$ rationale Functionen von x sind, so sind es auch die Coefficienten der

Differentialgleichungen der n Adjungirten, und ein singulärer Punkt der p_i ist auch ein solcher für die letzteren Coefficienten.

Hat die Differentialgleichung (1.) in der Umgebung eines singulären Punktes, wofür der Einfachheit halber der Nullpunkt angenommen werde, die Gestalt:

$$(6.)\qquad \frac{d^n y}{dx^n}+\frac{p_1(x)}{x}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\frac{p_2(x)}{x^2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+\frac{p_n(x)}{x^n}y=0,$$

wo die $p_i(x)$ in der Umgebung von $x=0$ eindeutig und stetig sind, und ist

$$(7.)\qquad r(r-1)\ldots(r-n+1)+p_1(0)r(r-1)\ldots(r-n+2)+\cdots+p_{n-1}(0)r+p_n(0)=0$$

die auf diesen Punkt bezügliche determinirende Fundamentalgleichung, so hat bekanntlich die Differentialgleichung (2.) dieselbe Gestalt:

$$(8.)\qquad \frac{d^n z}{dx^n}+\frac{q_1(x)}{x}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\cdots+\frac{q_n(x)}{x^n}z=0,$$

wo die $q_i(x)$ von derselben Beschaffenheit wie die $p_i(x)$ sind, und zwischen den Wurzeln ihrer auf den Punkt $x=0$ bezüglichen determinirenden Fundamentalgleichung:

$$(9.)\qquad \varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-n+1)+q_1(0)\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-n+2)+\cdots+q_{n-1}(0)\varrho+q_n(0)=0$$

und den Wurzeln der Gleichung (7.) findet die Beziehung statt:

$$(10.)\qquad \varrho=-r+n-1$$

(*Thomé*, d. J. Bd. 76, S. 284, vgl. auch *Fuchs*, d. J. Bd. 76, S. 180 und *Frobenius*, d. J. Bd. 80, S. 320).

Aus den Gleichungen (4.), die mit Weglassung der ersten auch so geschrieben werden können:

$$(4'.)\qquad \begin{cases} u_{(n-1)} = p_1 z-\dfrac{dz}{dx}, \\ u_{(n-2)} = p_2 z-\dfrac{du_{(n-1)}}{dx}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{(2)} = p_{n-2} z-\dfrac{du_{(3)}}{dx}, \\ u_{(1)} = p_{n-1} z-\dfrac{du_{(2)}}{dx} \end{cases}$$

folgt nach den von Herrn *Fuchs* herrührenden Sätzen über die „wie F beschaffenen Functionen“ (d. J. Bd. 66, S. 155), dass, wenn z, die $n$te Adjungirte, in der Umgebung eines singulären Punktes, nach der Bezeichnung des Herrn *Thomé*, regulär ist (d. J. Bd. 75, S. 266), die zugehörigen anderen

$n-1$ Adjungirten gleichfalls reguläre Integrale ihrer Differentialgleichungen sind, so zwar, dass, wenn z zum Exponenten ϱ gehört, die Adjungirten

$$u_{(n-1)}, \quad u_{(n-2)}, \quad \ldots, \quad u_{(2)}, \quad u_{(1)}$$

beziehungsweise zu den Exponenten

$$(11.) \qquad \varrho-1, \quad \varrho-2, \quad \ldots, \quad \varrho-n+2, \quad \varrho-n+1$$

gehören.

Ist daher die Differentialgleichung (1.) von der Form (6.), die in der Umgebung von $x=0$ nur reguläre Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_n$ besitzt, welche zu den Wurzeln $r_1, r_2, \ldots, r_n$ der Gleichung (7.) als Exponenten gehören, so ist die Differentialgleichung, welcher z genügt, diejenige in (8.), welche gleichfalls nur reguläre Integrale $z_1, z_2, \ldots, z_n$ besitzt, die zu den Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ der Gleichung (9.) als Exponenten gehören, zufolge (10.) ist dann:

$$(10'.) \qquad \varrho_i = -r_i+n-1. \qquad (i=1, \ldots, n)$$

Alsdann sind die sämmtlichen Integrale einer jeden der übrigen $n-1$ adjungirten Differentialgleichungen ebenfalls regulär, so zwar dass, weil zufolge (10'.) die Zahlen in (11.) sich verwandeln in

$$-r_i+n-2, \quad -r_i+n-3, \quad \ldots, \quad -r_i+1, \quad -r_i,$$

die Integrale der ersten Adjungirten zu den Exponenten $-r_i$, diejenigen der zweiten Adjungirten zu den Exponenten $-r_i+1$, diejenigen der dritten zu den Exponenten $-r_i+2$, u. s. w., schliesslich diejenigen der $(n-1)$-ten zu den Exponenten $-r_i+n-2$ gehören. Zwischen den Wurzeln s_i der determinirenden Fundamentalgleichung, die zur Differentialgleichung der $k$ten Adjungirten gehört, und den Wurzeln r_i der zur Differentialgleichung (6.) gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung (7.) findet daher die Beziehung statt:

$$(12.) \qquad s_i = -r_i+k-1, \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

woraus auch umgekehrt folgt:

$$r_i = -s_i+k-1.$$

So ist z. B. für die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{p_1(x)}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{p_2(x)}{x^2}y = 0$$

mit der determinirenden Fundamentalgleichung:

$$(13.) \quad r(r-1)+p_1(0)r+p_2(0) = r^2-(1-p_1(0))r+p_2(0) = 0$$

die Differentialgleichung der ersten Adjungirten (dieses Journal Bd. 115):

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{x^2}{p_2(x)}u'\Big)-\Big(x\frac{p_1(x)}{p_2(x)}u'\Big)+u$$
$$=\frac{d^2u}{dx^2}+\Big(-\frac{p_2'(x)}{p_2(x)}+\frac{2-p_1(x)}{x}\Big)\frac{du}{dx}+\frac{p_2(x)}{x^2}u=0$$

mit der determinirenden Fundamentalgleichung:

$$s(s-1)+(2-p_1(0))s+p_2(0)=s^2+(1-p_1(0))s+p_2(0)=0,$$

welch letztere sich sofort in (13.) verwandelt, sobald $s=-r$ gesetzt wird.

Ferner ist die Differentialgleichung der zweiten Adjungirten:

$$\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{p_1(x)}{x}\frac{dz}{dx}+\frac{p_2(x)-p_1'(x)x+p_1(x)}{x^2}z=0$$

mit der determinirenden Fundamentalgleichung:

$$s(s-1)-p_1(0)s+p_2(0)+p_1(0)=s^2-(1+p_1(0))s+(p_1(0)+p_2(0))=0,$$

die in (13.) übergeht, wenn $s=-r+1$ gesetzt wird.

Für die Differentialgleichung dritter Ordnung.

$$\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{p_1(x)}{x}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{p_2(x)}{x^2}\frac{dy}{dx}+\frac{p_3(x)}{x^3}y=0 \tag{14.}$$

erhält man in gleicher Weise nach dem im 115. Bande d. J. angegebenen Verfahren die Differentialgleichungen der ersten, zweiten und dritten Adjungirten als beziehungsweise die folgenden:

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{d^3u_{(1)}}{dx^3}+\Big\{-2\frac{p_3'}{p_3}+\frac{6-p_1}{x}\Big\}\frac{d^2u_{(1)}}{dx^2}+\\&\Big\{\Big(\frac{1}{p_3}\Big)''+\frac{6\Big(\frac{1}{p_3}\Big)'-\Big(\frac{p_1}{p_3}\Big)'}{x}+\frac{6-2p_1+p_2}{x^2}\Big\}\frac{du_{(1)}}{dx}-\frac{p_3}{x^3}u_{(1)}=0,\end{aligned}\right. \tag{14'.}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{d^3u_{(2)}}{dx^3}-\Big\{\frac{p_1}{x}+\frac{d}{dx}\log\frac{p_1p_2-p_3-2p_2+p_2'x}{x^3}\Big\}\frac{d^2u_{(2)}}{dx^2}+\frac{p_2}{x^2}\frac{du_{(2)}}{dx}\\&\qquad-\Big\{\frac{p_3}{x^3}-2\Big(\frac{p_2}{x^2}\Big)'+\frac{p_2}{x^2}\frac{d}{dx}\log\frac{p_1p_2-p_3-2p_2+p_2'x}{x^3}\Big\}u_{(2)}=0,\\&\frac{d^3u_{(3)}}{dx^3}-\frac{p_1}{x}\frac{d^2u_{(3)}}{dx^2}+\frac{p_2-2p_1'x+2p_1}{x^2}\frac{du_{(3)}}{dx}\\&\qquad-\frac{x^2p_1''-2p_1'x+2p_1-p_2'x+2p_2+p_3}{x^3}u_{(3)}=0,\end{aligned}\right. \tag{14''.}$$

wo der Kürze wegen p_i anstatt $p_i(x)$ geschrieben wurde. Zu diesen Differentialgleichungen gehören beziehungsweise die determinirenden Fundamental-

gleichungen:

$$s^3-(p_1-3)s^2+(p_2-p_1+2)s-p_3 = 0,$$
$$s^3-p_1s^2+(p_1+p_2-1)s-(p_2+p_3) = 0,$$
$$s^3-(3+p_1)s^2+(2+3p_1+p_2)s-(2p_1+2p_2+p_3) = 0,$$

in denen p_i für $p_i(0)$ geschrieben wurde und die sich in die zur Differentialgleichung (14.) gehörige determinirende Fundamentalgleichung:

$$r^3+(p_1-3)r^2+(p_2-p_1+2)r+p_3 = 0$$

verwandeln, sobald in denselben beziehungsweise gesetzt wird:

$$s = -r,$$
$$s = -r+1,$$
$$s = -r+2.$$

2.

Wenn die allgemeine homogene lineare Differentialgleichung (1.) diejenige mit constanten Coefficienten, also von der Form ist:

$$(15.) \qquad P(y) = \frac{d^ny}{dx^n} + k_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + k_ny = 0$$

wo $k_1, \ldots, k_n$ constant sind, so fallen, von constanten Factoren abgesehen, die Differentialgleichungen ihrer n Adjungirten in eine einzige zusammen, und zwar hat diese die Gestalt:

$$(16.) \quad P_1(u) = \frac{d^nu}{dx^n} - k_1\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + k_2\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} - \cdots + (-1)^nk_nu = 0,$$

wie sich ohne weiteres ergiebt, wenn das zur Bildung dieser Differentialgleichungen angegebene Verfahren angewendet wird, (d. J. Bd. 115). Der Grund hiervon ist folgender:

Die Integrale der Differentialgleichung (15.) haben im allgemeinen die Form:

$$y_i = e^{r_ix}, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

wo $r_1, \ldots, r_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$(17.) \qquad r^n+k_1r^{n-1}+k_2r^{n-2}+\cdots+k_{n-1}r+k_n = 0$$

sind. Die Differentialgleichung (2.) der $n$ten Adjungirten von (1.) hat aber hier die Form:

$$(18.) \quad P_1(z) = \frac{d^nz}{dx^n} - k_1\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + k_2\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} - \cdots + (-1)^nk_nz = 0,$$

für welche also die Gleichung (17.) die folgende ist:

$$(17'.) \qquad r^n - k_1 r^{n-1} + k_2 r^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1} k_{n-1} r + (-1)^n k_n = 0,$$

und deren Integrale daher, da die Wurzeln von (17.') $-r_1, -r_2, \ldots, -r_n$ sind, die Form haben:

$$(19.) \qquad z_i = e^{-r_i x}. \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Aus den Gleichungen (4'.) ergiebt sich nunmehr, dass

$$u_{(n-1)} = k_1 z - \frac{dz}{dx} = k_1 e^{-rx} + r e^{-rx} = c_{n-1} e^{-rx},$$

$$u_{(n-2)} = k_2 z - \frac{du_{(n-1)}}{dx} = c_{n-2} e^{-rx}$$

u. s. w., wo $c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots$ Constanten sind, dass somit auch die $n-1$ übrigen Adjungirten, von constanten Factoren abgesehen, dieselbe Form (19.) haben, wie die $n$te Adjungirte und daher derselben Differentialgleichung (18.) genügen müssen, wie diese letztere.

Der erste Theil der Differentialgleichung (15.) lässt sich bekanntlich in der Form darstellen:

$$P(y) = e^{r_n x} \frac{d}{dx} e^{-(r_n - r_{n-1})x} \frac{d}{dx} e^{-(r_{n-1} - r_{n-2})x} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} e^{-(r_2 - r_1)x} \frac{d}{dx} e^{-r_1 x} y$$

(d. J. Bd. 98, S. 347), indem nämlich, wenn $y_1, \ldots, y_n$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (1.) bedeuten, der erste Theil derselben die Gestalt hat:

$$(1'.) \quad P(y) = \frac{D_n}{D_{n-1}} \frac{d}{dx} \frac{D_{n-1}^2}{D_n D_{n-2}} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} \frac{D_i^2}{D_{i+1} D_{i-1}} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} \frac{D_0}{D_1} y$$

(***Frobenius***, d. J. Bd. 77), wo $D_i = D(y_1, \ldots, y_i)$ und für die Differentialgleichung (15.), von einem constanten Factor abgesehen,

$$\frac{D_i^2}{D_{i+1} D_{i-1}} = e^{-(r_{i+1} - r_i)x}$$

ist. Und da ferner der erste Theil der Differentialgleichung (2.) der $n$ten Adjungirten in der Form darstellbar ist:

$$(2'.) \qquad P_1(z) = \frac{D_0}{D_1} \frac{d}{dx} \frac{D_1^2}{D_2 D_0} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} \frac{D_{n-1}^2}{D_n D_{n-2}} \frac{d}{dx} \frac{D_n}{D_{n-1}} z$$

(***Frobenius***, d. J. Bd. 77), so folgt, dass die gemeinsame Differentialgleichung (16.) oder (18.) der n zur Differentialgleichung (15.) gehörigen Adjungirten in der Form darstellbar ist:

$$P_1(u) = e^{-r_1 x} \frac{d}{dx} e^{-(r_2 - r_1)x} \frac{d}{dx} e^{-(r_3 - r_2)x} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} e^{-(r_n - r_{n-1})x} \frac{d}{dx} e^{r_n x} u = 0.$$

Wenn in der Differentialgleichung (15.) mit den constanten Coefficienten $k_1, \ldots, k_n$ die Substitution gemacht wird:

$$x = \log t, \tag{20.}$$

so verwandelt sich dieselbe bekanntlich in eine Differentialgleichung der Form:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \frac{h_1}{t}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \frac{h_2}{t^2}\frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} + \cdots + \frac{h_n}{t^n} y = 0, \tag{21.}$$

wo $h_1, h_2, \ldots, h_n$ gleichfalls constante Grössen sind. Durch dieselbe Substitution verwandelt sich die gemeinsame Differentialgleichung (18.) aller n Adjungirten in eine Differentialgleichung derselben Art wie (21.):

$$\frac{d^n z}{dt^n} + \frac{g_1}{t}\frac{d^{n-1}z}{dt^{n-1}} + \frac{g_2}{t^2}\frac{d^{n-2}z}{dt^{n-2}} + \cdots + \frac{g_n}{t^n} z = 0, \tag{22.}$$

wo also $g_1, \ldots, g_n$ ebenfalls constant sind. Diese letztere ist aber jetzt nicht mehr gemeinsame Differentialgleichung aller n zu (21.) gehörigen Adjungirten, sondern nur die Differentialgleichung der ersten Adjungirten allein. Denn durch die Substitution (20.) verwandeln sich die Integrale der Gleichung (15.) in:

$$y_i = e^{r_i x} = e^{r_i \log t} = t^{r_i}, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

d. h. die Gleichung (17.) wird die determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (21.), und die Integrale der Differentialgleichung (18.) verwandeln sich in:

$$z_i = e^{-r_i x} = t^{-r_i}, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

d. h. die Gleichung (17.′) wird die determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (22.), letztere ist daher in der That nur die Differentialgleichung der ersten Adjungirten von (21.), da gemäss der Formel (12.) nur für diese der Satz gilt, dass die Wurzeln ihrer determinirenden Fundamentalgleichung entgegengesetzt gleich sind den Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung, die zur vorgelegten Differentialgleichung $P(y) = 0$ selbst gehört.

So verwandeln sich z. B., wenn $n = 3$ angenommen wird, die Differentialgleichung (15.):

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + k_1 \frac{d^2 y}{dx^2} + k_2 \frac{dy}{dx} + k_3 y = 0$$

durch die Substitution (20.) in:

$$(23.) \qquad \frac{d^3y}{dt^3}+\frac{3+k_1}{t}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1+k_1+k_2}{t^2}\frac{dy}{dt}+\frac{k_3}{t^3}y = 0$$

mit der determinirenden Fundamentalgleichung:

$$r(r-1)(r-2)+(3+k_1)r(r-1)+(1+k_1+k_2)r+k_3 = 0,$$

welche identisch ist mit:

$$(23'.) \qquad r^3+k_1r^2+k_2r+k_3 = 0,$$

und die Differentialgleichung (18.):

$$\frac{d^3z}{dx^3}-k_1\frac{d^2z}{dx^2}+k_2\frac{dz}{dx}-k_3z = 0$$

in:

$$(24.) \qquad \frac{d^3z}{dt^3}+\frac{3-k_1}{t}\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{1-k_1+k_2}{t^2}\frac{dz}{dt}-\frac{k_3}{t^3}z = 0$$

mit der determinirenden Fundamentalgleichung:

$$r(r-1)(r-2)+(3-k_1)r(r-1)+(1-k_1+k_2)r-k_3 = 0,$$

die identisch ist mit:

$$r^3-k_1r^2+k_2r-k_3 = 0.$$

Es ist also (24.) die Differentialgleichung der ersten Adjungirten von (23.), wie auch unmittelbar aus den Gleichungen (14.) und (14'.) abgeleitet werden kann. Die Differentialgleichungen der 2ten und 3ten zu (23.) gehörigen Adjungirten hingegen lauten beziehungsweise:

$$\frac{d^3u_{(2)}}{dt^3}-\frac{k_1}{t}\frac{d^2u_{(2)}}{dt^2}+\frac{1+k_1+k_2}{t^2}\frac{du_{(2)}}{dt}-\frac{1+k_1+k_2+k_3}{t^3}u_{(2)} = 0$$

und:

$$\frac{d^3u_{(3)}}{dt^3}-\frac{3+k_1}{t}\frac{d^2u_{(3)}}{dt^2}+\frac{7+3k_1+k_2}{t^2}\frac{du_{(3)}}{dt}-\frac{8+4k_1+2k_2+k_3}{t^3}u_{(3)} = 0,$$

wie aus (14.) und (14''.) erhalten wird, und zu diesen gehören die determinirenden Fundamentalgleichungen beziehungsweise:

$$s^3-(3+k_1)s^2+(3+2k_1+k_2)s-(1+k_1+k_2+k_3) = 0$$

und:

$$s^3-(6+k_1)s^2+(12+4k_1+k_2)s-(8+4k_1+2k_2+k_3) = 0,$$

die sich in die Gleichung (23'.) verwandeln, wenn beziehungsweise gesetzt wird $s = -r+1$ und $s = -r+2$.

3.

Die Differentialgleichung

$$(25.)\qquad P(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{k_1}{x}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{k_2}{x^2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + k_n y = 0,$$

in der $k_1, \ldots, k_n$ constant sind, zu der die determinirende Fundamentalgleichung

$$(26.)\quad r(r-1)\ldots(r-n+1) + k_1 r(r-1)\ldots(r-n+2) + \cdots + k_{n-1} r + k_n = 0$$

gehört, lässt sich bekanntlich in der Form darstellen:

$$(25'.)\quad \begin{cases} P(y) = x^{r_n-n+1}\frac{d}{dx}x^{-(r_n-r_{n-1}-1)}\frac{d}{dx}x^{-(r_{n-1}-r_{n-2}-1)}\frac{d}{dx}\cdots \\ \qquad\qquad \cdots\frac{d}{dx}x^{-(r_2-r_1-1)}\frac{d}{dx}x^{-r_1}y = 0 \end{cases}$$

(d. J. Bd. 98, S. 348), wo $r_1, \ldots, r_n$ die Wurzeln der Gleichung (26.) sind, wie sich ergiebt, wenn in Gleichung (1′.)

$$(26.)\qquad D_i = x^{r_1+r_2+\cdots+r_n-\frac{i(i-2)}{2}}\cdot\Delta_i \qquad (i=1,\ldots,n)$$

gesetzt wird, wo

$$(27.)\quad \Delta_i = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & \ldots & r_i \\ r_1(r_1-1) & \ldots & r_i(r_i-1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1(r_1-1)\ldots(r_1-i+2) & \ldots & r_i(r_i-1)\ldots(r_i-i+2) \end{vmatrix}$$

ist.

Setzt man die Ausdrücke (26.) in Gleichung (2′.), so erhält man für die Differentialgleichung der zu (25.) gehörigen $n$ten Adjungirten die mit (25′.) analoge Darstellung:

$$(25''.)\quad \begin{cases} P_1(z) = x^{-r_1}\frac{d}{dx}x^{-(r_2-r_1-1)}\frac{d}{dx}x^{-(r_3-r_2-1)}\frac{d}{dx}\cdots \\ \qquad\qquad \cdots\frac{d}{dx}x^{-(r_n-r_{n-1}-1)}\frac{d}{dx}x^{r_n-n+1}z = 0. \end{cases}$$

Es lässt sich ferner die Differentialgleichung der zu (1.) gehörigen ersten Adjungirten in der Form darstellen:

$$Q(u_{(1)}) = \frac{D(y_1', \ldots, y_n')}{D(y_1, \ldots, y_n)D(y_n')}\frac{d}{dx}\frac{D(y_n')^2}{D(y_{n-1}', y_n')}\frac{d}{dx}\frac{D(y_{n-1}', y_n')^2}{D(y_n')D(y_{n-2}', y_{n-1}', y_n')}\frac{d}{dx}\cdots$$
$$\cdots\frac{d}{dx}\frac{D(y_{i+1}', y_{i+2}', \ldots, y_n')^2}{D(y_{i+2}', \ldots, y_n')D(y_i', \ldots, y_n')}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}\frac{D(y_1, \ldots, y_n)}{D(y_2', \ldots, y_n')}u_{(1)} = 0$$

(d. J. Bd. 115). Setzt man hierin für $D(y_1, \ldots, y_n)$ seinen aus (26.) für $i = n$ hervorgehenden Werth und für die übrigen hier vorkommenden Determinanten ihre Werthe aus der Formel

$$D(y_i', y_{i+1}', \ldots, y_n') = x^{r_i + r_{i+1} + \cdots + r_n - \frac{1}{2}(n-i+1)(n-i+2)} \cdot \Delta_i', \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

wo Δ_i' eine ähnlich wie Δ_i beschaffene, nur von den $r_i, \ldots, r_n$ abhängende Determinante bezeichnet, so ergiebt sich für die Differentialgleichung der zu (25.) gehörigen ersten Adjungirten die mit (25′.) und (25″.) analoge Darstellung:

$$(28.) \quad \left\{ \begin{aligned} Q(u_{(1)}) = x^{-r_n - n + 1} \frac{d}{dx} x^{r_n - r_{n-1} + 1} \frac{d}{dx} x^{r_{n-1} - r_{n-2} + 1} \frac{d}{dx} \cdots \\ \cdots \frac{d}{dx} x^{r_2 - r_1 + 1} \frac{d}{dx} x^{r_1} u_{(1)} = 0. \end{aligned} \right.$$

Wie man sieht, geht der letzte Differentialausdruck (28.) aus demjenigen in (25′.) unmittelbar hervor, sobald daselbst $r_1, \ldots, r_n$ mit entgegengesetzten Zeichen genommen werden, womit abermals bewiesen ist, dass die determinirenden Fundamentalgleichungen, die zur Differentialgleichung (25.) und der Differentialgleichung ihrer ersten Adjungirten gehören, entgegengesetzt gleiche Wurzeln haben. Ganz dasselbe gilt dann aber auch für die determinirenden Fundamentalgleichungen, welche zu der allgemeineren Differentialgleichung (6.) und der Differentialgleichung ihrer ersten Adjungirten gehören, da die determinirende Fundamentalgleichung (7.), die zu (6.) gehört, identisch ist mit der determinirenden Fundamentalgleichung (26.) die zur Differentialgleichung (25.) gehört, sobald in letzterer statt $k_1, k_2, \ldots, k_n$ beziehungsweise $p_1(0), p_2(0), \ldots, p_n(0)$ geschrieben wird.

Ist so unabhängig von den übrigen Adjungirten für die erste Adjungirte der Satz bewiesen, dass die zu ihrer Differentialgleichung gehörige determinirende Fundamentalgleichung die Wurzeln $-r_1, -r_2, \ldots, -r_n$ besitzt, wenn $r_1, r_2, \ldots, r_n$ die Wurzeln der Gleichung (7.) sind, so kann man mit Hülfe des Gleichungssystems (4.) wieder umgekehrt, wie in Nr. 1 zeigen, dass die Integrale der Differentialgleichungen der 2ten, 3ten, …, $n$ten Adjungirten beziehungsweise zu den Exponenten

$$-r_i + 1, \quad -r_i + 2, \quad \ldots, \quad -r_i + n - 1 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

gehören.

Die Differentialgleichungen der zu (25.) gehörigen $n$ten und 1ten Adjungirten sind in (25″.) beziehungsweise (28.), analog wie die Differentialgleichung (25.) in (25′.), in der Form eines symbolischen Productes dargestellt. Eine solche symbolische Darstellung lässt sich übrigens in einer für die Differentialgleichungen aller zu (25.) gehörigen Adjungirten gemeinsamen Form auf folgende Weise ableiten:

Bezeichnet nämlich $Q_k(u_{(k)})$ den ersten Theil der Differentialgleichung der zu (25.) gehörigen $k$ten Adjungirten ($k = 1, 2, \ldots, n$), so sind, wie aus den Gleichungen (4.) hervorgeht:

$$(29.)\quad u_{(k)_1} = x^{-r_1+k-1}, \quad u_{(k)_2} = x^{-r_2+k-1}, \quad \ldots, \quad u_{(k)_n} = x^{-r_n+k-1}$$

die Integrale von $Q_k(u_{(k)}) = 0$, da nämlich gemäss (25″.):

$$z_1 = x^{-r_1+n-1}, \quad z_2 = x^{-r_2+n-1}, \quad \ldots, \quad z_n = x^{-r_n+n-1}$$

die Integrale von $P_1(z) = 0$ sind. Andererseits lässt sich $Q_k(u_{(k)})$ in der symbolischen Form der Gleichung (1′.) schreiben, sobald daselbst $u_{(k)_1}, u_{(k)_2}, \ldots, u_{(k)_n}$ an Stelle von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ gesetzt werden, so dass also:

$$(30.)\quad Q_k(u_{(k)}) = \frac{D_n}{D_{n-1}} \frac{d}{dx} \frac{D_{n-1}^2}{D_n D_{n-2}} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} \frac{D_i^2}{D_{i+1} D_{i-1}} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} \frac{D_1^2}{D_2 D_0} \frac{d}{dx} \frac{D_0}{D_1} u_{(k)}$$

ist, wo aber jetzt

$$D_i = D(u_{(k)_1}, \quad u_{(k)_2}, \quad \ldots, \quad u_{(k)_i}) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

ist.

Nun ist mit Berücksichtigung der Werthe in (29.)

$$D_i = x^{-(r_1+r_2+\cdots+r_i)+\frac{i}{2}[2k-(i+1)]} . d_i,$$

wo d_i eine ähnlich wie früher Δ_i in (27.) beschaffene, von x unabhängige Determinante bedeutet, daher nimmt der Differentialausdruck (30.) die Form an:

$$Q_k(u_k) = x^{-r_n+k-n} \frac{d}{dx} x^{r_n-r_{n-1}+1} \frac{d}{dx} x^{r_{n-1}-r_{n-2}+1} \frac{d}{dx} \cdots$$

$$\cdots \frac{d}{dx} x^{r_2-r_1+1} \frac{d}{dx} x^{r_1-k+1} u_{(k)}$$

als die erwähnte symbolische Darstellung der ersten Theile der Differentialgleichungen aller n zu (25.) gehörigen Adjungirten.

Für $k=1$ geht dieselbe unmittelbar in die Darstellung (28.) der Differentialgleichung der 1ten Adjungirten über und für $k=n$ in diejenige (25″.) der Differentialgleichung der $n$ten Adjungirten, wenn daselbst $r_1, r_2, \ldots, r_n$ statt $r_n, r_{n-1}, \ldots, r_1$ gesetzt werden.

4.

Zu einem jeden Systeme von n homogenen linearen Differentialgleichungen 1ter Ordnung:

$$\frac{du_i}{dx} = a_{1i}u_1 + a_{2i}u_2 + \cdots + a_{ni}u_n \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{31.}$$

giebt es, wie *Jacobi* zuerst gezeigt hat (d. J. Bd. 29), ein zweites ebensolches System, welches die Form hat:

$$\frac{dw_i}{dx} = -a_{i1}w_1 - a_{i2}w_2 - \cdots - a_{in}w_n \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{32.}$$

und als das dem ersten System adjungirte bezeichnet wird.

Wenn für das Gleichungssystem (31.) das folgende genommen wird:

$$\frac{dy_{i-1}}{dx} = y_i, \qquad (i=1,\ldots,n-1,\ y_0=y)$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = -p_n y - p_{n-1}y_1 - \cdots - p_1 y_{n-1},$$

durch welches bekanntlich die Differentialgleichung (1.) ersetzt werden kann, so ergiebt sich für das adjungirte System (32.) das folgende:

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dx} = p_n u_n, \\ \dfrac{du_k}{dx} = u_{k-1} + p_{n-k+1}u_n, & (k=2,\ldots,n) \end{cases} \tag{33.}$$

dieses letztere aber ist kein anderes, als das System der Gleichungen (4.), das in No. 1 abgeleitet wurde (vgl. *Cels*, Annales de l'École Normale, 1891).

Stellen die n^2 Grössen:

$$u_{1i},\quad u_{2i},\quad \ldots,\quad u_{ni}, \qquad (i=1,\ldots,n)$$

wo der erste Index die Unbekannte bezeichnet, n Lösungen des Gleichungs-

systems (31.) vor, so wird bekanntlich

$$(34.) \qquad D(u) = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{21} & \cdots & u_{n1} \\ u_{12} & u_{22} & \cdots & u_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{nn} \end{vmatrix}$$

die Determinante dieser Lösungen genannt, welche von Null verschieden ist oder nicht, je nachdem diese Lösungen ein Fundamentalsystem bilden oder nicht (s. *Sauvage,* Annales de l'École Normale, 1882).

Es ist nun interessant zu bemerken, dass, wenn man die vorstehende Determinante $D(u)$ für das mit (4.) identische Gleichungssystem (33.) bildet, dieselbe mit der Determinante

$$D(z_1 \ldots z_n) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ z_1' & z_2' & \cdots & z_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_1^{(n-1)} & z_2^{(n-1)} & \cdots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

identisch ist, wo, wie früher $z = u_{(n)}$ die $n$te Adjungirte von (1.) bedeutet. Dies hat darin seinen Grund, dass, wenn z_i ein Werth von z ist, der zugehörige Werth $u_{(k)_i}$ der $k$ten Adjungirten vermöge der ersten der Gleichungen (3.) durch den Ausdruck gegeben ist:

$$(35.) \qquad u_{(k)_i} = p_{n-k} z_i - \frac{d}{dx}(p_{n-k-1} z_i) + \cdots + (-1)^{n-k} \frac{d^{n-k} z_i}{dx^{n-k}} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

und dass, wenn diese Ausdrücke (35.) in die Determinante (34.) $D(u)$, wo jetzt $u_{ki} = u_{(k)_i}$ zu schreiben ist, gesetzt werden, dieselbe in ein Product zweier Determinanten zerfällt, deren eine $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D(z_1, \ldots, z_n)$ ist und deren andere nur aus den Coefficienten p_i und deren Ableitungen gebildet ist und die sich immer auf $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ reducirt.

So ist für $n = 2$

$$D(u) = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 z_1 - z_1' & z_1 \\ p_1 z_2 - z_2' & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1' & z_1 \\ z_2' & z_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & p_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

welch letzteres Product sich auf die Determinante:

$$D(z_1, z_2) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{vmatrix}$$

reducirt.

Für $n = 3$ ist:

$$D(u) = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_2 z_1 - \frac{d}{dx}(p_1 z_1) + z_1'' & p_1 z_1 - z_1' & z_1 \\ p_2 z_2 - \frac{d}{dx}(p_1 z_2) + z_2'' & p_1 z_2 - z_2' & z_2 \\ p_2 z_3 - \frac{d}{dx}(p_1 z_3) + z_3'' & p_1 z_3 - z_3' & z_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (p_2 - p_1')z_1 - p_1 z_1' + z_1'' & p_1 z_1 - z_1' & z_1 \\ (p_2 - p_1')z_2 - p_1 z_2' + z_2'' & p_1 z_2 - z_2' & z_2 \\ (p_2 - p_1')z_3 - p_1 z_3' + z_3'' & p_1 z_3 - z_3' & z_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} z_1'' & z_1' & z_1 \\ z_2'' & z_2' & z_2 \\ z_3'' & z_3' & z_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -p_1 & p_2 - p_1' \\ 0 & -1 & p_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_1' & z_2' & z_3' \\ z_1'' & z_2'' & z_3'' \end{vmatrix} \cdot (-1)$$

demnach wieder

$$D(u) = D(z_1, z_2, z_3).$$

Für $n = 4$ ist ebenso

$$D(u) = \begin{vmatrix} z_1''' & z_1'' & z_1' & z_1 \\ z_2''' & z_2'' & z_2' & z_2 \\ z_3''' & z_3'' & z_3' & z_3 \\ z_4''' & z_4'' & z_4' & z_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & p_1 & -p_2 + 2p_1' & p_3 - p_2' + p_1'' \\ 0 & 1 & -p_1 & p_2 - p_1' \\ 0 & 0 & -1 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

die erste der vorstehenden Determinanten ist gleich

$$(-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_1' & z_2' & z_3' & z_4' \\ z_1'' & z_2'' & z_3'' & z_4'' \\ z_1''' & z_2''' & z_3''' & z_4''' \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot D(z_1, z_2, z_3, z_4),$$

die letztere gleich $(-1)^2$, daher wieder

$$D(u) = D(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

Ebenso ist allgemein, wenn man die Ausdrücke (35.) für $u_{(k)_i}$ durch Ausführung der angezeigten Differentiationen auf die Form bringt:

$$u_{(k)_i} = A_{0k} z_i + A_{1k} z_i' + A_{2k} z_i'' + \cdots + A_{n-k-1} z_i^{(n-k-1)} + (-1)^{n-k} z_i^{(n-k)}$$

und in dieser Form in die Determinante (34.)

$$D(u) = \begin{vmatrix} u_{(1)_1} & u_{(2)_1} & \dots & u_{(n)_1} \\ u_{(1)_2} & u_{(2)_2} & \dots & u_{(n)_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{(1)_n} & u_{(2)_n} & \dots & u_{(n)_n} \end{vmatrix}$$

substituirt, diese letztere gleich:

$$D(u) = \begin{vmatrix} z_1^{(n-1)} & z_1^{(n-2)} & \dots & z_1' & z_1 \\ z_2^{(n-1)} & z_2^{(n-2)} & \dots & z_2' & z_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n-1}^{(n-1)} & z_{n-1}^{(n-2)} & \dots & z_{n-1}' & z_{n-1} \\ z_n^{(n-1)} & z_n^{(n-2)} & \dots & z_n' & z_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (-1)^{n-1} & A_{n-2,1} & A_{n-3,1} & A_{n-4,1} & \dots & A_{11} & A_{01} \\ 0 & (-1)^{n-2} & A_{n-3,2} & A_{n-4,2} & \dots & A_{12} & A_{02} \\ 0 & 0 & (-1)^{n-3} & A_{n-4,3} & \dots & A_{13} & A_{03} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^1 & A_{0,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

die erste der hier stehenden Determinanten ist gleich

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} . D(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

und die zweite, die sich auf ihr Diagonalglied reducirt, gleich

$$(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}(-1)^{n-3}\dots(-1)^2(-1).1 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

daher wegen $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} . (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = 1$:

$$(36.) \qquad D(u) = D(z_1, z_2, \dots, z_n).$$

Zu einem Systeme von n particulären Integralen: $y_1, y_2, \dots, y_n$ der Differentialgleichung (1.), welche linear unabhängig von einander sind, gehört, wie Herr *Frobenius* gezeigt hat (d. J. Bd. 77) ein System von n particulären Integraten: $z_1, z_2, \dots, z_n$ der Differentialgleichung (2.), welche gleichfalls von einander linear unabhängig sind, indem, wenn die Determinante $D(y_1, y_2, \dots, y_n)$ von Null verschieden ist, auch die Determinante $D(z_1, z_2, \dots, z_n)$ nicht verschwindet: Aus der Gleichung (36.) folgt nunmehr, dass in diesem Falle auch die Determinante $D(u)$ nicht gleich Null ist, dass somit das Lösungssystem der Gleichungen (33.):

$$u_{(1)_i}, \quad u_{(2)_i}, \quad \dots, \quad u_{(n)_i}, \qquad (i = 1, \dots, n)$$

welches einem Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (1.) zugehört, ebenfalls ein Fundamentalsystem repräsentirt, d. h. dass zwischen

den Elementen desselben die folgenden n Beziehungen:

$$(37.)\qquad \begin{cases} c_1 u_{(1)_1} + c_2 u_{(1)_2} + \cdots + c_n u_{(1)_n} = 0, \\ c_1 u_{(2)_1} + c_2 u_{(2)_2} + \cdots + c_n u_{(2)_n} = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ c_1 u_{(n)_1} + c_2 u_{(n)_2} + \cdots + c_n u_{(n)_n} = 0 \end{cases}$$

nicht stattfinden können, ohne dass die Constanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sämmtlich gleich Null wären.

Wie Herr ***Sauvage*** a. a. O. gezeigt hat, ist die Bedingung dafür, dass ein System von n Lösungen $u_{1i}, u_{2i}, \ldots, u_{ni}$ $(i = 1, \ldots, n)$ des Differentialgleichungssystems (31.) ein Fundamentalsystem sei, wohl die, dass zwischen den Elementen desselben das System von Beziehungen:

$$(38.)\qquad c_1 u_{i1} + c_2 u_{i2} + \cdots + c_n u_{in} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

mit den von Null verschiedenen Constanten $c_1, \ldots, c_n$ nicht stattfinden darf, doch kann eine dieser Beziehungen einzeln bestehen. Demnach wäre es möglich, dass, wenn auch $y_1, \ldots, y_n$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (1.) sind, eine der Beziehungen (37.) für sich bestünde; dass dies aber nicht möglich ist, geht aus den Gleichungen (4.) auf folgende Weise hervor: Denn wenn $y_1, \ldots, y_n$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (1.) und $z_1, \ldots, z_n$ das zugehörige Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (2.) ist, so muss zunächst auch das zugehörige System $u_{(1)_1}, u_{(1)_2}, \ldots, u_{(1)_n}$ von Integralen der Differentialgleichung der ersten Adjungirten ein fundamentales sein, weil sonst zwischen diesen letzteren eine homogene lineare Beziehung mit von Null verschiedenen Constanten:

$$c_1 u_{(1)_1} + c_2 u_{(1)_2} + \cdots + c_n u_{(1)_n} = 0$$

stattfinden würde. Aus dieser letzteren aber geht durch Differentiation und nachherige Division durch p_n die Gleichung hervor:

$$c_1 \frac{1}{p_n} \frac{du_{(1)_1}}{dx} + c_2 \frac{1}{p_n} \frac{du_{(1)_2}}{dx} + \cdots + c_n \frac{1}{p_n} \frac{du_{(1)_n}}{dx} = 0$$

die der ersten der Gleichungen (4.) zufolge identisch ist mit der folgenden:

$$c_1 z_1 + c_2 z_2 + \cdots + c_n z_n = 0,$$

die aber mit der Annahme, dass $z_1, \ldots, z_n$ ein Fundamentalsystem ist, im Widerspruche steht.

Wenn ferner die n particulären Integrale $u_{(2)_1}, u_{(2)_2}, \ldots, u_{(2)_n}$ der Differentialgleichung der zweiten Adjungirten, die vermöge (35.) den $z_1, z_2, \ldots, z_n$ entsprechen, nicht fundamental wären, und demnach die Beziehung stattfände:

$$c_1 u_{(2)_1} + c_2 u_{(2)_2} + \cdots + c_n u_{(2)_n} = 0,$$

also auch:

$$c_1 \frac{du_{(2)_1}}{dx} + c_2 \frac{du_{(2)_2}}{dx} + \cdots + c_n \frac{du_{(2)_n}}{dx} = 0,$$

so würde mit Rücksicht auf die zweite der Gleichungen (4.) sich ergeben:

$$c_1(p_{n-1}z_1 - u_{(1)_1}) + c_2(p_{n-1}z_2 - u_{(1)_2}) + \cdots + c_n(p_{n-1}z_n - u_{(1)_n}) = 0$$

oder:

$$(c_1 z_1 + c_2 z_2 + \cdots + c_n z_n)p_{n-1} - (c_1 u_{(1)_1} + c_2 u_{(1)_2} + \cdots + c_n u_{(1)_n}) = 0;$$

diese letztere Gleichung aber kann, da weder $c_1 z_1 + \cdots + c_n z_n = 0$ noch $c_1 u_{(1)_1} + \cdots + c_n u_{(1)_n} = 0$ ist, in der Form geschrieben werden:

$$z p_{n-1} - u_{(1)} = 0.$$

Vermöge der zweiten der Gleichungen (4.) wäre aber dann $\frac{du_{(2)}}{dx} = 0$, demnach $u_{(2)}$ eine Constante, was unmöglich ist.

In derselben Weise wird mittelst der dritten, vierten, ... der Gleichungen (4.) bewiesen, dass auch

$$\begin{array}{cccc} u_{(3)_1}, & u_{(3)_2}, & \ldots, & u_{(3)_n}, \\ u_{(4)_1}, & u_{(4)_2}, & \ldots, & u_{(4)_n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung der dritten, vierten, ... Adjungirten bilden.

Hiermit ist bewiesen, dass wenn

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n$$

ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (1.) und

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_n$$

das zugehörige ebensolche System von Integralen der Differentialgleichung (2.) ist, die zugehörigen n Integrale einer jeden der übrigen $n-1$ adjungirten Differentialgleichungen

$$u_{(k)_1}, \quad u_{(k)_2}, \quad \ldots, \quad u_{(k)_n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

ebenfalls ein Fundamentalsystem bilden.

Nikolsburg, am 28. März 1896.

Theorie der Reflexion und Brechung transversaler Kugelwellen mit Anwendung auf die Reflexion und Brechung des Lichtes*).

(Von Herrn *Paul Jaerisch* in Hamburg.)

An der Grenze zweier elastischen Medien sind für die Reflexion und Brechung des Lichtes die folgenden drei Bedingungen zu erfüllen: 1) die Gleichheit der Componenten der Verrückungen, 2) die Gleichheit der Componenten der elastischen Druckkräfte, 3) das Gesetz der Erhaltung der lebendigen Kraft der bewegten Theilchen an beiden Seiten der trennenden Fläche.

Allen diesen Bedingungen konnte bisher durch transversale Lichtwellen allein *nicht* genügt werden. Daher wurden die obigen Grenzbedingungen theilweise durch andere ersetzt, wie in den Theorieen von *Fresnel* und *F. Neumann*, oder es wurden, wie von *Cauchy*, *Kirchhoff*, *v. d. Mühl* u. a., longitudinale Lichtschwingungen neben den transversalen zugelassen, von den ersteren aber wurde angenommen, dass sie nicht zur sichtbaren Wirkung gelangen.

Ich werde aber im Folgenden zeigen, dass allen genannten Bedingungen durch transversale Schwingungen allein genügt werden kann, wenn statt ebener Wellen, die bisher in die Rechnung eingeführt wurden, Kugelwellen zu Grunde gelegt werden. Es ergeben sich dabei die *Fresnel*schen Ausdrücke für die Amplituden der reflectirten Wellen, so wie die *F. Neumann*schen für die Amplituden der gebrochenen Wellen, während die *F. Neumann*sche Annahme der Gleichheit der Dichtigkeit des Aethers zu beiden Seiten der trennenden Fläche als Folge der genannten Bedingungen

*) Den ersten Theil der Resultate des Folgenden habe ich in der Programmarbeit No. 735 Hamburg 1893 veröffentlicht, welche ausserdem die Fortsetzung meiner Arbeit „Ueber die elastischen Schwingungen einer isotropen Kugel“ Bd. 88 dieses Journals enthält.

erscheint. Eine Phasenänderung findet in der trennenden Fläche für vollkommen durchsichtige Medien, auf welche ich mich beschränke, nicht statt.

Die Ausdrücke (61ª.) in Verbindung mit (63.) und (79.) durch welche im Folgenden die einfallende, reflectirte und gebrochene Kugelwelle dargestellt werden, sind ebenso einfach und bis auf den Factor $\frac{1}{r}$ identisch mit denjenigen, welche für ebene Wellen gelten. Die Amplitude erscheint also hier umgekehrt proportional der Entfernung vom Erschütterungscentrum, und daher wird die Intensität umgekehrt proportional dem Quadrate dieser Entfernung.

Ausser diesen einfachsten Formeln für die Kugelschwingungen in den drei Wellen ergeben sich noch andere ähnlich einfache. Darstellungen, bei welchen die Amplitude umgekehrt proportional einer höheren Potenz der Entfernung ist.

Bei jeder Wellenbewegung, welche man sich wie die Lichtbewegung von einem Centrum ausgehend denken muss, ist die Darstellung des Bewegungsvorganges durch ebene Wellen etwas Erzwungenes, die Darstellung durch Kugelwellen resp. bei nicht homogenen Medien durch andere centrale Flächenwellen das Naturgemässe. Denn es müssen bei jeder centralen Wellenbewegung die Amplituden mit der Entfernung vom Erschütterungscentrum abnehmen, also inverse Functionen der Entfernung sein, während sie bei ebenen Wellen constante Werthe haben. Es ist aber nicht möglich, Lösungen der Elasticitätsgleichungen in ebenen Coordinaten in endlicher Form aufzufinden, bei welchen die Amplituden umgekehrt proportional einer Potenz der Entfernung erhalten werden. Daher ist es nicht statthaft, eine centrale Welle durch drei ebene Wellen zu ersetzen. Somit verdienen die im Folgenden gegebenen Formeln für die einfallende, reflectirte und gebrochene Lichtwelle als naturgemässer Ausdruck für den vorgestellten Bewegungsvorgang den Vorzug vor den bisher für ebene Schwingungen aufgestellten Ausdrücken, auch abgesehen davon, dass die letzteren nicht allen durch die Theorie gegebenen Grenzbedingungen zu genügen vermögen.

Eine Theorie der Reflexion und Brechung der Kugelwellen mit Anwendung auf die Erscheinungen des Lichtes hat zuerst *Clebsch**) zu geben versucht. Aber einmal beschränkt sich *Clebsch* nur auf senkrecht einfallendes Licht und lässt die Brechung ausser Acht und fordert dabei für die Grenze

*) Dieses Journal Bd. 61.

nur die Erfüllung der Gleichheit der Componenten der Verrückungen, und dann haben seine Formeln eine wenig übersichtliche Form. Denn *Clebsch* integrirt die Elasticitätsgleichungen nicht in sphärischen Coordinaten, sondern er entwickelt die für ebene Coordinaten erhaltenen Lösungen nach Kugelfunctionen und gelangt so nicht zu den einfachen Lösungen in geschlossener Form, welche ich in meiner Arbeit: „Ueber die elastischen Schwingungen einer isotropen Kugel“*) aufgestellt habe.

In dieser Arbeit habe ich die Elasticitätsgleichungen unter der Annahme integrirt, dass sich die Verrückungen in longitudinale und transversale Theile zerlegen lassen, eine Annahme, welche berechtigt erscheint nach der Form, welche *Lamé* den Elasticitätsgleichungen gegeben hat.

Im Folgenden wende ich eine allgemeinere Integrationsmethode an, welche diese Annahme nicht zur Voraussetzung hat. Ich erhalte dabei ausser den früher gewonnenen Integralsystemen neue Integralsysteme, welche für das Folgende von Bedeutung sind.

Bei der Anwendung der erhaltenen Integralsysteme beschränke ich mich auf die Betrachtung transversaler Kugelschwingungen und zwar auf solche, bei welchen die Schwingungsrichtung auf der Fortpflanzungsrichtung senkrecht steht. Ich werde das gleiche Problem für allgemeinere transversale sowie für longitudinale Kugelschwingungen bei anderer Gelegenheit durchführen.

§ 1.

Integration der Elasticitätsgleichungen in sphärischen Coordinaten ohne Annahme der Zerlegbarkeit der Componenten der Verrückungen**).

Wird von äusseren Kräften abgesehen, was bei Schwingungsproblemen gestattet ist, wenn die Verrückungen der einzelnen Theilchen von ihrer Gleichgewichtslage an gerechnet werden, welche der Körper unter Einfluss dieser Kräfte annimmt, so werden die Kugelschwingungen eines isotropen Körpers bestimmt durch die Gleichungen***):

*) Dieses Journal Bd. 88.

**) Die hier befolgte Integrationsmethode ist auch auf die allgemeineren Gleichungen, welche ich in Bd. 104 dieses Journals in der Arbeit „Allgemeine Integration der Elasticitätsgleichungen für die Schwingungen und das Gleichgewicht isotroper Rotationskörper“ behandelt habe, anwendbar, wie ich in den Mittheilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, Bd. III S. 249 gezeigt habe.

***) Vgl. *Lamé,* Théorie de l'élasticité § 84.

$$(1.)\quad \begin{cases} \omega_1^2 cr^2 \dfrac{d\theta}{dr} + \omega_2^2\left(\dfrac{d\Gamma}{d\varphi} - \dfrac{dB}{d\psi}\right) = cr^2 \dfrac{d^2U}{dt^2}, \\ \omega_1^2 c \dfrac{d\theta}{d\varphi} + \omega_2^2\left(\dfrac{dA}{d\psi} - \dfrac{d\Gamma}{dr}\right) = cr \dfrac{d^2V}{dt^2}, \\ \omega_1^2 \dfrac{1}{c}\dfrac{d\theta}{d\psi} + \omega_2^2\left(\dfrac{dB}{dr} - \dfrac{dA}{d\varphi}\right) = r \dfrac{d^2W}{dt^2}. \end{cases}$$

Hier bezeichnen r, φ, ψ die sphärischen Coordinaten eines Punktes, U, V, W die sphärischen Componenten einer Verrückung zur Zeit t, und zur Abkürzung ist gesetzt:

$$(1^a.)\qquad \theta = \frac{1}{r^2}\frac{dr^2U}{dr} + \frac{1}{rc}\frac{dcV}{d\varphi} + \frac{1}{rc}\frac{dW}{d\psi},$$

$$(1^b.)\quad A = \frac{1}{r^2c}\left(\frac{drV}{d\psi} - \frac{drcW}{d\varphi}\right),\quad B = \frac{1}{c}\left(\frac{drcW}{dr} - \frac{dU}{d\psi}\right),\quad \Gamma = c\left(\frac{dU}{d\varphi} - \frac{drV}{dr}\right),$$

$$(1^c.)\qquad c = \cos\varphi,\quad \omega_1^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\varrho},\quad \omega_2^2 = \frac{\mu}{\varrho}.$$

Aus (1.) folgt für die Volumenveränderung θ:

$$(2.)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega_1^2 \triangle^2\theta,$$

wo das Zeichen $\triangle^2$. die Bedeutung hat

$$(3.)\qquad \triangle^2. = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{d}{dr}r^2\frac{d.}{dr} + \frac{1}{c}\frac{d}{d\varphi}c\frac{d.}{d\varphi} + \frac{1}{c^2}\frac{d^2.}{d\psi^2}\right\};$$

Ferner ergeben sich aus (1.) die Gleichungen:

$$(4.)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{d\psi}\dfrac{1}{c}\left(\dfrac{dA}{d\psi} - \dfrac{d\Gamma}{dr}\right) - \dfrac{d}{d\varphi}\,c\,\left(\dfrac{dB}{dr} - \dfrac{dA}{d\varphi}\right) = \dfrac{cr^2}{\omega_2^2}\dfrac{dA^2}{dt^2}, \\ \dfrac{d}{dr}\,c\,\left(\dfrac{dB}{dr} - \dfrac{dA}{d\varphi}\right) - \dfrac{d}{d\psi}\dfrac{1}{cr^2}\left(\dfrac{d\Gamma}{d\varphi} - \dfrac{dB}{d\psi}\right) = \dfrac{c}{\omega_2^2}\dfrac{d^2B}{dt^2}, \\ \dfrac{d}{d\varphi}\dfrac{1}{cr^2}\left(\dfrac{d\Gamma}{d\varphi} - \dfrac{dB}{d\psi}\right) - \dfrac{d}{dr}\dfrac{1}{c}\left(\dfrac{dA}{d\psi} - \dfrac{d\Gamma}{dr}\right) = \dfrac{1}{\omega_2^2 c}\dfrac{d^2\Gamma}{dt^2}. \end{cases}$$

θ ist durch die Gleichung (2.) gegeben. Gelingt es daher, A, B, Γ den Gleichungen (4.) gemäss zu bestimmen, dann liefern die Gleichungen (1.) nach zweimaliger Integration nach t die gesuchten Componenten U, V, W einer sphärischen Verrückung.

Das Gleichungssystem (4.) möge durch ein anderes, gleichwerthiges ersetzt werden. Schreibt man zur Abkürzung:

$$(5.)\quad \alpha = \frac{1}{r^2c}\left(\frac{d\Gamma}{d\varphi} - \frac{dB}{d\psi}\right),\quad \beta = \frac{1}{c}\left(\frac{dA}{d\psi} - \frac{d\Gamma}{dr}\right),\quad \gamma = c\left(\frac{dB}{dr} - \frac{dA}{d\varphi}\right),$$

so folgen aus (4.) zunächst die Gleichungen:

$$\frac{d\beta}{d\psi} - \frac{d\gamma}{d\varphi} = \frac{cr^2}{\omega_2^2}\frac{d^2A}{dt^2},$$
$$\frac{d\gamma}{dr} - \frac{d\alpha}{d\psi} = \frac{c}{\omega_2^2}\frac{d^2B}{dt^2},$$
$$\frac{d\alpha}{d\varphi} - \frac{d\beta}{dr} = \frac{1}{\omega_2^2 c}\frac{d^2\Gamma}{dt^2};$$

und hieraus erhält man mit Rücksicht auf (5.):

$$(6.)\quad \begin{cases} \frac{d}{d\varphi}\, c \left(\frac{d\alpha}{d\varphi} - \frac{d\beta}{dr}\right) - \frac{d}{d\psi}\frac{1}{c}\left(\frac{d\gamma}{dr} - \frac{d\alpha}{d\psi}\right) = \frac{cr^2}{\omega_2^2}\frac{d^2\alpha}{dt^2}, \\ \frac{d}{d\psi}\frac{1}{cr^2}\left(\frac{d\beta}{d\psi} - \frac{d\gamma}{d\varphi}\right) - \frac{d}{dr}\, c \left(\frac{d\alpha}{d\varphi} - \frac{d\beta}{dr}\right) = \frac{c}{\omega_2^2}\frac{d^2\beta}{dt^2}, \\ \frac{d}{dr}\frac{1}{c}\left(\frac{d\gamma}{dr} - \frac{d\alpha}{d\psi}\right) - \frac{d}{d\varphi}\frac{1}{cr^2}\left(\frac{d\beta}{d\psi} - \frac{d\gamma}{d\varphi}\right) = \frac{1}{\omega_2^2 c}\frac{d^2\gamma}{dt^2}. \end{cases}$$

Nach Umstellung der Glieder der linken Seiten der Gleichungen (6.) folgt aus (4.) und (6.), dass die Grössen α, β, γ denselben Gleichungen wie A, B, Γ genügen. Daraus ergiebt sich der wichtige Satz, den ich früher für allgemeine orthogonale Coordinaten unter der Voraussetzung der Zerlegbarkeit der Verrückungen in longitudinale und transversale Theile ausgesprochen habe*): *Ist ein Werthsystem A, B, Γ bekannt, welches den Gleichungen* (4.) *genügt, so liefern die Gleichungen* (5.) *stets ein zweites Integralsystem für dieselben Differentialgleichungen.*

In Beziehung auf die Zeit t können in den gesuchten Functionen nur periodische Glieder auftreten, da für unperiodische Glieder die Verrückungen mit wachsender Zeit über jede Grenze hinaus wachsen könnten, was unmöglich ist. Wir setzen daher

$$(6^a.)\quad \begin{cases} \theta = \sigma \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mt, \\ \alpha = \mathfrak{A} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mt, \quad \beta = \mathfrak{B} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mt, \quad \gamma = \mathfrak{C} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mt. \end{cases}$$

Dann erhält man aus (1.)

$$(7.)\quad \begin{cases} U = -\frac{\omega_1^2}{m^2}\frac{d\theta}{dr} - \frac{\omega_2^2}{m^2}\alpha, \\ V = -\frac{\omega_1^2}{m^2}\frac{1}{r}\frac{d\theta}{d\varphi} - \frac{\omega_2^2}{m^2}\frac{\beta}{r}, \\ W = -\frac{\omega_1^2}{m^2}\frac{1}{rc}\frac{d\theta}{d\psi} - \frac{\omega_2^2}{m^2}\frac{\gamma}{rc}. \end{cases}$$

*) Dieses Journal Bd. 104. S. 183 u. 184.

Dabei sind die Integrationsconstanten gleich Null gesetzt, da die Ausdrücke für U, V, W weder Glieder mit dem Factor t noch Glieder enthalten können, welche von t unabhängig sind; denn die letzteren würden nur die Gleichgewichtslage nicht den Schwingungszustand beeinflussen, und die ersteren sind aus oben genanntem Grunde unmöglich.

§ 2.

Es ist nun unsere Aufgabe, α, β, γ den Gleichungen (6.) gemäss zu bestimmen. Zunächst erhält man aus (6.) die Gleichung:

$$(7^{a}.) \qquad \frac{dr^2\alpha}{dr} + \frac{1}{c}\frac{dc\beta}{d\varphi} + \frac{1}{c^2}\frac{d\gamma}{d\psi} = 0.$$

Die Integrationsconstante ist aus gleichem Grunde wie vorhin gleich Null gesetzt.

Die Gleichung (7ª.) lässt, worauf ich schon in früheren Arbeiten hingewiesen habe, die Form specieller Werthsysteme erkennen, welche den vorliegenden Differentialgleichungen genügen. Der oben genannte Satz liefert dann die allgemeineren Integrale.

Man genügt der zweiten Gleichung (7.) durch die Annahme

$$(8.) \qquad a = 0, \quad \frac{1}{c}\frac{dc\beta}{d\varphi} + \frac{1}{c^2}\frac{d\gamma}{d\psi} = 0;$$

daher hat man zu setzen entweder

$$(8^{a}.) \qquad \beta = \frac{d\mathfrak{G}}{d\varphi}, \quad \gamma = \frac{d\mathfrak{G}}{d\psi},$$

wo $\mathfrak{G}$ als Function von φ und ψ durch die Gleichung

$$(8^{b}.) \qquad c\frac{d}{d\varphi}c\frac{d\mathfrak{G}}{d\varphi} + \frac{d^2\mathfrak{G}}{d\psi^2} = 0$$

zu bestimmen ist, während ihre Abhängigkeit von r und t durch die Gleichungen (6.) gegeben ist; oder man hat zu setzen

$$(8^{c}.) \qquad \beta = \frac{1}{c}\frac{d\mathfrak{F}}{d\varphi}, \quad \gamma = -c\frac{d\mathfrak{F}}{d\varphi},$$

wo $\mathfrak{F}$ eine noch nicht definirte Function ist.

In beiden Fällen (8ª.) und (8ᶜ.) sind den Ausdrücken für β und γ noch Glieder hinzuzufügen, für welche einmal $c\beta$ von φ und dann γ von ψ unabhängig wird, nämlich

$$(8^{d}.) \qquad \beta = \frac{1}{c}\beta', \quad \gamma = \gamma';$$

daher ist

$$(3^e.) \qquad \frac{d\beta'}{d\varphi} = 0, \quad \frac{d\gamma'}{d\psi} = 0.$$

Die durch Addition der gewonnenen Ausdrücke erhaltenen Werthe für α, β, γ sind in die Gleichungen (6.) zur weiteren Bestimmung der Functionen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$, β', γ' einzuführen. Vorher bemerke ich, dass man anstatt von (8.) hätte von Annahmen ausgehen können, bei welchen entweder β oder γ den Werth Null erhalten hätte, doch würde man nur zu Werthsystemen geführt werden, welche aus (8.) hervorgehen.

Man hat daher α, β, γ in folgender Form anzusetzen:

$$(9.) \quad \alpha = 0, \quad \beta = \frac{d\mathfrak{G}}{d\varphi} + \frac{1}{c}\frac{d\mathfrak{F}}{d\psi} + \frac{\beta'}{c}, \quad \gamma = \frac{d\mathfrak{G}}{d\psi} - c\frac{d\mathfrak{F}}{d\varphi} + \gamma'.$$

Hierdurch wird mit Rücksicht auf $(8^b.)$ und $(8^e.)$ die erste Gleichung (6.) identisch erfüllt, die übrigen gehen in folgende Gleichungen über:

$$(10.) \quad \begin{cases} c\frac{d^3\mathfrak{G}}{d\varphi dr^2} + \frac{d}{d\psi}\left\{\frac{d^2\mathfrak{F}}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{c}\frac{d}{d\varphi}c\frac{d\mathfrak{F}}{d\varphi} + \frac{1}{c^2}\frac{d^2\mathfrak{F}}{d\psi^2}\right)\right\} \\ \qquad + \frac{1}{c^2r^2}\frac{d^2\beta'}{d\psi^2} + \frac{d^2\beta'}{dr^2} = \frac{1}{\omega_2^2}\left(c\frac{d^3\mathfrak{G}}{d\varphi dt^2} + \frac{d^3\mathfrak{F}}{d\psi dt^2} + \frac{d^2\beta'}{dt^2}\right), \\ \frac{1}{c}\frac{d^3\mathfrak{G}}{d\psi dr^2} - \frac{d}{d\varphi}\left\{\frac{d^2\mathfrak{F}}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{c}\frac{d}{d\varphi}c\frac{d\mathfrak{F}}{d\varphi} + \frac{1}{c^2}\frac{d^2\mathfrak{F}}{d\psi^2}\right)\right\} \\ \qquad + \frac{1}{c}\frac{d^2\gamma'}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{c}\frac{d\gamma'}{d\varphi} = \frac{1}{\omega_2^2}\left(\frac{1}{c}\frac{d^3\mathfrak{G}}{d\psi dt^2} - \frac{d^3\mathfrak{F}}{d\varphi dt^2} + \frac{1}{c}\frac{d^2\gamma'}{dt^2}\right). \end{cases}$$

Diese Gleichungen zerfallen in einfachere Systeme. Denn differentiirt man die erste Gleichung nach φ, die zweite nach ψ, so entsteht durch Addition mit Rücksicht auf $(8^b.)$ die Gleichung $\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{c^2r^2}\frac{d^2\beta'}{d\psi^2} = 0$. Hieraus folgt zunächst, weil β' von φ unabhängig sein soll, $\frac{d^2\beta'}{d\psi^2} = 0$ und ferner, dass β', weil in Beziehung auf ψ nur periodische Functionen auftreten können, von ψ unabhängig ist. Nun verschwinden in (10.) die von ψ abhängigen und unabhängigen Glieder für sich, und es entstehen die folgenden Gleichungen:

$$(11^a.) \quad \begin{cases} c\frac{d^3\mathfrak{G}}{d\varphi dr^2} + \frac{d}{d\psi}\left\{\frac{d^2\mathfrak{F}}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{c}\frac{d}{d\varphi}c\frac{d\mathfrak{F}}{d\varphi} + \frac{1}{c^2}\frac{d^2\mathfrak{F}}{d\psi^2}\right)\right\} \\ \qquad = \frac{1}{\omega_2^2}\left(c\frac{d^3\mathfrak{G}}{d\varphi dt^2} + \frac{d^3\mathfrak{F}}{d\psi dt^2}\right), \\ \frac{1}{c}\frac{d^3\mathfrak{G}}{d\psi dr^2} - \frac{d}{d\varphi}\left\{\frac{d^2\mathfrak{F}}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{c}\frac{d}{d\varphi}c\frac{d\mathfrak{F}}{d\varphi} + \frac{1}{c^2}\frac{d^2\mathfrak{F}}{d\psi^2}\right)\right\} \\ \qquad = \frac{1}{\omega_2^2}\left(\frac{1}{c}\frac{d^3\mathfrak{G}}{d\psi dt^2} - \frac{d^3\mathfrak{F}}{d\varphi dt^2}\right), \end{cases}$$

$$(11^{b}.) \qquad \frac{d^2\beta'}{dr^2} = \frac{1}{\omega_2^2}\frac{d^2\beta'}{dt^2},$$

$$(11^{c}.) \qquad \frac{d^2\gamma'}{dr^2} + \frac{c}{r^2}\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{c}\frac{d\gamma'}{d\varphi} = \frac{1}{\omega_2^2}\frac{d^2\gamma'}{dt^2}.$$

Die Gleichung (11^{c}.) lässt sich auf bekannte Gleichungen zurückführen, wenn

$$(12.) \qquad \gamma' = c\frac{d\mathfrak{H}}{d\varphi} + \mathfrak{H}',$$

gesetzt wird, wobei $\mathfrak{H}'$ der Gleichung (11^{b}.), $\mathfrak{H}$ der Gleichung

$$(12^{a}.) \qquad \frac{d^2\mathfrak{H}}{dr^2} + \frac{1}{r^2c}\frac{d}{d\varphi}c\frac{d\mathfrak{H}}{d\varphi} = \frac{1}{\omega_2^2}\frac{d^2\mathfrak{H}}{dt^2}$$

zu genügen hat.

Die Gleichungen (11^{a}.) können ersetzt werden durch die Gleichungen

$$(13.) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2\mathfrak{G}}{dr^2} - \dfrac{1}{\omega_2^2}\dfrac{d^2\mathfrak{G}}{dt^2} = c\dfrac{d\mathfrak{Z}}{d\varphi}, \\ \dfrac{d^2\mathfrak{F}}{dr^2} + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{1}{c}\dfrac{d}{d\varphi}c\dfrac{d\mathfrak{F}}{d\varphi} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{d^2\mathfrak{F}}{d\psi^2}\right) - \dfrac{1}{\omega_2^2}\dfrac{d^2\mathfrak{F}}{dt^2} = \dfrac{d\mathfrak{Z}}{d\psi}, \end{cases}$$

wenn $\mathfrak{Z}$ eine Function ist, welche der Gleichung (8^{b}.) genügt. Denn die Gleichungen (11^{a}.) gehen aus ihnen hervor, wenn auf die Gleichungen (13.) einmal die Operationen $c\frac{d.}{d\varphi}$ und $\frac{d.}{d\psi}$, dann die Operationen $\frac{1}{c}\frac{d.}{d\psi}$ und $\frac{d.}{d\varphi}$ angewendet, und die entstehenden Gleichungen addirt resp. subtrahirt werden.

Die Gleichungen (13.) führen zu folgender Annahme für $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}$:

$$(13^{a}.) \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 + c\frac{d\mathfrak{G}_2}{d\varphi}, \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \frac{d\mathfrak{F}_2}{d\psi},$$

wobei die Functionen $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{F}_2$ so zu bestimmen sind, dass für $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{F}_1$ die linken Seiten der Gleichungen (13.) gleich Null werden, und $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{F}_2$ den folgenden Gleichungen genügen:

$$(14.) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2\mathfrak{G}_2}{dr^2} - \dfrac{1}{\omega_2^2}\dfrac{d^2\mathfrak{G}_2}{dt^2} = \mathfrak{Z}, \\ \dfrac{d^2\mathfrak{F}_2}{dr^2} + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{1}{c}\dfrac{d}{d\varphi}c\dfrac{d\mathfrak{F}_2}{d\varphi} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{d^2\mathfrak{F}_2}{d\psi^2}\right) - \dfrac{1}{\omega_2^2}\dfrac{d^2\mathfrak{F}_2}{dt^2} = \mathfrak{Z}. \end{cases}$$

Hier waren als Integrationsconstanten von φ resp. von ψ unabhängige Functionen hinzuzufügen; doch führen dieselben zu Ausdrücken für $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{F}_2$, welche aus (13^{a}.) herausfallen.

Die Functionen $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{F}_2$ sind diejenigen Theile von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}$ in (13ª.), welche von $\mathfrak{Z}$ abhängen; und da $\mathfrak{Z}$ die Gleichung (8ᵇ.) zu erfüllen hat, so wird man den Gleichungen (14.) genügen durch die Festsetzung

$$(15.)\quad \mathfrak{Z} = X(r,t)Z(\varphi,\psi),\quad \mathfrak{G}_2 = X_1(r,t)Z(\varphi,\psi),\quad \mathfrak{F}_2 = X_2(r,t)Z(\varphi,\psi),$$

wenn $Z(\varphi,\psi)$ ein Integral der Gleichung (8ᵇ.) ist und $X_1(r,t)$ und $X_2(r,t)$ der folgenden Gleichung für $i=1$ und $i=2$ genügen:

$$(15^a.)\qquad \frac{d^2X_i(r,t)}{dr^2} - \frac{1}{\omega_2^2}\frac{d^2X_i(r,t)}{dt^2} = X(r,t);$$

denn in diese Gleichung gehen beide Gleichungen (14.) über. Mit $X(r,t)$ ist eine Function von r und t bezeichnet.

Da X_1 und X_2 derselben Gleichung (15ª.) zu genügen haben, so müssen die von X abhängigen Glieder in X_1 und X_2 einander gleich sein. Hieraus folgt für diese Glieder $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{F}_2$. Und die Ausdrücke (13ª.) für $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}$ stellen nach dieser Bestimmung von $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{F}_2$ die vollständigen Integrale der Gleichungen (13.) dar, da in denselben durch $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{F}_1$ hinreichend willkürliche Constanten vorhanden sind.

Nun fallen aber, weil sich $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{F}_2$ ergeben und $\mathfrak{G}_2$ der Gleichung (8ᵇ.) zu genügen hat, die von $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{F}_2$ in (13ª.) abhängigen Glieder aus den Ausdrücken (9.) für β und γ heraus. Daher kann $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{F}_2 = 0$ gesetzt werden. Somit folgt aus (13ª.), dass $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}$ dieselben Gleichungen zu erfüllen haben, welche vorhin für $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{F}_1$ erhalten wurden, nämlich $\mathfrak{G}$ die Gleichung (11ᵇ.) und $\mathfrak{F}$ die Gleichung

$$(16.)\qquad \frac{d^2\mathfrak{F}}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{c}\frac{d}{d\varphi}c\frac{d\mathfrak{F}}{d\varphi} + \frac{1}{c^2}\frac{d^2\mathfrak{F}}{d\psi^2}\right) = \frac{1}{\omega_2^2}\frac{d^2\mathfrak{F}}{dt^2}.$$

Der Ausdruck für γ in (9.) lässt sich einfacher schreiben. Darin ist nach (12.) $\gamma' = c\frac{d\mathfrak{H}}{d\varphi} + \mathfrak{H}'$ zu setzen. Es ist nämlich das erste Glied $c\frac{d\mathfrak{H}}{d\varphi}$ in dem Gliede $c\frac{d\mathfrak{F}}{d\varphi}$ enthalten, weil die Gleichungen (12ª.) und (16.) für ein von ψ unabhängiges $\mathfrak{F}$ identisch werden. Daher hat man γ' durch die einfachere Gleichung (11ᵇ.) zu bestimmen.

Es ergiebt sich somit: Es ist in (9.) $\mathfrak{G}$ durch eine Function zu ersetzen, welche die Gleichungen (8ᵇ.) und (11ᵇ.) erfüllt, $\mathfrak{F}$ hat der Gleichung (16.) zu genügen, β' und γ' sind Integrale der Gleichung (11ᵇ.).

Die vier von einander unabhängigen Functionen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}$, β', γ' in (9.) geben somit vier Werthsysteme α, β, γ. Jedes derselben liefert, wenn in

(5.) A, B, Γ durch α, β, γ in (9.) ersetzt werden, nach dem auf Seite 295 ausgesprochenen Satze ein neues Integralsystem α, β, γ. Es ergeben sich daher acht Werthsysteme α, β, γ, von denen zunächst zwei in anderen enthalten sind, nämlich diejenigen, welche aus (5.) für die Glieder $\frac{\beta'}{c}$ und γ' hervorgehen, wobei zu beachten ist, dass jede Function $\mathfrak{f}(r, t)$, welche der Gleichung (11^b.) genügt, durch ihren Differentialquotienten nach r ersetzt werden kann. Dies möge auch bei Bildung der noch übrig bleibenden sechs Integralsysteme berücksichtigt werden. Wir bezeichnen dabei mit $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{F}$ und Z Integrale der Gleichungen (11^b.), (16.) und (8^b.), deren willkürliche Constanten in den einzelnen Integralsystemen verschiedene Werthe annehmen werden. Die sechs Integralsysteme sind daher die folgenden:

$$(17.)\quad \begin{cases} \alpha_1 = 0, & \alpha_3 = 0, & \alpha_5 = 0, \\ \beta_1 = \frac{1}{c}\frac{d\mathfrak{F}}{d\psi}, & \beta_3 = \mathfrak{f}\frac{dZ}{d\varphi}, & \beta_5 = \frac{\mathfrak{f}}{c}, \\ \gamma_1 = -c\frac{d\mathfrak{F}}{d\varphi}; & \gamma_3 = \mathfrak{f}\frac{dZ}{d\psi}; & \gamma_5 = 0; \\ \alpha_2 = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{c}\frac{d}{d\varphi}c\frac{d\mathfrak{F}}{d\varphi} + \frac{1}{c^2}\frac{d^2\mathfrak{F}}{d\psi^2}\right), & \alpha_4 = 0, & \alpha_6 = 0, \\ \beta_2 = \frac{d^2\mathfrak{F}}{dr\,d\varphi}, & \beta_4 = -\mathfrak{f}\frac{1}{c}\frac{dZ}{d\psi}, & \beta_6 = 0, \\ \gamma_2 = \frac{d^2\mathfrak{F}}{dr\,d\psi}; & \gamma_4 = \mathfrak{f}c\frac{dZ}{d\varphi}; & \gamma_6 = \mathfrak{f}; \end{cases}$$

$\mathfrak{f}$, $\mathfrak{F}$, Z genügen den Gleichungen:

$$(17^a.)\qquad \frac{d^2\mathfrak{f}}{dr^2} = \frac{1}{\omega_2^2}\frac{d^2\mathfrak{f}}{dt^2},$$

$$(17^b.)\qquad \frac{d^2\mathfrak{F}}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{c}\frac{d}{d\varphi}c\frac{d\mathfrak{F}}{d\varphi} + \frac{1}{c^2}\frac{d^2\mathfrak{F}}{d\psi^2}\right) = \frac{1}{\omega_2^2}\frac{d^2\mathfrak{F}}{dt^2},$$

$$(17^c.)\qquad c\frac{d}{d\varphi}c\frac{dZ}{d\varphi} + \frac{d^2Z}{d\psi^2} = 0.$$

Die Werthsysteme $\alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3$ und $\alpha_4\ \beta_4\ \gamma_4$ lassen sich noch auf einander zurückführen. Denn da Z ein Integral der Gleichung (17^c.) ist, so wird dieselbe auch erfüllt durch $c\frac{dZ}{d\varphi}$. Daher kann Z in $\alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3$ durch $c\frac{dZ}{d\varphi}$ ersetzt werden. Man erhält dadurch $\alpha_3 = 0$, $\beta_3 = \mathfrak{f}\frac{d}{d\varphi}c\frac{dZ}{d\varphi}$, $\gamma_3 = \mathfrak{f}c\frac{d^2Z}{d\varphi\,d\psi}$. Und nach Gleichung (17^c.) für Z kann jetzt β_3 geschrieben

werden $= -\mathfrak{f}\frac{1}{c}\frac{d^2Z}{d\psi^2}$. Ersetzt man noch $\frac{dZ}{d\psi}$ durch Z, was nach der Gleichung (17^c.) gestattet ist, so gehen die Werthe für β_3, γ_3 in die Werthe für β_4, γ_4 über.

Schliesslich lassen sich, wie später gezeigt wird, die Werthe für α_3, β_3, γ_3 und α_4, β_4, γ_4 auf α_2, β_2, γ_2 resp. α_1, β_1, γ_1 zurückführen.

Die gefundenen Werthsysteme (17.) für α, β, γ sind in die Ausdrücke (7.) für die Verrückungen U, V, W einzusetzen. Damit ist die Integration der Differentialgleichungen (1.) durchgeführt ohne die Zerlegbarkeit der Verrückungen vorauszusetzen. Die ersten beiden Integralsysteme (17.) entsprechen genau den früher von mir erhaltenen, die übrigen Integralsysteme sind neue Integralsysteme. Aber hinsichtlich des Charakters der möglichen Schwingungszustände giebt die hier angewendete allgemeinere Integrationsmethode die gleichen Resultate. Denn die ersten Glieder der für die Verrückungen gefundenen Ausdrücke (7.), welche allein von der Volumenänderung θ abhängen, gehören einer longitudinalen Kugelwelle an, welche sich in dem Medium mit der Geschwindigkeit ω_1 fortpflanzt; die letzten Glieder hängen durch (5.) nur von den Drehungsmomenten A, B, Γ ab, sie genügen der Gleichung (7^a.) und stellen die Componenten der Verrückung einer transversalen Welle dar mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω_2. Daher zeigen die Ausdrücke (7.), dass sich in einem Medium, je nachdem die willkürlichen Constanten in θ oder in α, β, γ verschwinden, entweder longitudinale oder transversale Kugelwellen ausbreiten können, und dass, wenn Schwingungen allgemeinerer Art auftreten, man sich dieselben stets durch Interferenz von longitudinalen und transversalen Kugelwellen mit den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 entstanden zu denken hat.

Für $\psi = \text{const.}$ also für sogenannte Torsionsschwingungen erhält man folgendes Resultat:

Man kann den Differentialgleichungen genügen einmal durch $U = 0$, $V = 0$, W dann durch U, V, $W = 0$. Bei Torsionsschwingungen bewegen sich daher die einzelnen Theilchen stets in zwei zu einander senkrechten Ebenen, und zwar entweder parallel der Aequatorebene der Kugel — dann beschreiben die Theilchen unendlich kleine Kreisbogen, und die Schwingungen erfolgen ohne Verdichtungen — oder die Bewegung findet in einer Meridianebene statt und zwar im allgemeinen mit Verdichtungen. Dann

beschreiben die einzelnen Theilchen im allgemeinen elliptische Bahnen, welche, falls die Bewegung ohne Verdichtungen stattfindet, insbesondere in unendlich kleine Meridianbogen übergehen können.

§ 3.

Integrale der vorkommenden Differentialgleichungen.

Von den vorkommenden Differentialgleichungen (11^b.), (2.), (16.) und (8^b.) sind die ersten drei Gleichungen bekannte Gleichungen. Und es handelt sich hinsichtlich der Gleichungen (2.) und (16.) nur darum, ihren Integralen eine passende Form zu geben. Zugleich werde ich ein noch nicht bekanntes Integral der Gleichung (16.) aufstellen, welches von den Integralen der Gleichung (8^b.) abhängt.

Durch die Substitution

$$\theta = \frac{F}{r} \tag{18.}$$

geht die Gleichung (2.) in (16.) über, wenn darin ω_2 durch ω_1 ersetzt wird, und die Function $\mathfrak{F}$ in (16.) kann erstens nur von r und t abhängig sein, zweitens kann die Gleichung (16.) in zwei Gleichungen von der Form (11^b.) und (8^b.) zerfallen, und drittens kann sie durch Kugelfunctionen integrirt werden. Man erhält also für ein Integral $\mathfrak{F}$ der Gleichung (16.) die folgenden mit $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_3$ bezeichneten Darstellungen:

$$\begin{cases} \mathfrak{F}_1 = A\sin(q \pm mt) + B\cos(q \pm mt), \\ \mathfrak{F}_2 = G(A'\sin(q \pm mt) + B'\cos(q \pm mt)), \\ \mathfrak{F}_3 = R^n S^n \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} mt, \end{cases} \tag{19.}$$

wo gesetzt ist

$$q = \frac{mr}{\omega_2} = \frac{r}{l} 2\pi. \tag{20.}$$

A, B, A', B', sind zu bestimmende Constanten. Der zweite Werth für q wird erhalten, wenn m durch $\frac{2\pi}{T}$, ω_2 durch $\frac{l}{T}$ ersetzt wird, wo l die Wellenlänge, T die Schwingungsdauer ist.

G genügt der Gleichung (8^b.). Ihre Integrale sind

$$\begin{cases} G_1 = \frac{1}{\cos\varphi}(a_1\sin\psi + b_1\cos\psi), \\ G_2 = \operatorname{tg}\varphi(a_2\sin\psi + b_2\cos\psi); \end{cases} \tag{21.}$$

sie sind für $\psi = \text{const.}$ durch die folgenden zu ersetzen:

$$(22.)\qquad \begin{cases} G_1 = a, \\ G_2 = b \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right); \end{cases}$$

a_1, a_2, b_1, b_2, a, b sind Constante.

S^n in (19.) ist die von zwei Argumenten abhängige Kugelfunction. R^n genügt der Gleichung

$$(23.)\qquad \frac{d^2R^n}{dq^2} + \left(1 - \frac{n(n+1)}{q^2}\right) R^n = 0,$$

und es ergiebt sich R^n in der Form

$$(24.)\qquad R^n = AR_1^n + BR_2^n,$$

wo A und B Constante sind, und mit R_1^n und R_2^n die folgenden Functionen bezeichnet werden

$$(25.)\qquad \begin{cases} R_1^n = Y_1^n(q)\sin\left(q - \frac{n\pi}{2}\right) + Y_2^n(q)\cos\left(q - \frac{n\pi}{2}\right), \\ R_2^n = Y_1^n(q)\cos\left(q - \frac{n\pi}{2}\right) - Y_2^n(q)\sin\left(q - \frac{n\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Hierin sind $Y_1^n(q)$ und $Y_2^n(q)$ die folgenden Functionen, welche für ganzzahlige Werthe von n mit einer endlichen Anzahl von Gliedern abbrechen:

$$(26.)\qquad \begin{cases} Y_1^n(q) = 1 - \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2!(2q)^2} + \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4!(2q)^4} - \cdots, \\ Y_2^n(q) = \frac{n(n+1)}{1!\,2q} - \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{3!(2q)^3} + \cdots\text{*}). \end{cases}$$

Diese wichtige Darstellung (25.) für die Integrale der Gleichung (23.) gestattet $\mathfrak{F}_3$ in (19.) eine $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ entsprechende Form zu geben. Diese ist entweder

$$(27^{\text{a}}.)\qquad \mathfrak{F}_3 = S^n\left\{C_n\sin\left(q - \frac{n\pi}{2} \pm mt\right) + D_n\cos\left(q - \frac{n\pi}{2} \pm mt\right)\right\},$$

oder

$$(27^{\text{b}}.)\qquad \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{A}_n S^n\left\{Y_1^n(q)\sin\left(q - \frac{n\pi}{2} \pm mt + p\right) + Y_2^n(q)\cos\left(q - \frac{n\pi}{2} \pm mt + p\right)\right\},$$

wo gesetzt ist:

$$(28.)\qquad \begin{cases} C_n = A_n Y_1^n(q) + B_n Y_2^n(q), \\ D_n = A_n Y_2^n(q) - B_n Y_1^n(q); \end{cases}$$

A_n, B_n, $\mathfrak{A}_n$, p sind zu bestimmende Constante.

---

*) *F. Pockels,* Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. Leipzig 1891. S. 110 u. 98.

Hier sowie in (19.) bezieht sich das Zeichen — vor mt auf eine vom Mittelpunkt des sphärischen Coordinatensystems r, φ, ψ aus divergirende, das Zeichen + auf eine nach ihm hin convergirende Welle. In beiden Fällen sind den zu bestimmenden Constanten verschiedene Werthe beizulegen.

Sind gerade und ungerade n in den Formeln (27ª.) und (27ᵇ.) zu unterscheiden, so nehmen dieselben bei Weglassung constanter Factoren folgende Form an, und zwar

für gerade n:

$$(29^{a}.) \qquad \mathfrak{F}_3 = S^n\{C_n\sin(q\pm mt)+D_n\cos(q\pm mt)\},$$

$$(29^{b}.) \qquad \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{A}_n S^n\{Y_1^n(q)\sin(q\pm mt+p)+Y_2^n(q)\cos(q\pm mt+p)\};$$

für ungerade n:

$$(30^{a}.) \qquad \mathfrak{F}_3 = S^n\{C_n\cos(q\pm mt)-D_n\sin(q\pm mt)\},$$

$$(30^{b}.) \qquad \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{A}_n S^n\{Y_1^n(q)\cos(q\pm mt+p)-Y_2^n(q)\sin(q\pm mt+p)\}.$$

Die neuen Integrale der Gleichung (16.) in der Form $\mathfrak{F}_2$ in (19.) zeigen, dass in (17.) die Integralsysteme α_3, β_3, γ_3 und α_4, β_4, γ_4 auf α_2, β_2, γ_2 und α_1, β_1, γ_1 zurückführbar sind, da Z derselben Gleichung (11ᵇ.) wie G genügt.

§ 4.

Reflexion und Brechung der Kugelwellen. Grenzbedingungen.

Das reflectirende Flächenelement habe die ebenen Coordinaten x, y, z. Die Richtung der Normale desselben sei die x-Axe. Die Componenten der in der Richtung der Normale wirkenden elastischen Kräfte seien X_x, Y_x, Z_x und die Componenten einer Verrückung im ebenen Coordinatensystem x, y, z seien u, v, w, im sphärischen r, φ, ψ wie früher U, V, W. Dann drücken die folgenden Gleichungen die Bedingungen der Gleichheit der Componenten der Verrückungen und der elastischen Druckkräfte für die Grenzfläche aus

$$(31^{a}.) \qquad u_e+u_r=u_d, \quad v_e+v_r=v_d, \quad w_e+w_r=w_d;$$

$$(31^{b}.) \qquad X_{xe}+X_{xr}=X_{xd}, \quad Y_{xe}+Y_{xr}=Y_{xd}, \quad Z_{xe}+Z_{xr}=Z_{xd},$$

wo die Indices e, r, d sich auf die einfallende, reflectirte und gebrochene Welle beziehen.

Zu diesen Bedingungen tritt noch die Bedingung hinzu, welche die Gleichheit der lebendigen Kräfte zu beiden Seiten der trennenden Fläche ausdrückt. Diese soll später hinzugefügt werden.

Die Bedingungen (31ª.) und (31ᵇ.) sind in sphärischen Coordinaten auszudrücken. Von einem Punkte O_e gehe eine divergirende Welle aus, welche an der Grenzfläche im ersten Medium reflectirt, im zweiten gebrochen wird. Die reflectirten und gebrochenen Strahlen scheinen dabei von zwei Punkten O_r und O_d divergirend ausgesendet zu werden. Daher sind die drei Punkte O_e, O_r, O_d als Mittelpunkte dreier sphärischen Coordinatensysteme r_e, φ_e, ψ_e; r_r, φ_r, ψ_r; r_d, φ_d, ψ_d einzuführen. Und man erhält die einfallende, reflectirte und gebrochene Welle durch (7.) ausgedrückt, wenn darin r, φ, ψ durch die genannten Coordinatensysteme ersetzt werden. Durch diese Coordinaten mögen auch die obigen Bedingungsgleichungen zunächst ausgedrückt werden.

Der Coordinatenmittelpunkt des sphärischen Systems r, φ, ψ falle mit dem Anfangspunkt des ebenen Coordinatensystems x, y, z zusammen, und die Aequatorebene des ersteren mit der xy-Ebene. Der Winkel ψ werde von der x-Axe an in dem Sinne entgegengesetzt der Uhrzeigerbewegung positiv gerechnet. Dann bestehen zunächst die Beziehungen:

$$(32^{a}.) \qquad x = r\cos\varphi\cos\psi, \quad y = r\cos\varphi\sin\psi, \quad z = r\sin\varphi;$$

$$(32^{b}.) \quad \begin{cases} m_1 = \cos(xr) = cc', & n_1 = \cos(yr) = cs', & p_1 = \cos(zr) = s, \\ m_2 = \cos(x\varphi) = -sc', & n_2 = \cos(y\varphi) = -ss', & p_2 = \cos(z\varphi) = c, \\ m_3 = \cos(x\psi) = -s'; & n_3 = \cos(y\psi) = c'; & p_3 = \cos(z\psi) = 0^{*}), \end{cases}$$

wobei zur Abkürzung geschrieben ist

$$(32^{c}.) \qquad s = \sin\varphi, \quad c = \cos\varphi, \quad s' = \sin\psi, \quad c' = \cos\psi.$$

Zwischen den Componenten einer Verrückung im ebenen Coordinatensysteme x, y, z und denjenigen U, V, W im sphärischen Systeme r, φ, ψ bestehen die Beziehungen

$$(33.) \quad \begin{cases} u = cc'U - sc'V - s'W, \\ v = cs'U - ss'V + c'W, \\ w = sU + cV. \end{cases}$$

Ferner sind die Componenten der elastischen Druckkräfte X_x, Y_x, Z_x im ebenen Systeme x, y, z durch die sphärischen Componenten auszudrücken. Diese sind nach *Lamé* a. u. a. O. S. 199, wenn N und T für N' und T' ge-

*) *Lamé*, Théorie de l'élasticité, S. 196. Ein hier vorkommender Druckfehler ist oben berichtigt.

schrieben wird:

$$(34.)\quad \begin{cases} N_1 = R_r = \lambda\theta + 2\mu \dfrac{dU}{dr}, \\ N_2 = \Phi_\varphi = \lambda\theta + 2\mu\left(\dfrac{U}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dV}{d\varphi}\right), \\ N_3 = \Psi_\psi = \lambda\theta + 2\mu\left(\dfrac{U}{r} - \dfrac{s}{c}\dfrac{V}{r} + \dfrac{1}{rc}\dfrac{dW}{d\psi}\right), \\ T_1 = \Phi_\psi = \Psi_\varphi = \mu\left(\dfrac{1}{rc}\dfrac{dV}{d\psi} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dW}{d\varphi} + \dfrac{s}{c}\dfrac{W}{r}\right), \\ T_2 = \Psi_r = R_\psi = \mu\left(\dfrac{dW}{dr} - \dfrac{W}{r} + \dfrac{1}{rc}\dfrac{dU}{d\psi}\right), \\ T_3 = R_\varphi = \Phi_r = \mu\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{dU}{d\varphi} + \dfrac{dV}{dr} - \dfrac{V}{r}\right). \end{cases}$$

Dann hat man nach *Lamé* S. 47 (10.), wo N_1, T_3, T_2 für X_x, Y_x, Z_x geschrieben ist,

$$(35.)\quad \begin{cases} m_1 X_x + n_1 Y_x + p_1 Z_x = m_1 N_1 + m_2 T_3 + m_3 T_2, \\ m_2 X_x + n_2 Y_x + p_2 Z_x = m_1 T_3 + m_2 N_2 + m_3 T_1, \\ m_3 X_x + n_3 Y_x + p_3 Z_x = m_1 T_2 + m_2 T_1 + m_3 N_3. \end{cases}$$

Die Formeln (33.) und (35.) setzen zwar bei ihrer Ableitung voraus, dass der Anfangspunkt O der ebenen Coordinaten x, y, z mit dem Mittelpunkte der sphärischen Coordinaten r, φ, ψ zusammenfalle. Sie behalten aber bei einer Parallelverschiebung der Coordinatenaxen des ebenen Systems Geltung, da x, y, z in (35.) nur als Differentiale auftreten, und sie können benutzt werden, um die sphärischen Componenten der Verrückungen und elastischen Kräfte aller drei Wellen in ebene umzusetzen, welche sich auf die Coordinatenaxen x, y, z beziehen*). Nur sind die Aequatorebenen sämmtlich parallel der xy-Ebene zu nehmen.

Die Ausdrücke für u, v, w und X_x, Y_x, Z_x werden in einfacherer

*) Man denkt sich dazu entsprechend den drei sphärischen Coordinatensystemen mit den Mittelpunkten O_e, O_r, O_d drei ebene Coordinatensysteme gelegt, welche diese Punkte als Anfangspunkte haben, und deren Axen parallel den Axen x, y, z sind. Und indem man in (33.) und (35.) r, φ, ψ und x, y, z durch die entsprechenden Werthe ersetzt, welche diese Coordinaten für die einfallende, reflectirte und gebrochene Welle annehmen, erhält man die ebenen Componenten der Verrückungen und elastischen Kräfte für die drei Wellen, die dann noch durch Parallelverschiebung auf die Coordinatenaxen x, y, z zu transformiren sind, wobei die Form der Formeln ungeändert bleibt.

Form erhalten durch Benutzung der experimentell gefundenen Thatsache, dass der reflectirte und gebrochene Strahl in der Einfallsebene liegen. Daher sind O_e, O_r, O_d Punkte dieser Ebene. Es sei die xy-Ebene die Einfallsebene, dann fallen die Aequatorebenen der drei sphärischen Coordinatensysteme O_e, O_r, O_d mit der xy-Ebene zusammen. Daher ist $\varphi_e = \varphi_r = \varphi_d = \varphi = 0$, und die obigen Formeln (33.) und (35.) gehen in die folgenden über:

$$(36^a.) \qquad \begin{cases} u = c'U - s'W, \\ v = s'U + c'W, \\ w = V; \end{cases}$$

$$(36^b.) \qquad \begin{cases} X_x = c'^2 N_1 - 2s'c'T_2 + s'^2 N_3, \\ Y_x = c's'N_1 + (1-2s'^2)T_2 - s'c'N_3, \\ Z_x = c'T_3 - s'T_1. \end{cases}$$

In die Formeln (36^a.) und (36^b.) sind für U, V, W nach (7.) die entsprechenden Werthe für die einfallende, reflectirte und gebrochene Welle einzusetzen und dann die Bedingungsgleichungen (31^a.) und (31^b.) zu bilden.

§ 5.

Bedingung der Gleichheit der lebendigen Kraft.

Bei der angenommenen Lage des Coordinatensystems findet die Bewegung in der xy-Ebene statt, mit welcher die Aequatorebenen der drei sphärischen Coordinatensysteme um O_e, O_r, O_d zusammenfallen gelassen sind. Das reflectirende Flächenelement $dydz$, dessen Normale der x-Axe parallel gedacht ist, sei $ABCD$. Die Winkel ψ_e, ψ_r, ψ_d mögen, wie früher ψ, von der x-Axe an in demselben Sinne wachsend gerechnet werden, so dass die Richtung der x-Axe in den drei Coordinatensystemen durch die Werthe $\psi_e = \psi_r = \psi_d = 0$ bestimmt wird. Dann ist ψ_e der Einfallswinkel, $2R - \psi_r$ der Reflexionswinkel und ψ_d der Brechungswinkel. Die Projectionen des Flächenelements $ABCD$ auf die Kugelflächen, welche mit den Radien O_eA, O_rB, O_dB um O_e, O_r und O_d beschrieben sind, seien ADC_eB_e, BCD_rA_r und BCD_dA_d. Dann wird die lebendige Kraft der einfallenden Bewegung, welche in dem prismatischen Raume $ABCDB_eC_e$ enthalten ist, sich nach einer gewissen Zeit den Aethertheilchen in den Räumen $ABCDA_rD_r$ und $ABCDA_dD_d$ mitgetheilt haben. Es sind zunächst die in diesen Räumen enthaltenen Aethermassen zu berechnen.

In einer kleinen Zeit dt schreitet die einfallende Welle um B_eB, die reflectirte um AA_r, die gebrochene um AA_d fort. Daher ist $B_eB = \frac{l}{T}dt$, $AA_r = \frac{l}{T}dt$, $AA_d = \frac{l'}{T}dt$, wenn mit l und l' die Wellenlängen, mit T die Schwingungsdauer bezeichnet werden. Ferner folgt aus den rechtwinkligen Dreiecken ABB_e, ABA_r, ABA_d, wenn die kleine Bogenseite als gerade Linie angesehen wird, $AB_e = AB\cos\psi_e$, $BA_r = AB\cos(2R-\psi_r)$, $BA_d = AB\cos\psi_d$. Daher sind die genannten Prismen $l\cos\psi_e \frac{AB.BC.dt}{T}$, $l\cos(2R-\psi_r)\frac{AB.BC.dt}{T}$, $l'\cos\psi_d \frac{AB.BC.dt}{T}$. Diese sind mit den Dichtigkeiten ϱ und ϱ' und mit den halben Quadraten der Geschwindigkeiten der bewegten Aethertheilchen zu multipliciren. Die letzteren pflegt man durch Mittelwerthe der Quadrate der Geschwindigkeiten zu ersetzen. Nun seien die Componenten einer Verrückung

$$(37.)\quad \begin{cases} U = U_0\cos\left(\vartheta - \frac{t}{T}\right)2\pi + U_1\sin\left(\vartheta - \frac{t}{T}\right)2\pi, \\ V = V_0\cos\left(\vartheta - \frac{t}{T}\right)2\pi + V_1\sin\left(\vartheta - \frac{t}{T}\right)2\pi, \\ W = W_0\cos\left(\vartheta - \frac{t}{T}\right)2\pi + W_1\sin\left(\vartheta - \frac{t}{T}\right)2\pi, \end{cases}$$

so ergiebt sich mit Rücksicht auf die Beziehungen

$$\int_0^T \sin^2\left(\vartheta - \frac{t}{T}\right)2\pi\,dt = \int_0^T \cos^2\left(\vartheta - \frac{t}{T}\right)2\pi\,dt = \frac{T}{2},$$

$$\int_0^T \sin\left(\vartheta - \frac{t}{T}\right)4\pi\,dt = 0$$

für den Mittelwerth des Quadrates der Geschwindigkeit

$$(38.)\quad \frac{1}{T}\int_0^T \left\{\left(\frac{dU}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dt}\right)^2\right\} dt = \frac{2\pi^2}{T^2}\{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2 + U_1^2 + V_1^2 + W_1^2\}.$$

Wird jetzt zur Abkürzung gesetzt

$$(38^a.)\qquad \mathfrak{X} = U_0^2 + V_0^2 + W_0^2 + U_1^2 + V_1^2 + W_1^2,$$

so erhält man bei Weglassung eines constanten Factors als Ausdruck für den Satz der Erhaltung der lebendigen Kraft

$$(39.)\qquad \mathfrak{X}_e\varrho l\cos\psi_e = \mathfrak{X}_r\varrho l\cos(2R-\psi_r) + \mathfrak{X}_d\varrho' l'\cos\psi_d,$$

wo die Indices e, r, d die gleiche Bedeutung wie oben haben.

Aus den genannten rechtwinkligen Dreiecken folgt $B_eB = AB\sin\psi_e$, $A_rA = AB\sin(2R-\psi_r)$, $A_dA = AB\sin\psi_d$, und mit Rücksicht auf die vorigen

Werthe für B_eB, A_rA und A_dA

$$(40.)\qquad \frac{\sin\psi_e}{l} = \frac{\sin\psi_r}{l} = \frac{\sin\psi_d}{l'},$$

also $\psi_r = \psi_e$ oder $\psi_r = 2R - \psi_e$ und das bekannte Brechungsgesetz. Offenbar ist nur der letztere Werth für ψ_r möglich. Man erhält also für das reflectirende Flächenelement die Beziehungen

$$(41.)\qquad r_r = r_e \quad \text{und} \quad \psi_r = 2R - \psi_e;$$

und der Satz der Erhaltung der lebendigen Kraft erhält jetzt den einfacheren Ausdruck

$$(42.)\qquad (\mathfrak{X}_e - \mathfrak{X}_r)\varrho l\cos\psi_e = \mathfrak{X}_d\varrho' l'\cos\varphi_d.$$

§ 6.

Torsionsschwingungen.

Bis hierher sind die Formeln allgemein entwickelt. Von jetzt an werden nur transversale Schwingungen in Betracht gezogen, und zwar beschränke ich mich auf solche Schwingungen, welche auf der Fortpflanzungsrichtung senkrecht stehen. Für transversale Schwingungen anderer Art ist das vorliegende Problem in gleicher Weise durchführbar.

Die Torsionsschwingungen erfolgen stets in zwei zu einander senkrechten Ebenen und werden durch (7.) und (17.) dargestellt, wenn $\theta = 0$ und $\psi = \text{const.}$ gesetzt wird. Dadurch erhalten wir bei der genannten Beschränkung und bei Weglassung constanter Factoren

$$(43^a.)\qquad \left\{\begin{aligned} U &= 0\\ V &= 0\\ W &= \frac{1}{r}\frac{d\mathfrak{F}}{d\varphi} + \frac{\mathfrak{f}}{rc} \end{aligned}\right\}$$ für Schwingungen parallel der Aequatorebene, also für Schwingungen in der Einfallsebene;

$$(43^b.)\qquad \left\{\begin{aligned} U &= 0\\ V &= \frac{\mathfrak{f}}{rc}\\ W &= 0 \end{aligned}\right\}$$ für Meridianschwingungen, also für Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene.

Bei Bildung des ersten Werthsystemes ist $\mathfrak{F}$ durch $-\mathfrak{F}$ ersetzt, was der willkürlichen Constanten wegen gestattet ist.

Da in (43ª.) und (43ᵇ.) $U = 0$ ist, so steht bei den hierdurch dargestellten Kugelwellen die Schwingungsrichtung auf der Fortpflanzungsrichtung senkrecht.

Um nun die Grenzbedingungen für die durch (43ª.) und (43ᵇ.) dargestellten Componenten einer Verrückung zu erhalten, hat man in die Ausdrücke (34.) für die Componenten der elastischen Kräfte $\theta = 0$, $\psi = \text{const.}$ und ausserdem $\varphi = 0$ zu setzen, weil die Aequatorebene der im vorigen Paragraphen eingeführten sphärischen Coordinatensysteme mit der Einfallsebene zusammenfallen gelassen ist; und bildet man ferner die entsprechenden Ausdrücke (36ª.) und (36ᵇ.) für die Componenten einer Verrückung und für die Componenten der elastischen Kräfte im Coordinatensysteme x, y, z, so erhält man, wenn zur Vereinfachung nur die nicht verschwindenden Componenten der elastischen Kräfte genannt werden, folgende Formeln, und zwar

1) für Schwingungen in der Einfallsebene:

$$(44^{a}.)\quad \left\{\begin{array}{lll} T_1 = \dfrac{\mu}{r}\dfrac{dW}{d\varphi}, & u = -s'W, & X_x = -2s'c'T_2, \\ T_2 = \mu\left(\dfrac{dW}{dr} - \dfrac{W}{r}\right); & v = c'W, & Y_x = (1-2s'^2)T_2, \\ & w = 0, & Z_x = -s'T_1 \end{array}\right\} \text{ für } \varphi = 0.$$

2) für Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene:

$$(44^{b}.)\quad \left\{\begin{array}{lll} T_3 = \mu\left(\dfrac{dV}{dr} - \dfrac{V}{r}\right); & u = 0, & X_x = 0 \\ & v = 0, & Y_x = 0 \\ & w = V; & Z_x = c'T_3 \end{array}\right\} \text{ für } \varphi = 0.$$

Wir erhalten jetzt die Grenzbedingungen (31ª.) und (31ᵇ.) in folgender Form:

I. Schwingungen in der Einfallsebene.

$$(45^{a}.)\quad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} s'_e W_e + s'_r W_r = s'_d W_d, \\ c'_e W_e + c'_r W_r = c'_d W_d, \end{array}\right\} \text{ Gleichheit der Verrückungen.} \\ \left.\begin{array}{l} X_{xe} + X_{xr} = X_{xd}, \\ Y_{xe} + Y_{xr} = Y_{xd}, \\ Z_{xe} + Z_{xr} = Z_{xd}, \end{array}\right\} \text{ Gleichheit der elastischen Druckkräfte.} \\ \text{Hier ist:} \\ X_x = -2s'c'\mu\left(\dfrac{dW}{dr} - \dfrac{W}{r}\right), \\ Y_x = (1-2s'^2)\mu\left(\dfrac{dW}{dr} - \dfrac{W}{r}\right), \\ Z_x = -s'\dfrac{\mu}{r}\dfrac{dW}{d\varphi}. \end{array}\right.$$

II. Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene.

$$(45^{b}.)\quad \begin{cases} V_e + V_r = V_d & \text{Gleichheit der Verrückungen,} \\ Z_{xe} + Z_{xr} = Z_{xd} & \text{Gleichheit der elastischen Druckkräfte.} \\ \text{Hier ist:} \\ Z_x = c'\mu\left(\dfrac{dV}{dr} - \dfrac{V}{r}\right). \end{cases}$$

In (45ª.) und (45ᵇ.) ist für $\varphi = 0$, $\psi = \text{const.} = \bar{\psi}$, $r = \text{const.} = \bar{r}$ zu setzen. Die Bedingung der Erhaltung der lebendigen Kraft (42.) wird später hinzugefügt.

§ 7.

Torsionsschwingungen in der Einfallsebene.

Für Schwingungen in der Einfallsebene ist die nicht verschwindende sphärische Componente einer Verrückung nach (43ª.) und (19.) gegeben durch

$$(46.)\qquad W = \frac{1}{r}\frac{d\mathfrak{F}_3}{d\varphi} + \frac{f}{rc}$$

für $\varphi = 0$. Für $\mathfrak{F}$ in (19.) ist nur der Werth $\mathfrak{F}_3$ benutzt, da $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ hier nicht in Betracht kommen.

$\mathfrak{F}_3$ enthält die Kugelfunction S^n als Factor; daher ist zu beachten, dass der erste Differentialquotient $\frac{dS^n}{d\varphi}$ für $\varphi = 0$ nicht verschwindet, wenn n ungerade ist, während alsdann der zweite Differentialquotient $\frac{d^2S^n}{d\varphi^2}$ verschwindet. Denn S^n hängt hier nur von der Variablen φ ab und wird als Integral der Gleichung

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{d}{d\varphi}\cos\varphi\frac{dS^n}{d\varphi} + n(n+1)S^n = 0$$

definirt durch den Ausdruck:

$$S^n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\left\{\sin^n\varphi - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\sin^{n-2}\varphi + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}\sin^{n-4}\varphi - \cdots\right\}.$$

Daher ist n, damit das erste Glied in (46.) nicht verschwindet, als ungerade Zahl anzunehmen.

Dann aber verschwindet, weil f in (46.) von φ unabhängig ist, Z_x in (45ª.). Somit wird die dritte der Bedingungen, welche die Gleichheit der elastischen Druckkräfte ausdrückt, von selbst erfüllt.

Mit Rücksicht auf (30ª.) und, weil f der Gleichung (11ᵇ.) genügt,

erhalten wir jetzt, wenn wir uns den Factor $\left(\frac{dS^n}{d\varphi}\right)_{\varphi=0}$ mit den zu bestimmenden Constanten vereinigt denken:

$$(47.)\quad W = \frac{1}{r}\left\{(A_0-D_n)\sin\left(\frac{r}{l}-\frac{t}{T}\right)2\pi+(B_0+C_n)\cos\left(\frac{r}{l}-\frac{t}{T}\right)2\pi\right\}.$$

Dieser Werth W ist nun für die einfallende, reflectirte und gebrochene Welle zu bilden. Werden dieselben wie früher durch die Indices e, r, d unterschieden, und die Wellenlängen wieder mit l und l' bezeichnet, so ergiebt sich

$$(48.)\quad \begin{cases} W_e = E\sin\left(\frac{r_e}{l}-\frac{t}{T}\right)2\pi+E'\cos\left(\frac{r_e}{l}-\frac{t}{T}\right)2\pi, \\ W_r = R\sin\left(\frac{r_r}{l}-\frac{t}{T}\right)2\pi+R'\cos\left(\frac{r_r}{l}-\frac{t}{T}\right)2\pi, \\ W_d = D\sin\left(\frac{r_d}{l'}-\frac{t}{T}\right)2\pi+D'\cos\left(\frac{r_d}{l'}-\frac{t}{T}\right)2\pi, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$(48^a.)\qquad E=\frac{1}{r_e}(A_{0e}-D_{ne}),\qquad E'=\frac{1}{r_e}(B_{0e}+C_{ne}).$$

Die Amplituden R und R' der reflectirten und D und D' der gebrochenen Wellen gehen aus (48ª.) hervor, wenn e durch r resp. d ersetzt wird.

Damit nun zunächst die Bedingungen der Gleichheit der Componenten der Verrückungen in (45ª.) erfüllt werden, muss für das reflectirende Flächenelement sein

$$(49.)\qquad \frac{r_e}{l}=\frac{r_r}{l}=\frac{r_d}{l'}.$$

Hieraus folgt, wie sich schon früher ergeben hat, $r_r = r_e$. Nach (49.) ist, wenn noch die Beziehung $\psi_r = 2R-\psi_e$ in (41.) sowie (40.) berücksichtigt wird, die Lage der Punkte O_r und O_d, von denen die reflectirte und gebrochene Welle zu divergiren scheinen, in der Einfallsebene bestimmt.

Mit Rücksicht auf die genannten Beziehungen gehen die Bedingungen der Gleichheit der Verrückungen in (45ª.), wo an die Bedeutung der Zeichen $s' = \sin\psi$, $c' = \cos\psi$ erinnert werden möge, über in:

$$(49^a.)\quad \begin{cases} (E+R)\sin\psi_e = D\sin\psi_d, & (E'+R')\sin\psi_e = D'\sin\psi_d, \\ (E-R)\cos\psi_e = D\cos\psi_d; & (E'-R')\cos\psi_e = D'\cos\psi_d. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich

$$(50.)\quad \begin{cases} R = -\frac{\sin(\psi_e-\psi_d)}{\sin(\psi_e+\psi_d)}E, & R' = -\frac{\sin(\psi_e-\psi_d)}{\sin(\psi_e+\psi_d)}E', \\ D = \frac{\sin 2\psi_e}{\sin(\psi_e+\psi_d)}E; & D' = \frac{\sin 2\psi_e}{\sin(\psi_e+\psi_d)}E' \end{cases}$$

in genauer Uebereinstimmung mit dem *Fresnel*schen Ausdruck für die Amplitude der reflectirten Welle und mit dem *F. Neumann*schen Ausdruck für die Amplitude der gebrochenen Welle.

Die Gleichung (42.) für die lebendige Kraft geht durch (48.) über in

$$(E^2+E'^2)-(R^2+R'^2) = \frac{\varrho' l'}{\varrho l}\frac{\cos\psi_d}{\cos\psi_e}(D^2+D'^2)$$

und durch die eben gefundenen Ausdrücke für die Amplituden in

$$(E^2+E'^2)\left\{1-\frac{\sin^2(\psi_e-\psi_d)}{\sin^2(\psi_e+\psi_d)}\right\} = (E^2+E'^2)\frac{\varrho'}{\varrho}\frac{\sin\psi_d\cos\psi_d}{\sin\psi_e\cos\psi_e}\frac{\sin^2 2\psi_e}{\sin^2(\psi_e+\psi_d)}.$$

Zerlegt man die zweite Klammer der linken Seite in Factoren, so zeigt eine einfache Rechnung, dass die von ψ_e und ψ_d abhängigen Factoren der beiden Seiten der Gleichung einander gleich werden; und da diese Factoren im allgemeinen nicht verschwinden können, und weil auch $E^2+E'^2$ nicht gleich Null sein kann, so folgt

(51.) $$\varrho = \varrho'.$$

Diese Beziehung, welche die Gleichheit der Dichtigkeiten in den beiden durch die reflectirende Grenzfläche getrennten Medien aussagt, wird im allgemeinen für zwei Medien nicht bestehen. Daher werden im allgemeinen Schwingungen der betrachteten Art nicht möglich sein. Für den Lichtäther nehme ich die Beziehung (51.) mit *F. Neumann* an.

In (50.) sind die Werthe (48ª.) für E und E' und die entsprechenden für R, R' und D, D' einzusetzen. Dadurch ergeben sich vier Gleichungen zur Bestimmung der Constanten A und B in (47.). Um die Rechnung zu vereinfachen, setzen wir von jetzt an $n=1$. Für andere Werthe von n ist die Rechnung in ähnlicher Weise durchführbar, ohne dass sich wesentlich andere Resultate ergeben.

Wir erhalten zunächst mit Rücksicht auf (28.) und (26.):

(52.)
$$\begin{cases} \frac{1}{r}(A_0-D_n)_{n=1} = \frac{1}{r}\left(A_0-\frac{A_1}{q}+B_1\right), \\ \frac{1}{r}(B_0+C_n)_{n=1} = \frac{1}{r}\left(B_0+A_1+\frac{B_1}{q}\right); \end{cases}$$

und setzen wir zur Abkürzung

(53.) $$\varepsilon = -\frac{\sin(\psi_e-\psi_d)}{\sin(\psi_e+\psi_d)}, \qquad \varepsilon' = \frac{\sin\psi_d}{\sin\psi_e}\frac{\sin 2\psi_e}{\sin(\psi_e+\psi_d)} = 1+\varepsilon$$

und beachten, dass $q = \frac{r}{l}2\pi$ in (20.) infolge (49.) für die Grenzfläche in

allen drei Wellen denselben Werth behält, so gehen aus (50.) mit Rücksicht auf die Beziehungen $r_r = r_e$ und $\frac{r_d}{r_e} = \frac{l'}{l} = \frac{\sin\psi_d}{\sin\psi_e}$ folgende vier Gleichungen hervor:

$$(54^{a}.)\qquad \begin{cases} A_0 - \frac{A_{1r}}{q} + B_{1r} = \varepsilon\left(A_{0e} - \frac{A_{1e}}{q} + B_{1e}\right), \\ B_{0r} + A_{1r} + \frac{B_{1r}}{q} = \varepsilon\left(B_{0e} + A_{1e} + \frac{B_{1e}}{q}\right); \end{cases}$$

$$(54^{b}.)\qquad \begin{cases} A_{0d} - \frac{A_{1d}}{q} + B_{1d} = \varepsilon'\left(A_{0e} - \frac{A_1}{q} + B_{1e}\right), \\ B_{0d} + A_{1d} + \frac{B_{1d}}{q} = \varepsilon'\left(B_{0e} + A_{1e} + \frac{B_{1e}}{q}\right). \end{cases}$$

Dieses sind vier Gleichungen mit den acht Unbekannten A_{0r}, A_{0d}, B_{0r}, B_{0d}, A_{1r}, A_{1d}, B_{1r}, B_{1d}. Vier weitere Gleichungen liefern die Bedingungen der Gleichheit der Componenten der elastischen Kräfte. Diese Bedingungen sollen nun aufgestellt werden.

Zunächst geht aus (47.) für $n = 1$ hervor:

$$(55^{a}.)\qquad \frac{dW}{dr} - \frac{W}{r} = \mathfrak{A}\sin\left(\frac{r}{l} - \frac{t}{T}\right)2\pi + \mathfrak{B}\cos\left(\frac{r}{l} - \frac{t}{T}\right)2\pi,$$

wo gesetzt ist

$$(55^{b}.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A} = \frac{1}{r^2}\left\{-2A_0 - qB_0 - \left(q - \frac{3}{q}\right)A_1 - 3B_1\right\}, \\ \mathfrak{B} = \frac{1}{r^2}\left\{qA_0 - 2B_0 - 3A_1 + \left(q - \frac{3}{q}\right)B_1\right\}. \end{cases}$$

Durch (55^{b}.) gehen die Bedingungen der Gleichheit der elastischen Druckkräfte (45^{a}.), von denen die letzte, wie gezeigt wurde, von selbst erfüllt ist, in die folgenden

$$\sin\psi_e\cos\psi_e\mu(\mathfrak{A}_e - \mathfrak{A}_r) = \sin\psi_d\cos\psi_d\mu'\mathfrak{A}_d,$$
$$(1 - 2\sin^2\psi_e)\mu(\mathfrak{A}_e + \mathfrak{A}_r) = (1 - 2\sin^2\psi_d)\mu'\mathfrak{A}_d$$

und in zwei entsprechende zwischen $\mathfrak{B}_e$, $\mathfrak{B}_r$, $\mathfrak{B}_d$ über. μ und μ' bezeichnen die Elasticitätsconstanten der beiden Medien.

Nun folgt aus der dritten Beziehung (1^{c}.), wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω_2 durch $\frac{l}{T}$ ersetzt wird, $\frac{\mu}{\varrho} = \frac{l^2}{T^2}$ und für das zweite Medium $\frac{\mu'}{\varrho'} = \frac{l'^2}{T^2}$, also ist

$$(56.)\qquad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{\varrho'}{\varrho}\frac{l'^2}{l^2}.$$

Und da sich $\varrho = \varrho'$ sowie $\frac{l'}{l} = \frac{\sin\psi_d}{\sin\psi_e}$ ergeben hat, so nehmen die obigen Grenzbedingungen die folgende Form an:

$$\mathfrak{A}_e - \mathfrak{A}_r = \frac{\sin 2\psi_d}{\sin 2\psi_e}\frac{\sin^2\psi_d}{\sin^2\psi_e}\mathfrak{A}_d,$$

$$\mathfrak{A}_e + \mathfrak{A}_r = \frac{\cos 2\psi_d}{\cos 2\psi_e}\frac{\sin^2\psi_d}{\sin^2\psi_e}\mathfrak{A}_d.$$

Entsprechende Gleichungen bestehen zwischen $\mathfrak{B}_e$, $\mathfrak{B}_r$, $\mathfrak{B}_d$. Hieraus folgt

$$(57.)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_r = \dfrac{\sin 2(\psi_e-\psi_d)}{\sin 2(\psi_e+\psi_d)}\mathfrak{A}_e, & \mathfrak{B}_r = \dfrac{\sin 2(\psi_e-\psi_d)}{\sin 2(\psi_e+\psi_d)}\mathfrak{B}_e, \\ \mathfrak{A}_d = \dfrac{\sin^2\psi_e}{\sin^2\psi_d}\dfrac{\sin 4\psi_e}{\sin 2(\psi_e+\psi_d)}\mathfrak{A}_e, & \mathfrak{B}_d = \dfrac{\sin^2\psi_e}{\sin^2\psi_d}\dfrac{\sin 4\psi_e}{\sin 2(\psi_e+\psi_d)}\mathfrak{B}_e. \end{cases}$$

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$\delta = \frac{\sin 2(\psi_e-\psi_d)}{\sin 2(\psi_e+\psi_d)}, \quad \delta' = \frac{\sin 4\psi_e}{\sin 2(\psi_e+\psi_d)},$$

so gehen aus (57.) durch (55^b.) die folgenden Gleichungen hervor:

$$-2A_{0r} - qB_{0r} - \left(q-\frac{3}{q}\right)A_{1r} - 3B_{1r} = \delta\left\{-2A_{0e} - qB_{0e} - \left(q-\frac{3}{q}\right)A_{1e} - 3B_{1e}\right\},$$

$$qA_{0r} - 2B_{0r} - 3A_{1r} + \left(q-\frac{3}{q}\right)B_{1r} = \delta\left\{qA_{0e} - 2B_{0e} - 3A_{1e} + \left(q-\frac{3}{q}\right)B_{1e}\right\};$$

$$-2A_{0d} - qB_{0d} - \left(q-\frac{3}{q}\right)A_{1d} - 3B_{1d} = \delta'\left\{-2A_{0e} - qB_{0e} - \left(q-\frac{3}{q}\right)A_{1e} - 3B_{1e}\right\},$$

$$qA_{0d} - 2B_{0d} - 3A_{1d} + \left(q-\frac{3}{q}\right)B_{1d} = \delta'\left\{qA_{0e} - 2B_{0e} - 3A_{1e} + \left(q-\frac{3}{q}\right)B_{1e}\right\}.$$

Diese vier Gleichungen bestimmen mit den Gleichungen (54^a.) und (54^b.) die gesuchten acht Constanten. Es ergiebt sich

$$(58.)\quad \begin{cases} A_{0r} = a_0A_{0e} + b_0B_{0e} + c_0A_{1e} + d_0B_{1e}, \\ B_{0r} = -b_0A_{0e} + a_0B_{0e} + d_0A_{1e} - c_0B_{1e}, \\ A_{1r} = a_1A_{0e} + b_1B_{0e} + c_1A_{1e} + d_1B_{1e}, \\ B_{1r} = b_1A_{0e} - a_1B_{0e} - d_1A_{1e} + c_1B_{1e}, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(58^a.)\quad \begin{cases} a_0 = 3\varepsilon - 2\delta - q^2(\varepsilon-\delta), & a_1 = 2q(\varepsilon-\delta), \\ b_0 = 3q(\varepsilon-\delta), & b_1 = q^2(\varepsilon-\delta), \\ c_0 = \dfrac{4q^2-3}{q}(\varepsilon-\delta), & c_1 = -2\varepsilon + 3\delta + q^2(\varepsilon-\delta), \\ d_0 = (6-q^2)(\varepsilon-\delta); & d_1 = 3q(\varepsilon-\delta). \end{cases}$$

Die Werthe für die Constanten A_{0d}, B_{0d}, A_{1d}, B_{1d} gehen der Reihe nach aus denen für A_{0r}, B_{0r}, A_{1r}, B_{1r} hervor, wenn ε durch ε' und δ durch δ' ersetzt werden. Somit ist allen Grenzbedingungen Genüge geleistet.

Bisher wurde der übersichtlicheren Darstellung wegen für den Ausdruck, welcher die einfallende Welle lieferte, die gleiche Form wie für die anderen Wellen gewählt. Jetzt mögen drei der noch willkürlichen Constanten gleich Null gesetzt werden z. B. B_{0e}, A_{1e}, B_{1e}. Dann erhält man aus (48ª.) und (52.):

$$(59.)\quad \begin{cases} E = \dfrac{A_{0e}}{r_e}, & E' = 0, \\ R = \dfrac{1}{r_r}\left(A_{0r} - \dfrac{A_{1r}}{q_r} + B_{1r}\right), & R' = \dfrac{1}{r_r}\left(B_{0r} + A_{1r} + \dfrac{B_{1r}}{q_r}\right). \end{cases}$$

Die Werthe für D und D' entstehen aus R und R', wenn r_r durch r_d und ε, δ durch ε', δ' ersetzt werden.

r_r und r_d in (58ª.) und den entsprechenden, aus (58ª.) zu bildenden Formeln beziehen sich auf die Grenzfläche und mögen nun mit $\bar{r}_r$ und $\bar{r}_d$ bezeichnet werden. Dann erhält man schliesslich aus (48.) und (59.):

$$(60.)\quad \begin{cases} W_e = \dfrac{A_{0e}}{r_e}\sin\left(\dfrac{r_e}{l} - \dfrac{t}{T}\right)2\pi, \\ W_r = \dfrac{A_{0e}}{r_r}\left\{\left(\varepsilon + 2(\varepsilon-\delta)\left(1-\dfrac{\bar{r}_r}{r_r}\right)\right)\sin\left(\dfrac{r_r}{l} - \dfrac{t}{T}\right)2\pi \right. \\ \qquad\qquad \left. - \dfrac{\bar{r}_r}{l}\,2\pi(\varepsilon-\delta)\left(1-\dfrac{\bar{r}_r}{r_r}\right)\cos\left(\dfrac{r_r}{l} - \dfrac{t}{T}\right)2\pi\right\}, \\ W_d = \dfrac{A_{0e}}{r_d}\left\{\left(\varepsilon' + 2(\varepsilon'-\delta')\left(1-\dfrac{\bar{r}_d}{r_d}\right)\right)\sin\left(\dfrac{r_d}{l'} - \dfrac{t}{T}\right)2\pi \right. \\ \qquad\qquad \left. - \dfrac{\bar{r}_d}{l'}\,2\pi(\varepsilon'-\delta')\left(1-\dfrac{\bar{r}_d}{r_d}\right)\cos\left(\dfrac{r_d}{l'} - \dfrac{t}{T}\right)2\pi\right\}. \end{cases}$$

Hieraus folgt für die Grenzfläche, also für $r_r = \bar{r}_r$ und $r_d = \bar{r}_d$ bei Beachtung der für die Grenzfläche geltenden Beziehungen

$$W_r = \varepsilon W_e, \quad W_d = \varepsilon' \frac{A_{0e}}{r_d} = \varepsilon' W_e \frac{r_e}{r_d} = \varepsilon' W_e \frac{\sin\psi_e}{\sin\psi_d}$$

und mit Rücksicht auf (50.):

$$(60ª.)\qquad W_r = -\frac{\sin(\psi_e-\psi_d)}{\sin(\psi_e+\psi_d)} W_e, \quad W_d = \frac{\sin 2\psi_e}{\sin(\psi_e+\psi_d)} W_e.$$

Es ergeben sich also die gleichen Formeln wie aus (50.) und (48.).

(61ª.)

Für parallel einfallende Wellenstrahlen, d. h. wenn das Erschütterungscentrum O_e für die einfallende Welle und infolge dessen auch die Erschütterungscentra O_r und O_d für die reflectirte und gebrochene Welle unendlich fern vom reflectirenden Flächenelement liegen, kann $r_r = \bar{r}_r$ und $r_d = \bar{r}_d$ gesetzt werden. Dann gehen aus (60.) die einfacheren Formeln hervor:

$$(60^{b}.) \qquad \begin{cases} W_e = \dfrac{A_{0e}}{r_e} \sin\left(\dfrac{r_e}{l} - \dfrac{t}{T}\right) 2\pi, \\ W_r = \varepsilon \dfrac{A_{0e}}{r_r} \sin\left(\dfrac{r_r}{l} - \dfrac{t}{T}\right) 2\pi, \\ W_d = \varepsilon' \dfrac{A_{0e}}{r_d} \sin\left(\dfrac{r_d}{l'} - \dfrac{t}{T}\right) 2\pi. \end{cases}$$

Nur für Lichtwellen, für welche die Wellenlängen l und l' gegen $r_r - \bar{r}_r$ und $r_d - \bar{r}_d$ im allgemeinen unendlich klein sind, ist die Herleitung der Formeln (60^{b}.) aus (60.) nicht gestattet. Es werden sich aber in § 10 die gleichen Formeln (60^{b}.) sowohl für parallel als für divergirend einfallendes Licht ergeben.

Würde man in (58.) von den vier Constanten A_{0e}, B_{0e}, A_{1e}, B_{1e} entweder A_{1e} oder B_{1e} nicht verschwinden gelassen haben, so würde anstatt (60^{b}.) ein Werthsystem erhalten sein, für welches sich die Amplituden umgekehrt proportional der zweiten Potenz der Entfernung ergeben hätten. Sie würden umgekehrt proportional höheren Potenzen der Entfernung geworden sein, wenn in (47.) $n = 3, 5, 7, \ldots$ gesetzt worden wäre.

§ 8.

Torsionsschwingungen senkrecht zur Einfallsebene.

Es ist nach (43^{b}.) zu zeigen, dass der Ausdruck

$$(61.) \qquad V = \frac{A}{r} \sin\left(\frac{r}{l} - \frac{t}{T}\right) 2\pi$$

den Bedingungen (45^{b}.) sowie der Gleichung der lebendigen Kraft (42.) genügt. Hier ist

$$(61^{a}.) \qquad V_e = \frac{A_e}{r_e} \sin\left(\frac{r_e}{l} - \frac{t}{T}\right) 2\pi, \quad V_r = \frac{A_r}{r_r} \sin\left(\frac{r_r}{l} - \frac{t}{T}\right) 2\pi, \quad V_d = \frac{A_d}{r_d} \sin\left(\frac{r_d}{l'} - \frac{t}{T}\right) 2\pi.$$

Die Bedingung der Gleichung der Verrückungen ergiebt zunächst wieder die Beziehungen (49.) und $r_r = r_e$, also wegen (40.) $\psi_r = 2R - \psi_e$. Dann

geht die Bedingung der Gleichheit der Verrückungen und die Gleichung der lebendigen Kraft, wo die in (51.) gewonnene Beziehung $\varrho = \varrho'$ eingeführt werden soll, über in

$$A_e + A_r = \frac{r_e}{r_d} A_d,$$

$$A_e^2 - A_r^2 = \frac{r_e^2}{r_d^2} \frac{l'}{l} \frac{\cos\psi_d}{\cos\psi_e} A_d^2.$$

Aus beiden Gleichungen folgt durch Division wegen (49.)

$$A_e - A_r = \frac{\cos\psi_d}{\cos\psi_e} A_d. \tag{62.}$$

Hieraus und aus der ersten Gleichung, welche durch (49.) und (40.) geschrieben werden kann

$$A_e + A_r = \frac{\sin\psi_e}{\sin\psi_d} A_d,$$

folgt

$$\begin{cases} A_r = \dfrac{\operatorname{tg}(\psi_e - \psi_d)}{\operatorname{tg}(\psi_e + \psi_d)} A_e, \\ A_d = (A_e + A_r) \dfrac{\sin\psi_d}{\sin\psi_e} = \dfrac{2\sin\psi_d \cos\psi_e}{\sin(\psi_e + \psi_d)\sin(\psi_e - \psi_d)}. \end{cases} \tag{63.}$$

Dies sind die *Fresnel*schen Formeln bis auf das Vorzeichen von A_r, welches die bekannte Erklärung findet.

Es ist noch zu zeigen, dass das obige Werthsystem (61.) auch der Bedingung der Gleichheit der elastischen Druckkräfte genügt. Zunächst folgt

$$\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} = \frac{A 2\pi}{r l} \cos\left(\frac{r}{l} - \frac{t}{T}\right) 2\pi - \frac{2A}{r^2} \sin\left(\frac{r}{l} - \frac{t}{T}\right) 2\pi.$$

Dieser Ausdruck kann geschrieben werden

$$\frac{A}{l^2} \left\{ 2\pi \frac{l}{r} \cos\left(\frac{r}{l} - \frac{t}{T}\right) 2\pi - 2\left(\frac{l}{r}\right)^2 \sin\left(\frac{r}{l} - \frac{t}{T}\right) 2\pi \right\}.$$

Da der Klammerausdruck infolge der Beziehungen $r_r = r_e$ und (49.), welche sich für die Grenzfläche ergeben haben, in dieser sowohl für die einfallende als für die reflectirte und gebrochene Welle denselben Werth annimmt, so wird die Bedingung der Gleichheit der elastischen Kräfte in (45^b.) erfüllt sein, wenn der Gleichung

$$\frac{\mu}{l^2} \cos\psi_e (A_e - A_r) = \frac{\mu'}{l'^2} \cos\psi_d A_d$$

genügt wird. Diese Gleichung aber geht nach (56.) (für $\varrho = \varrho'$) in (62.) über und ist somit erfüllt.

Aus (61ª.) und (63.) folgt jetzt für die Grenzfläche:

$$(63^{a}.) \qquad V_r = \frac{\operatorname{tg}(\psi_e - \psi_d)}{\operatorname{tg}(\psi_e + \psi_d)} V_e, \quad V_d = V_e + V_r.$$

§ 9.

Allgemeinere transversale Schwingungen in der Einfallsebene.

Aus den in (7.) mit (17.) aufgestellten Integralsystemen der Elasticitätsgleichungen ist ein Integralsystem zu wählen, in welchem für $\varphi = 0$ nur die sphärische Componente W einer Verrückung einen Werth hat. Dieser Bedingung genügt bei passender Wahl der Constanten das Werthsystem

$$(64.) \qquad \begin{cases} U = 0, \\ V = \frac{1}{r}\left\{\frac{1}{\cos\varphi}\frac{d\mathfrak{F}}{d\psi} + f\frac{dZ}{d\varphi}\right\}, \\ W = \frac{1}{r\cos\varphi}\left\{-\cos\varphi\frac{d\mathfrak{F}}{d\varphi} + f\frac{dZ}{d\psi} + f'\right\}, \end{cases}$$

welches bei Weglassung eines constanten Factors für $\theta = 0$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_6$, $\beta = \beta_1 + \beta_3 + \beta_6$, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_6$ hervorgeht. f und f' sind Integrale von (11ᵇ.)

Für $\mathfrak{F}$ in (64.) setzen wir $\mathfrak{F}_3$ in (19.), also

$$(65.) \qquad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_3 = R^n S^n \begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix} mt,$$

wo S^n hier die von zwei Argumenten abhängige Kugelfunction ist. Diese wird als Integral der Gleichung

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{d}{d\varphi}\cos\varphi\frac{dS^n}{d\varphi} + \frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{d^2S}{d\psi^2} + n(n+1)S^n = 0$$

definirt durch

$$(66.) \qquad S^n = P_\nu^n(a_n \sin\nu\psi + b_n\cos\nu\psi),$$

wo

$$P_\nu^n = \cos^\nu\varphi\left\{\sin^{n-\nu}\varphi - \frac{(n-\nu)(n-\nu-1)}{2(2n-1)}\sin^{n-\nu-2}\varphi + \frac{(n-\nu)(n-\nu-1)(n-\nu-2)(n-\nu-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}\sin^{n-\nu-4}\varphi - \cdots\right\}$$

ist. Mit ν wird eine ganze Zahl bezeichnet, so dass $0 < \nu \leqq n$ ist. Für $n = 1$ ist daher $\nu = 1$, also $P_1^1 = \cos\varphi$ zu setzen. Hierfür verschwindet V in (64.) nicht. Für $n = 2$ ist $\nu = 1$ oder $\nu = 2$. Nur der erste Werth entspricht der oben genannten Bedingung. Man erhält

$$(66^{a}.) \qquad P_1^2 = \cos\varphi\sin\varphi.$$

Ebenso würde sich für jeden anderen geraden Werth von n ein passender Werth für ν finden lassen. Um aber möglichst einfache Formeln zu erhalten, setzen wir $n=2$, zumal da sich die folgende Rechnung im allgemeinen Falle in gleicher Weise durchführen liesse, ohne wesentlich andere Resultate zu geben.

Jetzt ist $\mathfrak{F}_3$ in (65.) durch (29ª.) zu ersetzen, woraus in Verbindung mit (66.) und (66ª.) erhalten wird

$$\mathfrak{F} = \cos\varphi\sin\varphi(a_2\sin\psi+b_2\cos\psi)\{C_2\sin(q-mt)+D_2\cos(q-mt)\}.$$

Dadurch geht das Integralsystem (64.) zugleich mit Rücksicht auf die Gleichung (11ᵇ.), welcher f und f' genügen, sowie mit Rücksicht darauf, dass Z durch G_1 in (21.) zu ersetzen ist, in das folgende über:

$$(67.)\quad \begin{cases} U = 0, \\ V = \frac{1}{r}\Big\{\sin\varphi(a_2\cos\psi-b_2\sin\psi)(C_2\sin(q-mt)+D_2\cos(q-mt)) \\ \qquad +\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}(a_1\sin\psi+b_1\cos\psi)(A'\sin(q-mt)+B'\cos(q-mt))\Big\}, \\ W = \frac{1}{r}\Big\{(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)(a_2\cos\psi+b_2\sin\psi)(C_2\sin(q-mt)+D_2\cos(q-mt)) \\ \qquad +\frac{1}{\cos^2\varphi}(a_1\cos\psi-b_1\sin\psi)(A'\sin(q-mt)+B'\cos(q-mt)) \\ \qquad\qquad +\frac{1}{\cos\varphi}(A''\sin(q-mt)+B''\cos(q-mt))\Big\}. \end{cases}$$

Mit den Buchstaben a, b, A, B sind Constante bezeichnet, welche durch die Grenzbedingungen zu bestimmen sind. C_2 und D_2 sind nach (28.) zu ersetzen und zwar möge $B_2=0$ sein; es ist also

$$(67ª.)\qquad C_2 = A_2 Y_1^2(q),\quad D_2 = A_2 Y_2^2(q).$$

Bevor dem Integralsysteme dadurch eine einfachere Form gegeben werde, dass $\varphi=0$ gesetzt wird, ist auf die Grenzbedingungen Rücksicht zu nehmen.

In den Ausdrücken (36ᵇ.) für die in der Normale des reflectirenden Flächenelements wirkenden Kraftcomponenten treten von den sphärischen Componenten (34.) N_1, N_3, T_1, T_2, T_3 auf. Und von diesen verschwinden für das obige Integralsystem (67.) und für $\theta=0$ nur die folgenden nicht, wenn $\varphi=0$ gesetzt wird:

$$N_3 = \frac{2\mu}{rc}\frac{dW}{d\psi},\quad T_2 = \mu\Big(\frac{dW}{dr}-\frac{W}{r}\Big).$$

Daher gehen die Formeln (36ᵇ.) über in

$$(68.)\quad \left\{\begin{aligned} X_x &= -\sin 2\psi\,\mu\Big(\frac{dW}{dr}-\frac{W}{r}\Big)+2\sin^2\psi\,\frac{\mu}{r}\,\frac{dW}{d\psi},\\ Y_x &= \cos 2\psi\,\mu\Big(\frac{dW}{dr}-\frac{W}{r}\Big)-\sin 2\psi\,\frac{\mu}{r}\,\frac{dW}{d\psi},\\ Z_x &= 0. \end{aligned}\right\} \text{ für } \varphi = 0.$$

Diese Ausdrücke sowie diejenigen (67.) sind in die Bedingungen (31ᵃ.) und (31ᵇ.) einzutragen. In dem Integralsystem (67.) setzen wir jetzt $\varphi = 0$. Dann lässt sich dasselbe in der einfacheren Form

$$(69.)\quad \left\{\begin{aligned} U &= 0,\\ V &= 0,\\ W &= \frac{1}{r}\{(A_0+C_2)\sin(q-mt)+(B_0+D_2)\cos(q-mt)\}, \end{aligned}\right.$$

schreiben, wenn die von ψ abhängigen Factoren mit A_0, B_0 und A_2 verbunden gedacht werden. Und man kann setzen

$$(70^a.)\quad \left\{\begin{aligned} A_0 &= a+a_0\sin\psi+a_0'\cos\psi,\\ B_0 &= b+b_0\sin\psi+b_0'\cos\psi; \end{aligned}\right.$$

$$(70^b.)\quad A_2 = a_2\sin\psi+a_2'\cos\psi$$

mit den Constanten a, a_0, a_0', a_2, b, b_0, b_0'.

Für den Ausdruck von W in (69.) ergiebt sich mit Rücksicht auf (67ᵃ.) und (26.)

$$(71.)\quad W = \frac{1}{r}\{H\sin(q-mt)+H'\cos(q-mt)\},$$

wo gesetzt ist

$$(71^a.)\quad \left\{\begin{aligned} H &= A_0+\Big(1-\frac{3}{q^2}\Big)A_2,\\ H' &= B_0+\frac{3}{q}A_2. \end{aligned}\right.$$

q hat die frühere Bedeutung in (20.).

Für die einfallende, reflectirte und gebrochene Welle unterscheiden wir die Ausdrücke (71.) wie früher. Wir setzen also

$$(72.)\quad \left\{\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{r_e}\{H_e\sin(q_e-mt)+H_e'\cos(q_e-mt)\},\\ W_r &= \frac{1}{r_r}\{H_r\sin(q_r-mt)+H_r'\cos(q_r-mt)\},\\ W_d &= \frac{1}{r_d}\{H_d\sin(q_d-mt)+H_d'\cos(q_d-mt)\}. \end{aligned}\right.$$

Durch (69.) und (72.) ergeben die Grenzbedingungen (45ª.), welche die Gleichheit der Verrückungen ausdrücken, wie in § 7 zunächst die Beziehungen (49.):

$$\frac{r_e}{l} = \frac{r_r}{l} = \frac{r_d}{l'}$$

und dann die folgenden Beziehungen

$$(73.) \qquad \begin{cases} H_r = \varepsilon H_e, & H'_r = \varepsilon H'_e; \\ H_d = \varepsilon' H_e, & H'_d = \varepsilon' H'_e. \end{cases}$$

Die letzteren gehen aus (50.) beim Vergleich von (48.) mit (72.) dadurch hervor, dass E, E', R, R', D, D' ersetzt werden der Reihe nach durch $\frac{H_e}{r_e}, \frac{H'_e}{r_e}, \frac{H_r}{r_r}, \frac{H'_r}{r_r}, \frac{H_d}{r_d}, \frac{H'_d}{r_d}$, und mit Rücksicht darauf, dass

$$r_r = r_e \quad \text{und} \quad \frac{r_d}{r_e} = \frac{\sin\psi_d}{\sin\psi_e}$$

ist. ε und ε' haben dieselbe Bedeutung wie in (53.). Demnach liefern die Formeln (72.) in Verbindung mit (73.) den *Fresnel*schen Ausdruck für die Amplitude der reflectirten Welle und den *Kirchhoff*schen für die der gebrochenen Welle.

Dass die Gleichung der lebendigen Kraft durch (72.) in Verbindung mit (73.) erfüllt ist, folgt in gleicher Weise wie im § 7 mit der gleichen Nothwendigkeit der Beziehung $\varrho = \varrho'$.

In (73.) sind vier Gleichungen zur Bestimmung der in (67.) eingeführten Constanten aufgestellt. Weitere Gleichungen liefern die Bedingungen der Gleichheit der elastischen Druckkräfte.

§ 10.

Fortsetzung. Die Bedingungen der Gleichheit der elastischen Druckkräfte. Einfachste Ausdrücke für Schwingungen parallel zur Einfallsebene.

Nach (68.) handelt es sich zunächst um den Ausdruck für $\frac{dW}{dr} - \frac{W}{r}$. Wir setzen

$$(74.) \qquad \frac{dW}{dr} - \frac{W}{r} = \frac{1}{r^2}(S\sin(q-mt) + S'\cos(q-mt))$$

und erhalten aus (71.) und (71ª.)

$$(74^{a}.)\qquad \begin{cases} S = -2A_0 - qB_0 + \left(-5 + \frac{12}{q^2}\right) A_2, \\ S' = qA_0 - 2B_0 \quad + \left(q - \frac{12}{q}\right) A_2. \end{cases}$$

Und die Bedingungen der Gleichheit der elastischen Druckkräfte (31ᵇ.) gehen durch (68.) und (74.) und mit Rücksicht auf die Beziehung (41.)

$$\psi_r = 2R - \psi_e$$

sowie auf die aus (56.), (51.) und (49.) hervorgehende Gleichung

$$(74^{b}.)\qquad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{r_d^2}{r_e^2}$$

über in:

$$(75.)\qquad \begin{cases} -\sin 2\bar{\psi}_e (S_e - S_r) + 2\sin^2\bar{\psi}_e \left(\frac{dH_e}{d\psi_e} + \frac{dH_r}{d\psi_r}\right)_{\psi=\bar{\psi}} \\ \qquad\qquad = -\sin 2\bar{\psi}_d S_d + 2\sin^2\bar{\psi}_d \frac{dH_d}{d\psi_d}, \\ -\sin 2\bar{\psi}_e (S'_e - S'_r) + 2\sin^2\bar{\psi}_e \left(\frac{dH'_e}{d\psi_e} + \frac{dH'_r}{d\psi_r}\right)_{\psi=\bar{\psi}} \\ \qquad\qquad = -\sin 2\bar{\psi}_d S'_d + 2\sin^2\bar{\psi}_d \frac{dH'_d}{d\psi_d}, \\ -\cos 2\bar{\psi}_e (S_e + S_r) + \sin 2\bar{\psi}_e \left(\frac{dH_e}{d\psi_e} - \frac{dH_r}{d\psi_r}\right)_{\psi=\bar{\psi}} \\ \qquad\qquad = -\cos 2\bar{\psi}_d S_d + \sin 2\bar{\psi}_d \frac{dH_d}{d\psi_d}, \\ -\cos 2\bar{\psi}_e (S'_e + S'_r) + \sin 2\bar{\psi}_e \left(\frac{dH'_e}{d\psi_e} - \frac{dH'_r}{d\psi_r}\right)_{\psi=\bar{\psi}} \\ \qquad\qquad = -\cos 2\bar{\psi}_d S'_d + \sin 2\bar{\psi}_d \frac{dH'_d}{d\psi_d}. \end{cases}$$

$\bar{\psi}_e$, $\bar{\psi}_r$, $\bar{\psi}_d$ sind die für das reflectirende Flächenelement geltenden Werthe von ψ_e, ψ_r, ψ_d. Wie $\bar{\psi}$ bezieht sich im Folgenden auch $\bar{q}$ auf die Grenzfläche, während sich q_e, q_r, q_d entsprechend dem Gebrauch der Indices e, r, d auf die drei Wellen beziehen sollen.

In (69.) sind mehr Constanten eingeführt, als zur Erfüllung der acht Gleichungen (73.) und (75.) erforderlich sind. Wir werden daraus durch passende Verfügung über die Constanten zwei verschiedene Werthsysteme (72.) erhalten.

Wir setzen erstens:

$$(75^{a}.) \qquad A_2 = 0$$

d. h. $A_{2e} = A_{2r} = A_{2d} = 0$ und ferner

$$(75^{b}.) \qquad B_{0e} = 0, \quad \frac{dA_{0e}}{d\psi_e} = 0,$$

so dass nach (71ª.) bei Weglassung des Index 0 der Constanten A und B erhalten wird:

$$(76.) \qquad \begin{cases} H_e = A_e, & H'_e = 0 \\ H_r = A_r, & H'_r = B_r; \quad H_d = A_d, \quad H'_d = B_d, \end{cases}$$

und für die Grenzfläche nach (73.) und (76.)

$$(76^{a}.) \qquad \begin{cases} A_r = \varepsilon A_e, & A_d = \varepsilon' A_e, \\ B_r = 0, & B_d = 0, \end{cases}$$

so wie nach (74ª.) und durch (76ª.)

$$(76^{b}.) \qquad \begin{cases} S_e = -2A_e, & S_r = -2\varepsilon A_e, & S_d = -2\varepsilon' A_e, \\ S'_e = \bar{q} A_e, & S'_r = \bar{q}\varepsilon A_e, & S'_d = \bar{q}\varepsilon' A_e. \end{cases}$$

Wird noch zur Abkürzung

$$(76^{c}.) \qquad \begin{cases} \left[\frac{dA_r}{d\psi_r}\right]_{\psi_r = \bar{\psi}_r} = A'_r, & \left[\frac{dB_r}{d\psi_r}\right]_{\psi_r = \bar{\psi}_r} = B'_r, \\ \left[\frac{dA_d}{d\psi_d}\right]_{\psi_d = \bar{\psi}_d} = A'_d, & \left[\frac{dB_d}{d\psi_d}\right]_{\psi_d = \bar{\psi}_d} = B'_d \end{cases}$$

gesetzt, so gehen die Gleichungen (75.) in folgende über:

$$\begin{aligned} \sin^2\bar{\psi}_e A'_r - \sin^2\bar{\psi}_d A'_d &= -\{(1-\varepsilon)\sin 2\bar{\psi}_e - \varepsilon' \sin 2\bar{\psi}_d\} A_e, \\ 2\sin^2\bar{\psi}_e B'_r - 2\sin^2\bar{\psi}_d B'_d &= \bar{q}\{(1-\varepsilon)\sin 2\bar{\psi}_e - \varepsilon' \sin 2\bar{\psi}_d\} A_e, \\ \sin 2\bar{\psi}_e A'_r + \sin 2\bar{\psi}_d A'_d &= 2\{(1+\varepsilon)\cos 2\bar{\psi}_e - \varepsilon' \cos 2\bar{\psi}_d\} A_e, \\ \sin 2\bar{\psi}_e B'_r + \sin 2\bar{\psi}_d B'_d &= -\bar{q}\{(1+\varepsilon)\cos 2\bar{\psi}_e - \varepsilon' \cos 2\bar{\psi}_d\} A_e. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt mit Rücksicht auf die Werthe (53.) für ε und ε', in denen ψ durch $\bar{\psi}$ zu ersetzen ist,

$$(77.) \qquad \begin{cases} A'_r = \alpha_r A_e, & A'_d = \alpha_d A_e, \\ B'_r = -\bar{q}\alpha_r A_e, & B'_d = -\bar{q}\alpha_d A_e, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung geschrieben ist

$$(77^{a}.) \qquad \alpha_r = 4\varepsilon \operatorname{ctg}\bar{\psi}_e, \quad \alpha_d = -4\varepsilon \frac{\cos\bar{\psi}_e \cos(\bar{\psi}_e + \bar{\psi}_d)}{\sin\bar{\psi}_d}.$$

A_r und B_r, A_d und B_d waren für A_{0r} und B_{0r}, A_{0d} und B_{0d} geschrieben. Nach (70ª.) ist daher, wenn $a'_0 = b'_0 = 0$ angenommen wird,

$$(78.)\qquad \begin{cases} A_r = a_r + a_{0r}\sin\psi_r, & A_d = a_d + a_{0d}\sin\psi_d, \\ B_r = b_r + b_{0r}\sin\psi_r; & B_d = b_d + b_{0d}\sin\psi_d; \end{cases}$$

und zur Bestimmung der acht Constanten a_r, a_{0r}, b_r, b_{0r}, a_d, a_{0d}, b_d, b_{0d} dienen die acht Gleichungen (76ª.) und (77.) mit Rücksicht auf (76ᶜ.).

So erhält man für die gesuchten Verrückungen der drei Wellen durch (78.), (76.) und (72.):

$$(78ª.)\qquad \begin{cases} W_e = \dfrac{A_e}{r_e}\sin\Big(\dfrac{r_e}{l} - \dfrac{t}{T}\Big)2\pi, \\ W_r = \dfrac{A_e}{r_r}\Big\{\Big(\varepsilon + \alpha_r\dfrac{\sin\psi_r - \sin\bar{\psi}_r}{\cos\bar{\psi}_r}\Big)\sin\Big(\dfrac{r_r}{l} - \dfrac{t}{T}\Big)2\pi \\ \qquad\qquad - \bar{q}\,\alpha_r\dfrac{\sin\psi_r - \sin\bar{\psi}_r}{\cos\bar{\psi}_r}\cos\Big(\dfrac{r_r}{l} - \dfrac{t}{T}\Big)2\pi\Big\}, \\ W_d = \dfrac{A_e}{r_d}\Big\{\varepsilon' + \alpha_d\dfrac{\sin\psi_d - \sin\bar{\psi}_d}{\cos\bar{\psi}_d}\sin\Big(\dfrac{r_d}{l'} - \dfrac{t}{T}\Big)2\pi \\ \qquad\qquad - \bar{q}\,\alpha_d\dfrac{\sin\psi_d - \sin\bar{\psi}_d}{\cos\bar{\psi}_d}\cos\Big(\dfrac{r_d}{l'} - \dfrac{t}{T}\Big)2\pi\Big\}. \end{cases}$$

Für das Grenzflächenelement ergiebt sich aus (78ª.) bei Weglassung der Striche über den Buchstaben:

$$(79.)\qquad \begin{cases} W_e = \dfrac{A_e}{r_e}\sin\Big(\dfrac{r_e}{l} - \dfrac{t}{T}\Big)2\pi, \\ W_r = \dfrac{\varepsilon A_e}{r_r}\sin\Big(\dfrac{r_r}{l} - \dfrac{t}{T}\Big)2\pi, \\ W_d = \dfrac{\varepsilon' A_e}{r_d}\sin\Big(\dfrac{r_d}{l'} - \dfrac{t}{T}\Big)2\pi, \end{cases}$$

und hieraus mit Rücksicht auf die Werthe (53.) für ε und ε' sowie auf (49.) und (40.)

$$(79ª.)\qquad W_r = -\frac{\sin(\psi_e - \psi_d)}{\sin(\psi_e + \psi_d)}W_e, \qquad W_d = \frac{\sin 2\psi_e}{\sin(\psi_e + \psi_d)}W_e,$$

also der *Fresnel*sche Werth für die Componente der reflectirten und der *F. Neumann*sche Werth für die der gebrochenen Welle.

Das Werthsystem (79.) ist identisch mit demjenigen (60ᵇ.), nur ist die Constante A_{0e} in (60ᵇ.) durch A_e in (79.) ersetzt.

§ 11.

Zweites Werthsystem für Schwingungen parallel zur Einfallsebene.

Eine zweite Möglichkeit über die Constanten in (71ª.) passend zu verfügen ist die, dass man setzt

$$(80.)\quad A_{0e}+A_{2e}=0,\quad B_{0e}=0,\quad \frac{dA_{0r}}{d\psi_r}=0,\quad \frac{dA_{0d}}{d\psi_d}=0,\quad \frac{dB_{0r}}{d\psi_r}=0,\quad \frac{dB_{0d}}{d\psi_d}=0.$$

Der Index 0 in A_0 und B_0 möge jetzt weggelassen und A_2 durch $G(\psi)$ ersetzt werden, so dass man nach (70ᵇ.) schreiben kann

$$(80^a.)\qquad A_{2i}G_i(\psi_i) = g_i\sin\psi_i+g_i'\cos\psi_i$$

mit den Constanten g_i und g_i', wo i durch e, r, d zu ersetzen ist.

Somit erhält man nach (71ª.) für die drei Wellen

$$(81.)\qquad H_e=-\frac{3}{q_e^2}G_e(\psi_e),\qquad H_e'=\frac{3}{q_e}G_e(\psi_e),$$

$$(81^a.)\quad \begin{cases} H_r=A_r+\left(1-\frac{3}{q_r^2}\right)G_r(\psi_r), & H_r'=B_r+\frac{3}{q_r}G_r(\psi_r), \\ H_d=A_d+\left(1-\frac{3}{q_d^2}\right)G_d(\psi_d), & H_d'=B_d+\frac{3}{q_d}G_d(\psi_d) \end{cases}$$

mit den acht zu bestimmenden Constanten A_r, B_r, A_d, B_d, g_r, g_r', g_d, g_d'.

Die ersten vier dieser Constanten ergeben sich nach den Bedingungsgleichungen (73.) in folgender Weise:

$$(82.)\quad \begin{cases} A_r = -\frac{3\varepsilon}{\bar q^2}G_e(\bar\psi_e)-\left(1-\frac{3}{\bar q^2}\right)G_r(\bar\psi_r), \\ B_r = \frac{3\varepsilon}{\bar q}G_e(\bar\psi_e)-\frac{3}{\bar q}G_r(\bar\psi_r), \\ A_d = -\frac{3\varepsilon'}{\bar q^2}G_e(\bar\psi_e)-\left(1-\frac{3}{\bar q^2}\right)G_d(\bar\psi_d), \\ B_d = \frac{3\varepsilon'}{\bar q}G_e(\bar\psi_e)-\frac{3}{\bar q}G_d(\bar\psi_d). \end{cases}$$

Hier ist berücksichtigt, dass für die Grenzfläche $q_e=q_r=q_d$ ist. Der gemeinsame Werth ist wie vorher mit $\bar q$ bezeichnet. Ebenso haben $\bar\psi_e$, $\bar\psi_r$, $\bar\psi_d$ die frühere Bedeutung.

Um die Constanten g_r, g_r', g_d, g_d' durch die Gleichungen (75.) zu bestimmen, haben wir zunächst nach (74ª.) S und S' für die drei Wellen zu bilden. Zuerst ergeben sich S_e und S_e', wenn wir nach (80.) und (80ª.)

$A_{0e} = -A_{2e} = -G_e(\psi_e)$ und $B_{0e} = 0$ setzen; also

$$(83^a.) \qquad S_e = \left(-3 + \frac{12}{q_e^2}\right) G_e(\psi_e), \quad S'_e = -\frac{12}{q_e} G_e(\psi_e).$$

Ferner folgt aus (74ª.):

$$(83^b.) \quad \begin{cases} S_r = -2A_r - q_r B_r + \left(-5 + \frac{12}{q_r^2}\right) G_r(\psi_r), \\ S'_r = q_r A_r - 2B_r + \left(q_r - \frac{12}{q_r}\right) G_r(\psi_r). \end{cases}$$

S_d und S'_d ergeben sich hieraus, wenn der Index r durch d ersetzt wird.

Für das reflectirende Flächenelement, für welches S und S' zu bilden sind, ergeben sich aus (83ª.) und (83ᵇ.) zugleich mit Rücksicht auf die für A_r, B_r, A_d, B_d erhaltenen Werthe (82.) die folgenden Ausdrücke

$$(83^c.) \quad \begin{cases} S_e = \left(-3 + \frac{12}{\bar{q}^2}\right) G_e(\bar{\psi}_e), \\ S'_e = -\frac{12}{\bar{q}} G_e(\bar{\psi}_e), \\ S_r = \left(-3\varepsilon + \frac{6\varepsilon}{\bar{q}^2}\right) G_e(\bar{\psi}_e) + \frac{6}{\bar{q}^2} G_r(\bar{\psi}_r), \\ S'_r = -\frac{9\varepsilon}{\bar{q}} G_e(\bar{\psi}_e) - \frac{3}{\bar{q}} G_r(\bar{\psi}_r), \\ S_d = \left(-3\varepsilon' + \frac{6\varepsilon'}{\bar{q}^2}\right) G_e(\bar{\psi}_e) + \frac{6}{\bar{q}^2} G_d(\bar{\psi}_d), \\ S'_d = -\frac{9\varepsilon'}{\bar{q}} G_e(\bar{\psi}_e) - \frac{3}{\bar{q}} G_d(\bar{\psi}_d). \end{cases}$$

Ferner folgt aus (81.) und (81ª.) mit Rücksicht auf (80.):

$$(83^d.) \quad \begin{cases} \frac{dH_e}{d\psi_e} = -\frac{3}{q_e^2} \frac{dG_e(\psi_e)}{d\psi_e}, \quad \frac{dH_r}{d\psi_r} = \left(1 - \frac{3}{q_r^2}\right) \frac{dG_r(\psi_r)}{d\psi_r}, \quad \frac{dH_d}{d\psi_d} = \left(1 - \frac{3}{q_d^2}\right) \frac{dG_d(\psi_d)}{d\psi_d}, \\ \frac{dH'_e}{d\psi_e} = \frac{3}{q_e} \frac{dG_e(\psi_e)}{d\psi_e}, \quad \frac{dH'_r}{d\psi_r} = \frac{3}{q_r} \frac{dG_r(\psi_r)}{d\psi_r}, \quad \frac{dH'_d}{d\psi_d} = \frac{3}{q_d} \frac{dG_d(\psi_d)}{d\psi_d}. \end{cases}$$

Wir bilden diese Ausdrücke für die Grenzfläche und setzen zur Abkürzung

$$(83^e.) \qquad \left[\frac{dG_i(\psi_i)}{d\psi_i}\right]_{\psi_i = \bar{\psi}_i} = G'_i(\bar{\psi}_i)$$

und beachten, dass für die Grenzfläche $q_e = q_r = q_d = \bar{q}$ ist, dann gehen die Grenzbedingungen (75.) durch (83ᶜ.) und (83ᵈ.) über in Gleichungen, die

sich zunächst in folgender Form schreiben lassen:

$$(84.)\quad \begin{cases} 2k\{\sin 2\bar\psi_e G_r(\bar\psi_r)+\sin 2\bar\psi_d G_d(\bar\psi_d)\}+2(1-k)\{\sin^2\bar\psi_e G_r'(\bar\psi_r)-\sin^2\bar\psi_d G_d'(\bar\psi_d)\} \\ \qquad = \{(2k(2-\varepsilon)-3(1-\varepsilon))\sin 2\bar\psi_e+(3-2k)\varepsilon'\sin 2\bar\psi_d\} G_e(\bar\psi_e)+2k\sin^2\bar\psi_e G_e'(\bar\psi_e), \\ \sin 2\bar\psi_e G_r(\bar\psi_r)+\sin 2\bar\psi_d G_d(\bar\psi_d)-2\{\sin^2\bar\psi_e G_r'(\bar\psi_r)-\sin^2\bar\psi_d G_d'(\bar\psi_d)\} \\ \qquad = \{(4-3\varepsilon)\sin 2\bar\psi_e-3\varepsilon'\sin 2\bar\psi_d\} G_e(\bar\psi_e)+2\sin^2\bar\psi_e G_e'(\bar\psi_e), \\ 2k\{\cos 2\bar\psi_e G_r(\bar\psi_r)-\cos 2\bar\psi_d G_d(\bar\psi_d)\}+(1-k)\{\sin 2\bar\psi_e G_r'(\bar\psi_r)+\sin 2\bar\psi_d G_d'(\bar\psi_d)\} \\ \qquad = \{(3(1+\varepsilon)-2k(2+\varepsilon))\cos 2\bar\psi_e-(3-2k)\varepsilon'\cos 2\bar\psi_d\} G_e(\bar\psi_e)-k\sin 2\bar\psi_e G_e'(\bar\psi_e), \\ \cos 2\bar\psi_e G_r(\bar\psi_r)-\cos 2\bar\psi_d G_d(\bar\psi_d)-\{\sin 2\bar\psi_e G_r'(\bar\psi_r)+\sin 2\bar\psi_d G_d'(\bar\psi_d)\} \\ \qquad = -\{(4+3\varepsilon)\cos 2\bar\psi_e-3\varepsilon'\cos 2\bar\psi_d\} G_e(\bar\psi_e)-\sin 2\bar\psi_e G_e'(\bar\psi_e), \end{cases}$$

wo zur Abkürzung geschrieben ist

$$(84^a.)\qquad k = \frac{3}{\bar q^2}.$$

Die Gleichungen (84.) dienen zur Bestimmung der vier in G_r und G_d enthaltenen Constanten; sie lassen sich aber in einfacherer Form schreiben. Multiplicirt man nämlich die zweite und vierte Gleichung einmal mit $1-k$, dann mit $-2k$ und addirt die so entstehenden Gleichungen zur ersten resp. dritten Gleichung, so entstehen zugleich mit Rücksicht darauf, dass nach (53.) $\varepsilon' = 1+\varepsilon$ ist, die folgenden vier Gleichungen:

$$\begin{cases} (1+k)\{\sin 2\bar\psi_e G_r(\bar\psi_r)+\sin 2\bar\psi_d G_d(\bar\psi_d)\} \\ \qquad = \{(\varepsilon k+1)\sin 2\bar\psi_e+\varepsilon' k\sin 2\bar\psi_d\} G_e(\bar\psi_e)+2\sin^2\bar\psi_e G_e'(\bar\psi_e), \\ (1+k)\{2\sin^2\bar\psi_e G_r'(\bar\psi_r)-2\sin^2\bar\psi_d G_d'(\bar\psi_d)\} \\ \qquad = (3+4k)\{(\varepsilon-1)\sin 2\bar\psi_e+\varepsilon'\sin 2\bar\psi_d\} G_e(\bar\psi_e)-2k\sin^2\bar\psi_e G_e'(\bar\psi_e), \\ (1+k)\{\cos 2\bar\psi_e G_r(\bar\psi_r)-\cos 2\bar\psi_d G_d(\bar\psi_d)\} \\ \qquad = \{(\varepsilon k-1)\cos 2\bar\psi_e-\varepsilon' k\cos 2\bar\psi_d\} G_e(\bar\psi_e)-\sin 2\bar\psi_e G_e'(\bar\psi_e), \\ (1+k)\{\sin 2\bar\psi_e G_r'(\bar\psi_r)+\sin 2\bar\psi_d G_d'(\bar\psi_d)\} \\ \qquad = (3+4k)\{(\varepsilon+1)\cos 2\bar\psi_e-\varepsilon'\cos 2\bar\psi_d\} G_e(\bar\psi_e)+k\sin 2\bar\psi_e G_e'(\bar\psi_e). \end{cases}$$

Aus der ersten und dritten dieser Gleichungen folgen leicht die Werthe für $G_r(\bar\psi_r)$ und $G_d(\bar\psi_d)$, aus der zweiten und vierten diejenigen für $G_r'(\bar\psi_r)$ und $G_d'(\bar\psi_d)$. Aus diesen Werthen ergeben sich die Constanten g_r, g_r', g_d, g_d' in (80ª.). Man erhält

$$(85.)\quad \begin{cases} g_r &= (\alpha_r \sin\bar\psi_e - \beta_r \cos\bar\psi_e) g_e \sin\bar\psi_e, \\ g_r' &= -(\alpha_r \cos\bar\psi_e + \beta_r \sin\bar\psi_e) g_e \sin\bar\psi_e, \\ g_d &= (\alpha_d \sin\bar\psi_d + \beta_d \cos\bar\psi_d) g_e \sin\bar\psi_e, \\ g_d' &= (\alpha_d \cos\bar\psi_d - \beta_d \sin\bar\psi_d) g_e \sin\bar\psi_e; \end{cases}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(85^a.)\quad \begin{cases} \alpha_r &= \dfrac{2\sin 2(\bar\psi_e-\bar\psi_d) - \sin 2\bar\psi_d - 2k\sin(\bar\psi_e-\bar\psi_d)\cos(\bar\psi_e+\bar\psi_d)}{1+k\sin 2(\bar\psi_e+\bar\psi_d)}, \\ \beta_r &= -\dfrac{3(2+3k)\cos\bar\psi_e \sin(\bar\psi_e-\bar\psi_d)}{(1+k)\sin\bar\psi_e \sin(\bar\psi_e+\bar\psi_d)}, \\ \alpha_d &= \dfrac{2\sin 4\bar\psi_e + \sin 2\bar\psi_e + 4k\sin\bar\psi_d \cos\bar\psi_e \cos(\bar\psi_e+\bar\psi_d)}{(1+k)\sin 2(\bar\psi_e+\bar\psi_d)}, \\ \beta_d &= \dfrac{\cos\bar\psi_e\{6\sin(\bar\psi_e-\bar\psi_d)\cos(\bar\psi_e+\bar\psi_d) + k(5\sin 2\bar\psi_e - 4\sin 2\bar\psi_d)\}}{(1+k)\sin\bar\psi_d \sin(\bar\psi_e+\bar\psi_d)}, \end{cases}$$

und wo zur Vereinfachung in (80ª.) $g_e' = 0$, also gesetzt ist

$$(85^b.)\qquad G_e(\psi_e) = g_e \sin\psi_e.$$

Durch (85.) ergiebt sich jetzt aus (80ª.)

$$(86.)\quad \begin{cases} G_r(\psi_r) &= -\{\cos(\bar\psi_e+\psi_r)\alpha_r + \sin(\bar\psi_e+\psi_r)\beta_r\} g_e \sin\psi_e, \\ G_d(\psi_d) &= \{\cos(\bar\psi_d-\psi_d)\alpha_d + \sin(\bar\psi_d-\psi_d)\beta_d\} g_e \sin\psi_e. \end{cases}$$

Hier werde nun für das Grenzelement $\psi_e = \bar\psi_e$, $\psi_r = \bar\psi_r = 2R - \psi_e$, $\psi_d = \bar\psi_d$ gesetzt, und die Striche über ψ mögen der einfacheren Schreibweise wegen weggelassen werden; so entstehen aus (86.) die Formeln:

$$(86^a.)\qquad G_r(\psi_r) = \alpha_r g_e \sin\psi_e, \quad G_d(\psi_d) = \alpha_d g_e \sin\psi_e.$$

Aus (81.), (81ª.), (82.) und (86ª.) ergiebt sich nun

$$(87.)\quad \begin{cases} H_e &= -\dfrac{3}{q_e^2} g_e \sin\psi_e, \\ H_e' &= \dfrac{3}{q_e} g_e \sin\psi_e; \\ H_r &= \left\{-\dfrac{3\varepsilon}{q^2} + \left(\dfrac{3}{q^2} - \dfrac{3}{q_r^2}\right)\alpha_r\right\} g_e \sin\psi_e, \\ H_r' &= \left\{\dfrac{3\varepsilon}{q} - \left(\dfrac{3}{q} - \dfrac{3}{q_r}\right)\alpha_r\right\} g_e \sin\psi_e; \\ H_d &= \left\{-\dfrac{3\varepsilon'}{q^2} + \left(\dfrac{3}{q^2} - \dfrac{3}{q_d^2}\right)\alpha_d\right\} g_e \sin\psi_e, \\ H_d' &= \left\{\dfrac{3\varepsilon'}{q} - \left(\dfrac{3}{q} - \dfrac{3}{q_d}\right)\alpha_d\right\} g_e \sin\psi_e. \end{cases}$$

Aus (87.) und (72.) sind schliesslich die gesuchten Formeln zu bilden. Aber die Ausdrücke (87.) gestatten noch eine Vereinfachung. ψ_e hat für den ganzen durch das Erschütterungscentrum O_e und das reflectirende Flächenelement festgelegten einfallenden Strahl einen constanten Werth; daher kann

$$3g_e \sin\psi_e = \text{const.} = A \tag{87ª.}$$

gesetzt werden. Jetzt ergiebt sich aus (87.) und (72.)

$$\left\{\begin{aligned}
W_e &= \frac{A}{r_e}\left\{-\frac{1}{q_e^2}\sin\left(\frac{r_e}{l}-\frac{t}{T}\right)2\pi+\frac{1}{q_e}\cos\left(\frac{r_e}{l}-\frac{t}{T}\right)2\pi\right\},\\
W_r &= \frac{A}{r_r}\left\{\left[-\frac{\varepsilon}{\bar{q}^2}+\left(\frac{1}{\bar{q}^2}-\frac{1}{q_r^2}\right)\alpha_r\right]\sin\left(\frac{r_r}{l}-\frac{t}{T}\right)2\pi\right.\\
&\qquad\left.+\left[\frac{\varepsilon}{\bar{q}}-\left(\frac{1}{\bar{q}}-\frac{1}{q_r}\right)\alpha_r\right]\cos\left(\frac{r_r}{l}-\frac{t}{T}\right)2\pi\right\},\\
W_d &= \frac{A}{r_d}\left\{\left[-\frac{\varepsilon'}{\bar{q}^2}+\left(\frac{1}{\bar{q}^2}-\frac{1}{q_d^2}\right)\alpha_d\right]\sin\left(\frac{r_d}{l'}-\frac{t}{T}\right)2\pi\right.\\
&\qquad\left.+\left[\frac{\varepsilon'}{\bar{q}}-\left(\frac{1}{\bar{q}}-\frac{1}{q_d}\right)\alpha_d\right]\cos\left(\frac{r_d}{l'}-\frac{t}{T}\right)2\pi\right\}.
\end{aligned}\right. \tag{88.}$$

Hier ist q zur Abkürzung für $\frac{r}{l}2\pi$ gesetzt; q_e, q_r, q_d gehen aus q hervor für $r=r_e$, $=r_r$, $=r_d$. $\bar{q}$ bezeichnet den für das Grenzelement geltenden, für alle drei Wellen gleichen Werth von q.

Bei Anwendung auf Lichtwellen oder allgemeiner auf Wellen, bei welchen die Wellenlänge l gegen r verschwindend klein ist, lassen sich die Formeln (88.) noch weiter vereinfachen. Für solche Wellen ist q eine sehr grosse Zahl also $\frac{1}{q^2}$ gegen $\frac{1}{q}$ und k in (84ª.) gegen die Einheit zu vernachlässigen. Daher geht (88.) in diesem Falle über in das folgende Werthsystem:

$$\left\{\begin{aligned}
W_e &= \frac{A}{r_e q_e}\cos\left(\frac{r_e}{l}-\frac{t}{T}\right)2\pi,\\
W_r &= \frac{A}{r_r q_r}\left\{\varepsilon\frac{q_r}{\bar{q}}-\left(\frac{q_r}{\bar{q}}-1\right)\alpha_r\right\}\cos\left(\frac{r_r}{l}-\frac{t}{T}\right)2\pi,\\
W_d &= \frac{A}{r_d q_d}\left\{\varepsilon'\frac{q_d}{\bar{q}}-\left(\frac{q_d}{\bar{q}}-1\right)\alpha_d\right\}\cos\left(\frac{q_d}{l'}-\frac{t}{T}\right)2\pi,
\end{aligned}\right. \tag{89.}$$

wo jetzt

$$\left\{\begin{aligned}
\alpha_r &= \frac{2\sin 2(\psi_e-\psi_d)-\sin 2\psi_d}{\sin 2(\psi_e+\psi_d)},\\
\alpha_d &= \frac{2\sin 4\psi_e+\sin 2\psi_e}{\sin 2(\psi_e+\psi_d)}
\end{aligned}\right. \tag{89ª.}$$

ist.

Für das reflectirende Flächenelement ist noch $r = \bar{r}$, also $q_r = q_r$ und $q_d = \bar{q}_d$ zu setzen, und schreiben wir den constanten Werth

$$A\frac{l}{2\pi} = C,$$

so ergeben sich die einfachen Formeln

$$(90.)\qquad \begin{cases} W_e = \dfrac{C}{r_e^2}\cos\left(\dfrac{r_e}{l} - \dfrac{t}{T}\right)2\pi, \\ W_r = \varepsilon\dfrac{C}{r_r^2}\cos\left(\dfrac{r_r}{l} - \dfrac{t}{T}\right)2\pi, \\ W_d = \varepsilon'\dfrac{l'}{l}\dfrac{C}{r_d^2}\cos\left(\dfrac{r_d}{l'} - \dfrac{t}{T}\right)2\pi. \end{cases}$$

Für das reflectirende Flächenelement ergiebt sich daher

$$W_r = -\frac{\sin(\psi_e - \psi_d)}{\sin(\psi_e + \psi_d)}W_e, \quad W_d = \frac{\sin 2\psi_e}{\sin(\psi_e + \psi_d)}W_e,$$

also die *Fresnel*sche Beziehung zwischen den Amplituden der reflectirten und einfallenden Welle und die *F. Neumann*sche Beziehung zwischen den Amplituden der gebrochenen und einfallenden Welle.

Es haben sich als einfachste Formeln, welche zur Darstellung der Lichtschwingungen geeignet sind, ergeben die Formeln (61ª.) in Verbindung mit (63.) und die Formeln (79.). Den letzteren identische und für das Grenzelement allgemein gültige Formeln wurden vorher in (60ᵇ.) erhalten. Die Formeln (61ª.) stellen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene, die Formeln (79.) Schwingungen parallel zur Einfallsebene dar. Sowohl die ersteren als auch die letzteren sind ebenso einfach und identisch mit den bekannten Formeln für ebene Schwingungen, nur dass die Entfernungen von den Erschütterungscentren in den Nennern der Amplituden erscheinen, so dass die Lichtintensität umgekehrt proportional der Entfernung wird. In beiden Fällen ergeben die Formeln die *Fresnel*schen Ausdrücke für die Amplituden der reflectirten Wellen und die *F. Neumann*schen für die Amplituden der gebrochenen Wellen.

Ausser in (79.) haben sich zur Darstellung von Lichtschwingungen parallel zur Einfallsebene noch geeignete Formeln in (90.) ergeben. Aber die Amplituden enthalten hier das Quadrat der Entfernung vom Erschütterungs-

centrum im Nenner, so dass die Intensität der Schwingungen umgekehrt proportional der vierten Potenz der Entfernung erscheint. Ebenso würde man, wenn man die Formeln (67.) für beliebige gerade n weiter entwickelt hätte, zu passenden Formeln gelangt sein, in welchen die Amplituden den Factor $\frac{1}{r^{2k}}$ enthalten hätten, wo k eine ganze Zahl ist.

Auch für Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene würden sich aus (67.) für ungerade n Formeln ergeben, in welchen sich die Amplituden umgekehrt proportional höheren Potenzen von r verhielten.

Hamburg, im Februar 1896.

Ueber die Fundamentaltheiler algebraischer Gattungsbereiche.

(Von Herrn *Kurt Hensel*.)

Den folgenden Untersuchungen lege ich einen natürlichen Rationalitätsbereich $(\Re', \Re'', \ldots, \Re^{(\nu)})$, d. h. die Gesammtheit aller rationalen Functionen der n Variablen $\Re', \Re'', \ldots, \Re^{(\nu)}$ mit ganzzahligen Coefficienten zu Grunde. Man kann auch von der Bedingung absehen, dass die Coefficienten ganze oder, was offenbar dasselbe besagt, rationale Zahlen sein sollen, und den Bereich aller rationalen Functionen jener Variablen mit *beliebigen* Zahlencoefficienten betrachten; die hier abgeleiteten Resultate beziehen sich gleichmässig auf beide Arten von Rationalitätsbereichen.

Jede Grösse M des Bereiches $(\Re', \Re'', \ldots, \Re^{(\nu)})$ lässt sich bekanntlich auf eine und nur auf eine Art in ein Product von Primfactoren, d. h. von solchen Grössen zerlegen, welche ihrerseits nicht weiter innerhalb desselben Bereiches zerfällt werden können.

Es sei nun x eine algebraische Function von $(\Re', \Re'', \ldots, \Re^{(\nu)})$, d. h. es genüge x einer irreductiblen Gleichung des $n$ten Grades

$$(1.) \qquad x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n = 0,$$

deren Coefficienten dem Rationalitätsbereiche $(\Re', \ldots, \Re^{(\nu)})$ angehören. Betrachtet man dann alle rationalen Functionen von $(x; \Re', \ldots, \Re^{(\nu)})$, so bilden diese wiederum einen in sich abgeschlossenen Bereich, welcher der durch die Gleichung (1.) constituirte *Gattungsbereich* oder *Körper* genannt und durch $\mathfrak{G}(x)$ bezeichnet wird. Sind

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

die n conjugirten Wurzeln jener Gleichung, so werden durch sie die n conjugirten Gattungsbereiche

$$\mathfrak{G}(x_1), \quad \mathfrak{G}(x_2), \quad \ldots, \quad \mathfrak{G}(x_n)$$

constituirt.

Jede Grösse X_1 des Bereiches $\mathfrak{G}(x_1)$ genügt mit ihren n conjugirten Grössen $X_1, \ldots, X_n$ einer Gleichung des $n$ten Grades

$$X^n + B_1 X^{n-1} + \cdots + B_n = 0, \tag{2.}$$

deren Coefficienten wiederum rationale Grössen des Bereiches $(\mathfrak{R}', \ldots, \mathfrak{R}^{(\nu)})$ sind. Sind jene Coefficienten sämmtlich ganz, so heisst X eine ***ganze*** algebraische Function des Bereiches $\mathfrak{G}(x)$. Die ganzen algebraischen Functionen der Grössen $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\ldots$, $\mathfrak{R}^{(\nu)}$ sind auch dadurch charakterisirt, dass sie für kein endliches Werthsystem von $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots, \mathfrak{R}^{(\nu)})$ unendlich gross werden können.

Alle Grössen des Bereiches $\mathfrak{G}(x)$ können durch n rational unabhängige unter ihnen, z. B. durch die n Potenzen $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ in der Form:

$$X = u_0 + u_1 x + \cdots + u_{n-1} x^{n-1} \tag{3.}$$

so dargestellt werden, dass $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ rational sind, d. h. dem Bereiche $(\mathfrak{R}', \ldots, \mathfrak{R}^{(\nu)})$ angehören. Bei dieser Darstellung sind aber die ganzen mit den gebrochenen algebraischen Grössen des Bereiches $\mathfrak{G}(x)$ im allgemeinen vermischt, man kann nämlich einer in der Form (3.) dargestellten Grösse nicht ansehen, ob ihre Gleichung (2.) nur ganze, oder ob sie auch gebrochene Coefficienten besitzt.

Da nun die Untersuchung *aller* Grössen von $\mathfrak{G}(x)$ die Erforschung aller *ganzen* Grössen zur nothwendigen Voraussetzung hat, so ist die Aufgabe eine für alle ganzen Grössen und nur für diese gültige Darstellungsform zu finden von grundlegender Bedeutung für die Algebra geworden. Diese Aufgabe ist in ihrer ganzen Allgemeinheit zuerst von ***Leopold Kronecker*** gestellt und gelöst worden. Er hat gezeigt, dass man aus dem Bereiche $\mathfrak{G}(x)$ eine Anzahl von ganzen Grössen

$$x^{(1)}, \quad x^{(2)}, \quad \ldots, \quad x^{(m)} \tag{4.}$$

so herausgreifen kann, dass alle ganzen Grössen und nur sie in der Form

$$w = u_1 x^{(1)} + u_2 x^{(2)} + \cdots + u_m x^{(m)}$$

mit *ganzen* rationalen Coefficienten dargestellt sind. Ein solches System heisst ein ***Fundamentalsystem*** für den Bereich $\mathfrak{G}(x)$. Die Anzahl m seiner Elemente kann grösser sein, als die Ordnung n von $\mathfrak{G}(x)$; alsdann sind $x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}$ zwar nicht rational unabhängig, aber man kann dann nicht eine jener Grössen durch die übrigen homogen und linear mit *ganzen*, sondern nur mit *gebrochenen* rationalen Coefficienten darstellen. Ersetzt man in den

Grössen (4.) x der Reihe nach durch $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so erhält man n conjugirte Systeme:

$$x_k^{(1)}, \quad x_k^{(2)}, \quad \ldots, \quad x_k^{(m)}, \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

welche bezw. Fundamentalsysteme für die n conjugirten Gattungsbereiche $\mathfrak{G}(x_1), \ldots, \mathfrak{G}(x_n)$ sind. Das aus diesen mn Elementen gebildete System

$$(x_k^{(i)}) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \ldots & x_1^{(m)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_2^{(m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \ldots & x_n^{(m)} \end{pmatrix}$$

enthält eine Anzahl von quadratischen Systemen $n$ter Ordnung, welche man dadurch erhält, dass man irgend welche $m-n$ seiner Colonnen fortlässt. Die Quadrate aller jener Determinanten sind ganze rationale Grössen des Bereiches $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots, \mathfrak{R}^{(\nu)})$, welche innerhalb desselben als in ihre Primfactoren zerlegt angenommen werden können. Den grössten gemeinsamen Theiler Δ aller dieser Determinantenquadrate nennt ***Kronecker*** die ***Discriminante der Gattung*** $\mathfrak{G}(x)$ und zeigt, dass ihre genaue Kenntniss für die Ergründung der Natur der Gattungsbereiche von fundamentaler Bedeutung ist. Dieser Theiler besteht aus einer ganzen Grösse des Rationalitätsbereiches, welche einen jeden Primfactor so oft enthält, als er in jenen Determinantenquadraten mindestens enthalten ist; ausserdem wird derselbe aber im allgemeinen noch sog. Divisorensysteme höherer Ordnung enthalten, welche den Werthsystemen entsprechen, welche die von ihrem grössten gemeinsamen Theiler befreiten Determinanten zum Verschwinden bringen. So haben z. B. die beiden Functionen $(\mathfrak{R}'^2-2\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'\mathfrak{R}''-3\mathfrak{R}')$ den Theiler $\mathfrak{R}'$, aber auch noch den Theiler zweiter Stufe $(\mathfrak{R}'-2, \mathfrak{R}''-3)$ gemeinsam, denn jene beiden Functionen, welche nach Beseitigung des gemeinsamen Factors $\mathfrak{R}'$ übrig bleiben, verschwinden noch, wenn zugleich $\mathfrak{R}'=2$, $\mathfrak{R}''=3$ gesetzt werden. Auf die Untersuchung dieser Divisoren höherer Stufe soll in dieser Arbeit nicht eingegangen werden; die Aufstellung der entsprechenden Resultate für diese soll z. Th. in einer späteren Abhandlung gegeben werden.

In einer anderen Arbeit werde ich die sämmtlichen Theiler der Gattungsdiscriminante Δ angeben, hier möge nur das Resultat und einige für die Folge wichtigen Bemerkungen über seine Herleitung angefügt werden.

Eine innerhalb $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots, \mathfrak{R}^{(\nu)})$ irreductible ganze Function bleibt im allgemeinen innerhalb des Gattungsbereiches $\mathfrak{G}(x, \mathfrak{R}', \ldots, \mathfrak{R}^{(\nu)})$ nicht

mehr irreductibel, aber sie kann innerhalb jenes Bereiches auf eine und nur eine Weise in ein Product von Primfactoren zerlegt werden. Fasst man die gleichen Primfactoren zu Potenzen zusammen, so ergiebt sich eine Zerlegung

$$P \sim \Pi_1^{\varepsilon_1} \Pi_2^{\varepsilon_2} \dots \Pi_g^{\varepsilon_g},$$

wo $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_g$ die sämmtlichen von einander verschiedenen Primdivisoren von P bedeuten. Von diesen Divisoren denke ich mir diejenigen zu einem Product vereinigt, welche zu derselben Potenz ε_i erhoben in P vorkommen; diese Zerlegung

$$P \sim P_1^{d_1} P_2^{d_2} \dots P_h^{d_h} \tag{5.}$$

werde der folgenden Untersuchung zu Grunde gelegt. Hier sind also alle Exponenten $d_1, d_2, \dots, d_h$ von einander verschiedene ganze Zahlen, und $P_1, P_2, \dots, P_h$ bestehen aus lauter von einander verschiedenen Primtheilern.

Es sei allgemein P_i von der Ordnung k_i d. h. das Product $N(P_i)$ aller n zu P_i conjugirten Theiler sei gleich P^{k_i}. Bildet man dann in der Aequivalenz (5.) auf beiden Seiten die Norm, so folgt:

$$P^n = P^{k_1 d_1 + k_2 d_2 + \dots + k_h d_h},$$

es besteht also die Gleichung

$$n = k_1 d_1 + k_2 d_2 + \dots + k_h d_h. \tag{6.}$$

Die Ordnung k_1 des Divisors P_1 kann aber noch anders definirt werden: Lässt man unter den m Elementen $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ des Fundamentalsystemes von $\mathfrak{G}$ alle diejenigen fort, welche modulo P_1 betrachtet durch die übrigen homogen und linear mit ganzen rationalen Coefficienten dargestellt werden können, so gelangt man zuletzt zu einem Systeme von Elementen, welche modulo P_1 rational unabhängig sind, und durch welche dann modulo P_1 betrachtet jede Grösse des Bereiches in der eben angegebenen Weise dargestellt werden kann. Ein solches System nenne ich ein ***Fundamentalsystem modulo*** P_1, und die andere Bedeutung der Ordnungszahl k_1 von P_1 ist die, dass m die Anzahl der modulo P_1 rational unabhängigen ganzen Grössen oder die Anzahl der Elemente eines Fundamentalsystemes modulo P_1 angiebt.

Ist nun (5.) die Zerlegung von P in die verschiedenen Potenzen seiner Theiler innerhalb $\mathfrak{G}$, so besteht der folgende Satz:

Die Gattungsdiscriminante $\Delta(\mathfrak{R}' \mathfrak{R}'', \dots, \mathfrak{R}^{(\nu)})$ ist genau durch die Potenz

$$P^{k_1(d_1-1)+k_2(d_2-1)+\dots+k_h(d_h-1)}$$

oder was dasselbe ist, durch die Potenz

$$p^{n-k}$$

von P theilbar, wenn $k = k_1 + \cdots + k_h$ die Ordnung aller ungleichen in P aufgehenden Factoren bedeutet.

Eine Ausnahme tritt dann und nur dann ein, wenn die unzerlegbare Function P ein Theiler des Productes $d_1 d_2 \ldots d_h$ der Exponenten von $P_1, \ldots, P_h$ ist. Dies kann also nur dann der Fall sein, wenn P die Variablen $\mathfrak{R}^{(i)}$ garnicht enthält, sondern eine reelle Primzahl p ist, und auch dann nur in einer sehr kleinen Anzahl ganz specieller Fälle, besonders niemals, wenn p grösser ist als die Ordnung n von $\mathfrak{G}$.

Statt des natürlichen Rationalitätsbereiches $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots, \mathfrak{R}^{(\nu)})$ kann man der Untersuchung auch einen Gattungsbereich Γ zu Grunde legen, welcher durch alle rationalen Functionen von einer beliebigen algebraischen Grösse ξ und den ν Variablen $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\ldots$, $\mathfrak{R}^{(\nu)}$ gebildet ist; alsdann sind als rational alle Grössen von Γ und nur diese anzusehen. Genügt dann die Grösse x innerhalb dieses Bereiches einer irreductiblen Gleichung $n$ten Grades:

$$(7.) \quad x^n + A_1(\xi;\ \mathfrak{R}', \ldots, \mathfrak{R}^{(\nu)})x^{n-1} + \cdots + A_n(\xi,\ \mathfrak{R}', \ldots, \mathfrak{R}^{(\nu)}) = 0,$$

deren Coefficienten dem Bereiche Γ angehören, so wird durch alle rationalen Functionen von x, deren Coefficienten zu Γ gehören, wieder ein Gattungsbereich $n$ter Ordnung constituirt, und wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die n conjugirten Wurzeln der Gleichung (7.) bedeuten, so ergeben sich wieder die n conjugirten Bereiche $\mathfrak{G}(x_1)$, $\mathfrak{G}(x_2)$, $\ldots$, $\mathfrak{G}(x_n)$. Sind nun wieder

$$x_k^{(1)}, \quad x_k^{(2)}, \quad \ldots, \quad x_k^{(m)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

n conjugirte Fundamentalsysteme und Δ die aus den Determinanten der Matrix $(x_k^{(i)})$ sich ergebende Discriminante der Gattung $\mathfrak{G}$, so sind ihre Theiler niedrigster oder erster Stufe jetzt Primdivisoren des Rationalitätsbereiches Γ, und diese können genau ebenso, wie vorher bei dem natürlichen Rationalitätsbereiche $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots, \mathfrak{R}^{(\nu)})$ bestimmt werden.

Es sei nämlich jetzt P ein unzerlegbarer oder Primtheiler erster Stufe des Bereiches Γ, d. h. ein algebraischer Primtheiler innerhalb Γ einer irreductiblen *rationalen* Function $\bar{P}(\mathfrak{R}', \ldots, \mathfrak{R}^{(\nu)})$, dann kann P jetzt innerhalb $\mathfrak{G}$ weiter in seine mehrfachen Theiler zerlegt werden, sodass

$$P \sim P_1^{d_1} P_2^{d_2} \ldots P_h^{d_h}$$

wird, und $P_1, P_2, \ldots, P_h$ sämmtlich keine gleichen Factoren enthalten,

während $d_1, \ldots, d_h$ von einander verschieden sind. Sind dann $k_1, k_2, \ldots, k_h$ die Ordnungszahlen von $P_1, P_2, \ldots, P_h$, so ist P in der Gattungsdiscriminante genau $(n-k)$-mal enthalten, wenn wieder

$$k = k_1+k_2+\cdots+k_h$$

die Gesammtordnung der von einander verschiedenen Theiler $P_1, P_2, \ldots, P_h$ von P bedeutet.

Die Gattungsdiscriminante Δ ist aber nur eine von n anderen Invarianten, auf welche ich bereits in einer früheren Abhandlung hingewiesen habe, und deren Bestimmung den Gegenstand dieser Arbeit bildet. Betrachtet man nämlich in der aus den n conjugirten Fundamentalsystemen gebildeten Matrix

$$(x_h^{(i)}) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \ldots & x_1^{(m)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_2^{(m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \ldots & x_n^{(m)} \end{pmatrix}$$

alle Unterdeterminanten einer bestimmten $h$ten Ordnung, so ist ihr grösster gemeinsamer Theiler D_h zwar selbst nicht rational, wohl aber eine gewisse ganzzahlige Potenz desselben, jeder solcher Determinantentheiler kann also als die Wurzel aus einer ganzen Grösse des Rationalitätsbereiches I' von $(\xi, \mathfrak{R}', \ldots, \mathfrak{R}^{(\nu)})$ dargestellt worden; er besteht also aus einem Producte von lauter rationalen Primfactoren mit positiven rational gebrochenen Exponenten. Der Beweis dieses Satzes kann wörtlich ebenso geführt werden, wie ich ihn für den Fall $\xi = 1$, $\nu = 1$ d. h. für die algebraischen Functionen von einer einzigen Variablen $\mathfrak{R}$ in einer früheren Arbeit angegeben habe*). Die n so sich ergebenden Determinantentheiler $D_1, D_2, \ldots, D_n$ sind also sämmtlich Wurzelfunctionen dieser Art, von denen jeder ein Theiler der folgenden ist. Also sind auch die sog. *Elementartheiler* jener Matrix

$$E_h = \frac{D_{h+1}}{D_h}$$

ebenfalls ganze Wurzelfunctionen von $(\xi, \mathfrak{R}', \ldots, \mathfrak{R}^{(\nu)})$ und aus der allgemeinen Theorie der Systeme geht hervor, dass auch in der Reihe

$$E_1, \quad E_2, \quad \ldots, \quad E_n$$

jede Function ein Vielfaches der vorhergehenden ist. Da das Quadrat des

*) Ueber einen neuen Fundamentalsatz in der Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen. Dieses Journ. Band 115. S. 254—294. Vgl. S. 261.

letzten Determinantentheilers D_n gleich der vorher betrachteten Gattungsdiscriminante Δ ist, so besteht die Gleichung

$$E_1^2 E_2^2 \ldots E_n^2 = \Delta,$$

d. h. durch diese Elementartheiler ist die Gattungsdiscriminante eindeutig bestimmt, jedoch findet das Umgekehrte offenbar keineswegs statt.

Die Bestimmung dieser Elementartheiler soll nun für einen Gattungsbereich $\mathfrak{G}$ innerhalb eines beliebigen Rationalitätsbereiches $\Gamma(\xi, \mathfrak{R}', \ldots, \mathfrak{R}^{(r)})$ gegeben werden. Das Princip dieser Herleitung habe ich bereits in einer früheren Arbeit benutzt, aber noch nicht auf die Bestimmung jener Elementartheiler angewendet.

§ 2.

Da die Elementartheiler der Matrix $(x_k^{(i)})$ sämmtlich Wurzelfunctionen des Bereiches Γ sind, so braucht man nur zu untersuchen, wie oft ein beliebiger irreductibler Factor P jenes Bereiches der Reihe nach in $E_1, E_2, \ldots, E_n$ enthalten ist. Bei dieser Betrachtung kann man aber das System von m Elementen durch ein einfacheres ersetzen, dessen Elementenzahl gleich n, d. h. gleich der Ordnung der betrachten Gattung ist. Bildet man nämlich in der Matrix von mn Elementen $(x_k^{(i)})$ alle ihre Determinanten $n$ter Ordnung, so sind ihre Quadrate ganz und rational, sie selbst also Quadratwurzeln aus ganzen Grössen von Γ; unter ihnen greife ich die oder, falls es mehrere sein sollten, eine von den Determinanten $n$ter Ordnung heraus, welche den Primfactor P in der niedrigsten Potenz enthält, und setze die Bezeichnung von vorn herein als so gewählt voraus, dass dieses die erste Determinante jener Matrix, also die aus den Elementen

$$x^{(1)}, \quad x^{(2)}, \quad \ldots, \quad x^{(n)}$$

und ihren conjugirten gebildete Determinante ist. Dann ist jenes System $(x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)})$ dem ganzen Systeme $(x_k^{(i)})$ in der Weise äquivalent, dass ihre Elementartheiler, soweit sie Potenzen dieses Primfactors P sind, übereinstimmen.

In der That ist jenes specielle System ein Theilsystem von dem ganzen Fundamentalsystem und daher sind seine Elementartheiler $E_1', \ldots, E_n'$ nach einem bekannten Satze*) Vielfache der Elementartheiler $E_1, \ldots, E_n$

*) Vgl. meine Arbeit: Ueber die Elementartheiler componirter Systeme; dieses Journal Bd. 114 S. 109—115.

des ganzen Fundamentalsystemes. Andererseits enthält aber ihr Product $E'_1 \ldots E'_n = D'_n$ genau die gleiche Potenz von P wie das Product $D_n = E_1 \ldots E_n$ und hieraus folgt, dass allgemein $E_i = E'_i$ sein muss.

Ein solches System $(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ soll ein ***Fundamentalsystem modulo P*** genannt werden. Die Berechtigung dieser Benennung ergiebt sich aus dem folgenden Satze:

> Ist $(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ ein Fundamentalsystem modulo P für den Gattungsbereich $\mathfrak{G}(x)$, so kann jede ganze Grösse X auf eine und nur eine Weise in der Form
>
> $$X^{(1)} = u_1 x^{(1)} + u_2 x^{(2)} + \cdots + u_n x^{(n)}$$
>
> mit modulo P ganzen, d. h. mit solchen rationalen Coefficienten dargestellt werden, welche P nicht im Nenner enthalten.

Da nämlich die Determinante des Systemes $(x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)})$ von Null verschieden ist, so kann eine beliebige ganze Grösse X von $\mathfrak{G}$ auf eine und nur eine Weise in der obigen Form mit rationalen Coefficienten u_k dargestellt werden. Enthielte nun auch nur ein Coefficient etwa u_1 den Factor P im Nenner, ohne dass er sich forthebt, so würde die Determinante des Systemes $(X_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(n)})$, welche offenbar gleich $u_1 |x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)}|$ ist, P mindestens einmal weniger oft enthalten als die des Systemes $(x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)})$ was der über dieses gemachten Voraussetzung widerstreitet. Die Elemente $(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ eines Fundamentalsystemes modulo P sind somit für diesen Modul in der Weise rational unabhängig, dass eine Congruenz mit ganzen rationalen Coefficienten

$$u_1 x^{(1)} + \cdots + u_n x^{(n)} \equiv 0 \pmod{P}$$

dann und nur dann erfüllt ist, wenn alle Coefficienten durch P theilbar sind, und umgekehrt erkennt man leicht, dass jedes System von n modulo P rational unabhängigen ganzen Grössen ein Fundamentalsystem für P ist, denn dann kann jede ganze Grösse X durch seine Elemente homogen und linear mit modulo P ganzen Coefficienten dargestellt werden.

Anstatt also die Elementartheiler des ganzen Fundamentalsystemes zu bestimmen, kann man die Theiler eines beliebigen Fundamentalsystemes modulo P aufsuchen.

Es seien nun

$$P^{r_1}, \quad P^{r_2}, \quad \ldots, \quad P^{r_n}$$

die Potenzen von P mit rational gebrochenen Exponenten, welche in den Ele-

mentartheilern $E_1, E_2, \ldots, E_n$ enthalten sind. Dann ist zunächst die Summe jener hier zu bestimmenden Exponenten bekannt; denn das Product $E_1 \ldots E_n = \sqrt{D}$ ist genau durch $P^{\frac{1}{2}(n-k)}$ theilbar, wenn k die Ordnung $k_1 + k_2 + \cdots + k_h$ aller von einander verschiedenen Theiler von P innerhalb $\mathfrak{G}$ bedeutet; es ist also:

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = \tfrac{1}{2}(n-k).$$

Mit Hülfe eben jener Zerlegung von P in seine mehrfachen Factoren innerhalb $\mathfrak{G}$ kann man jetzt aber leicht ein Fundamentalsystem modulo P aufstellen, aus welchem jene Potenzen P^{r_i} selbst sich ohne weiteres ergeben. Man kann nämlich zunächst für den ersten Factor P_1 ein Fundamentalsystem von k_1 Elementen aufstellen, welche modulo P_1 rational unabhängig sind und durch welches alle anderen ganzen Grössen modulo P_1 homogen und linear mit ganzen Coefficienten darstellbar sind. Es sei nun $(\mathfrak{z}^{(1)}, \mathfrak{z}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{z}^{(k_1)})$ ein solches Fundamentalsystem; dann kann man mit seiner Hilfe zunächst leicht ein Fundamentalsystem für den Modul $P_1^{d_1}$ bilden, und dann aus den einzelnen Fundamentalsystemen für die $h-1$ anderen in P enthaltenen Divisorenpotenzen $P_2^{d_2}, \ldots, P_h^{d_h}$ ein solches für den Modul P selbst zusammensetzen. Zunächst ist das System von $k_1 d_1$ Elementen

$$(8.)\quad \frac{P}{P_1^{d_1}}\mathfrak{z}^{(1)}, \ldots, \frac{P}{P_1^{d_1}}\mathfrak{z}^{(k_1)}; \quad \frac{P}{P_1^{d_1-1}}\mathfrak{z}^{(1)}, \ldots, \frac{P}{P_1^{d_1-1}}\mathfrak{z}^{(k_1)}; \ldots; \quad \frac{P}{P_1}\mathfrak{z}^{(1)}, \ldots, \frac{P}{P_1}\mathfrak{z}^{(k_1)}$$

ein Fundamentalsystem für den Modul $P_1^{d_1}$, denn eine homogene lineare Function w dieser $k_1 d_1$ Elemente mit ganzen rationalen Coefficienten kann nur dann durch $P_1^{d_1}$ theilbar sein, wenn alle ihre Coefficienten durch P selbst theilbar sind. Soll nämlich eine solche Summe durch $P_1^{d_1}$ theilbar sein, so muss sie zunächst P_1 selbst enthalten; modulo P_1 betrachtet fallen aber alle Elemente ausser den k_1 ersten fort, und eine Congruenz

$$\frac{P}{P_1^{d_1}}\left(u_1\mathfrak{z}^{(1)} + \cdots + u_{k_1}\mathfrak{z}^{(k_1)}\right) \equiv 0 \pmod{P_1}$$

kann, da der Factor $\frac{P}{P_1^{d_1}}$ zu P_1 relativ prim ist, nur bestehen, wenn alle Coefficienten durch P theilbar sind. Lässt man also diese durch P theilbaren Glieder aus w fort, und untersucht jetzt zunächst die Bedingung dafür, dass w durch P_1^2 theilbar ist, so findet man genau ebenso, dass auch die Coefficienten der k_1 nächsten Elemente P enthalten müssen, und durch

analoges Weiterschliessen zeigt man, dass jenes System in der That ein Fundamentalsystem modulo $P_1^{d_1}$ ist.

Jedes Element dieses Systemes enthält aber die übrigen Divisoren $P_2, \ldots, P_h$ ausser P_1 genau so oft, als P selbst; denkt man sich also für jede dieser h Divisorenpotenzen $P_1^{d_1}, \ldots, P_h^{d_h}$ das dem Systeme (8.) entsprechende Fundamentalsystem gebildet, so ergeben ihre $n = k_1 d_1 + \cdots + k_h d_h$ Elemente zusammengenommen ein Fundamentalsystem für P, weil eine homogene lineare Function jener Elemente mit ganzen Coefficienten nur dann durch P theilbar ist, wenn dasselbe für jeden der h Factoren $P_i^{d_i}$ gilt, und dies ist wiederum nur der Fall, wenn alle Coefficienten der Elemente des Fundamentalsystemes für $P_i^{d_i}$ durch P theilbar sind.

Aus dem so bestimmten Fundamentalsysteme modulo P können nun die gesuchten Elementartheiler leicht gefunden werden: Zunächst ist nämlich in dem Partialsystem (8.) jeder der Quotienten:

$$\frac{P}{P_1^{d_1-i}} = P_1^i P_2^{d_2} \ldots P_h^{d_h} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, d_1-1)$$

nebst seinen n conjugirten durch die gebrochene Potenz von P

$$P^{\frac{i}{d_1}} = P_1^i P_2^{\frac{i}{d_1} \cdot d_2} \ldots P_h^{\frac{i}{d_1} \cdot d_h}$$

und durch keine höhere Potenz von P algebraisch theilbar, denn beide Ausdrücke enthalten P_1 genau gleich oft, während jeder der $h-1$ anderen Divisoren in $\frac{P}{P_1^{d_1-i}}$ öfter als in $P^{\frac{i}{d_1}}$ auftritt. Also ist $P^{\frac{i}{d_1}}$ der grösste gemeinsame Theiler von $\frac{P}{P_1^{d_1-i}}$ und seinen n conjugirten Functionen.

Denkt man sich also zu den $k_1 d_1$ Elementen des Partialsystemes (8.) alle n conjugirten Systeme gebildet, so erhält man eine Matrix von n Zeilen und $k_1 d_1$ Colonnen, in welcher die conjugirten Elemente der ersten zweiten, ... Colonnen der Reihe nach durch die Potenzen

$$1,\ 1,\ \ldots,\ 1;\ P^{\frac{1}{d_1}},\ \ldots,\ P^{\frac{1}{d_1}};\ P^{\frac{2}{d_1}},\ \ldots,\ P^{\frac{2}{d_1}};\ \ldots;\ P^{\frac{d_1-1}{d_1}},\ \ldots,\ P^{\frac{d_1-1}{d_1}}$$

theilbar sind. Die Exponenten der Potenzen von P, welche so durch einfache Division aus den Colonnen jener Matrix herausgehoben werden können, lassen sich also in die k_1-mal wiederholte Bruchsequenz:

$$\left[\frac{1}{d_1}\right] = \left(\frac{0}{d_1},\ \frac{1}{d_1},\ \ldots,\ \frac{d_1-1}{d_1}\right)$$

zusammenfassen. Im Ganzen sind also die Colonnen jener Matrix durch die Potenz P^{K_1} theilbar, deren Exponent durch die Gleichung

$$K_1 = k_1\left(\frac{1}{d_1} + \cdots + \frac{d_1-1}{d_1}\right) = \tfrac{1}{2}k_1(d_1-1)$$

bestimmt ist.

Genau ebenso zeigt man nun, dass aus den Matrizen, welche durch die zu $P_2^{d_2}, \ldots, P_h^{d_h}$ gehörigen Fundamentalsysteme und ihre conjugirten gebildet werden, durch einfache Division der einzelnen Colonnen gebrochene Potenzen von P herausgehoben werden können, deren Exponenten man der Reihe nach in die k_2-mal wiederholte Sequenz $\left[\frac{1}{d_2}\right]$, u. s. w., bis zu der k_h-mal wiederholten Sequenz $\left[\frac{1}{d_h}\right]$ ordnen kann.

Im Ganzen wird so aus den Colonnen des ganzen Fundamentalsystemes modulo P durch einfache Division die Potenz

$$P^{K_1+\cdots+K_h} = P^{\frac{1}{2}\sum k_i(d_i-1)} = P^{\frac{1}{2}(n-k)}$$

herausgehoben, wenn k wieder wie oben die Gesammtordnung der zu einander theilerfremden Divisoren von P bedeutet. Dies ist aber genau die in der ganzen Determinante enthaltene Potenz von P; das nach jener Division der Colonnen verbleibende System ganzer algebraischer Grössen ist somit in Bezug auf P ein Einheitssystem, und hieraus folgt endlich nach dem in der oben erwähnten Arbeit gegebenen einfachen Beweise, dass jene gebrochenen Potenzen von P, welche in den einzelnen Colonnen des Fundamentalsystemes enthalten sind, mit den gesuchten Elementartheilern P^{r_i} identisch sind.

Es ergeben sich also die folgenden wichtigen Sätze:

Die Elementartheiler der Discriminante einer beliebigen Gattung $\mathfrak{G}$ innerhalb eines beliebigen Rationalitätsbereiches I sind sämmtlich Wurzelfunctionen jenes Rationalitätsbereiches, deren Exponenten rationale echte Brüche sind.

Ist P irgend eine unzerlegbare rationale Grösse und $P^{r_1}, P^{r_2}, \ldots, P^{r_n}$ die in jenen Elementartheilern enthaltenen Potenzen von P, so lassen sich die rationalen echten Brüche $r_1, r_2, \ldots, r_n$ stets in Sequenzen $\left[\frac{1}{\lambda}\right] = \left(\frac{0}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}, \ldots, \frac{\lambda-1}{\lambda}\right)$ anordnen.

Ist ferner

$$P = P_1^{d_1} P_2^{d_2} \ldots P_h^{d_h}$$

die Zerlegung von P in seine mehrfachen Factoren innerhalb $\mathfrak{G}$ und sind

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_h$$

die Ordnungszahlen der Factoren $P_1, \ldots, P_h$, so lassen sich die Exponenten der in den n Elementartheilern von $\mathfrak{G}$ enthaltenen Potenzen von P in die Sequenzen

$$\left[\frac{1}{d_1}\right], \quad \left[\frac{1}{d_2}\right], \quad \ldots, \quad \left[\frac{1}{d_h}\right]$$

anordnen, welche bezw.

$$k_1\text{-}, \quad k_2\text{-}, \quad \ldots, \quad k_h\text{-}$$

mal auftreten. Endlich ist die Gattungsdiscriminante von $\mathfrak{G}$ durch P^{n-k} theilbar, wenn $k = k_1 + \cdots + k_h$ die Anzahl der zu P gehörigen Sequenzen bedeutet.

Die Elementartheiler der Gattungsdiscriminante bestehen sämmtlich aus Potenzen von Primfactoren mit positiven echt gebrochenen rationalen Exponenten.

Hier wie in dieser ganzen Arbeit wurde von den Divisoren höherer Stufe sowie von denjenigen numerischen Primtheilern p abgesehen, welche in dem zugehörigen Producte $d_1 d_2 \ldots d_h$ enthalten sind; die gefundenen Sätze gelten also höchstens nicht für diejenigen unzerlegbaren Grössen P, welche speciell Zahlen und ausserdem gleich oder kleiner sind, als die Ordnung n der betrachteten Gattung.

Ist $\mathfrak{G}$ speciell eine *Galois*sche Gattung, stimmen also die zu $\mathfrak{G}(x_1)$ conjugirten Gattungsbereiche $\mathfrak{G}(x_2), \ldots, \mathfrak{G}(x_n)$ mit $\mathfrak{G}(x_1)$ überein, so enthält eine beliebige Primfunction P innerhalb $\mathfrak{G}$ jeden Primfactor P_0 genau gleich oft, es ist also in diesem Falle

$$P \sim P_0^{d_0},$$

wo P_0 jetzt keine gleichen Primfactoren enthält. Ist also k_0 die Ordnung von P_0, so ist $k_0 d_0 = n$, und man erhält hier den einfachen Satz:

> Die zu einer unzerlegbaren Function P gehörigen Sequenzen für die Discriminante einer *Galois*schen Gattung sind alle einander gleich, und ihre Anzahl und ihr Nenner sind zwei complementäre Theiler der Ordnung jener Gattung.

Die Betrachtungen dieser Arbeit hatten ergeben, dass man für jede unzerlegbare Function P als Modul nicht bloss ein Fundamentalsystem

$$x^{(1)}, \quad x^{(2)}, \quad \ldots, \quad x^{(n)}$$

von nur n Elementen aufstellen, sondern dieses auch stets so wählen kann, dass die Elementartheiler $P^{r_1}, P^{r_2}, \ldots, P^{r_n}$ des Systemes $(x_k^{(i)})$ mit den Theilern der in einer Colonne stehenden Grössen $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}$ übereinstimmen, dass also allgemein

$$P^{r_i} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)})$$

ist. Diese Theiler sollen als die n ***Colonnentheiler*** bezeichnet und ein solches System nach einer bereits früher angewendeten Terminologie ein ***kanonisches System*** genannt werden. Dann ist also kanonisch jedes System, dessen n Elementartheiler mit seinen n Colonnentheilern identisch sind.

Componirt man ein beliebiges System $(x_k^{(i)})$ vorn mit einem beliebigen Einheitssysteme $(a_i^{(h)})$, so besitzt das so erhaltene System

$$(\bar{x}_k^{(i)}) = (a_i^{(h)})(x_k^{(i)})$$

dieselben Elementartheiler, aber auch dieselben Colonnentheiler; ist nämlich $(\alpha_i^{(h)})$ das zu $(a_i^{(h)})$ reciproke Einheitssystem, so folgt aus der obigen Gleichung die entsprechende:

$$(x_k^{(i)}) = (\alpha_i^{(h)})(\bar{x}_k^{(i)}).$$

Aus ihnen folgt zunächst, dass die entsprechenden Elementartheiler beider Systeme identisch sind, da jeder in dem anderen enthalten ist. Aus den Gleichungssystemen:

$$\bar{x}_h^{(i)} = a_h^{(1)} x_1^{(i)} + a_h^{(2)} x_2^{(i)} + \cdots + a_h^{(n)} x_n^{(i)}, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

$$x_h^{(i)} = \alpha_h^{(1)} \bar{x}_1^{(i)} + \alpha_h^{(2)} \bar{x}_2^{(i)} + \cdots + \alpha_h^{(n)} \bar{x}_n^{(i)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

folgt aber weiter, dass jedes Element der $i$ten Colonne $(\bar{x}_1^{(i)}, \ldots, \bar{x}_n^{(i)})$ durch den $i$ten Colonnentheiler von $(x_k^{(i)})$ theilbar ist, und umgekehrt, d. h. es stimmen auch die entsprechenden Colonnentheiler beider Systeme überein.

Wendet man dieses Resultat auf die kanonischen Systeme an, so ergiebt sich der für die Anwendungen wichtige Satz:

Ein kanonisches System modulo P bleibt kanonisch, wenn man es vorn mit einem beliebigen Einheitssysteme modulo P componirt.

Selbstverständlich bleibt ein so componirtes System im allgemeinen kein Fundamentalsystem für $\mathfrak{G}(x_1)$ mehr, weil durch jene Composition die einzelnen Horizontalreihen zu einander addirt werden.

Ueber die Elementartheiler zweier Gattungen, von denen die eine unter der anderen enthalten ist.

(Von Herrn *Kurt Hensel*.)

Es seien

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n$$

die n conjugirten Wurzeln einer irreductiblen Gleichung des $n$ten Grades, deren Coefficienten einem beliebigen Rationalitätsbereiche Γ angehören, welcher seinerseits aus algebraischen Grössen bestehen, also ein Gattungsbereich sein kann, und

$$\mathfrak{G}_1, \quad \mathfrak{G}_2, \quad \ldots, \quad \mathfrak{G}_n$$

die durch jene algebraischen Grössen constituirten conjugirten Gattungsbereiche.

Es bedeute ferner η_1 irgend eine algebraische Grösse des Gattungsbereiches $\mathfrak{G}_1$, welche aber nicht einer irreductiblen Gleichung vom $n$ten Grade genügt, sondern nur einer Gleichung eines Grades ν, welcher kleiner ist als n. Dann ist ν bekanntlich ein Theiler von n, und es sei

$$n = \mu\nu.$$

Alle rationalen Functionen von η_1 constituiren dann einen Gattungsbereich G_1, dessen Elemente alle auch zu $\mathfrak{G}_1$ gehören, also einen Theilbereich von $\mathfrak{G}_1$ bilden; darum heisst der Gattungsbereich G_1 unter $\mathfrak{G}_1$ enthalten. Sind ferner

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \ldots, \quad \eta_\nu$$

die ν zu η_1 conjugirten algebraischen Functionen, so bilden diese ν conjugirten Gattungsbereiche, welche durch

$$G_1, \quad G_2, \quad \ldots, \quad G_\nu$$

bezeichnet werden mögen.

Von den $n = \mu\nu$ conjugirten Bereichen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n$ sind nun je μ für den Gattungsbereich G_1 in der Weise conjugirt, dass ihre symmetrischen Functionen jenem Bereiche G_1 angehören, und ein Gleiches gilt für einen

jeden der ν conjugirten Bereiche $G_1, G_2, \ldots, G_\nu$. Es sei die Bezeichnung der n conjugirten Bereiche von vorn herein so gewählt, dass

$$\begin{array}{llllll} \mathfrak{G}_1, & \mathfrak{G}_{\nu+1}, & \ldots, & \mathfrak{G}_{(\mu-1)\nu+1} & \text{für} & G_1, \\ \mathfrak{G}_2, & \mathfrak{G}_{\nu+2}, & \ldots, & \mathfrak{G}_{(\mu-1)\nu+2} & - & G_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{G}_\nu, & \mathfrak{G}_{2\nu}, & \ldots, & \mathfrak{G}_{\mu\nu} & - & G_\nu \end{array}$$

conjugirt sind. Ist dann Y_i irgend eine Grösse des Bereiches $\mathfrak{G}_i$, so ist

$$H_i = Y_i + Y_{\nu+i} + \cdots + Y_{(\mu-1)\nu+i} = \sum_{h=0}^{\mu-1} Y_{i+h\nu}$$

eine algebraische Grösse des Bereiches G_i. Jede solche Grösse H_i werde in Erweiterung einer *Dedekind*schen Bezeichnung ***die Spur von*** Y_i genannt und jedesmal, wie oben geschehen, durch den entsprechenden griechischen Buchstaben bezeichnet. Dann entspricht jedem Elemente Y_i von $\mathfrak{G}_i$ ein und nur ein Element H_i des entsprechenden Bereiches G_i, und conjugirten Grössen Y_i und Y_k entsprechen conjugirte Spuren H_i und H_k*), endlich ist die Spur einer Grösse H_i, welche dem Bereiche G_i selbst angehört, gleich μH_i, weil hier die μ conjugirten Grössen $H_{h\nu+i}$ einander gleich sind. Ebenso werde ein System $(H_i^{(1)}, \ldots, H_i^{(m)})$ von G_i als die Spur eines Systemes $(Y_i^{(1)}, \ldots, Y_i^{(m)})$ von $\mathfrak{G}_i$ bezeichnet, wenn dessen Elemente $H_i^{(h)}$ die Spuren der entsprechenden Elemente $Y_i^{(h)}$ sind.

Dann besteht mit einer gleich zu erwähnenden sehr speciellen Ausnahme der folgende wichtige Satz:

> Die Spur eines jeden Fundamentalsystemes für den Gattungsbereich $\mathfrak{G}_1$ bildet ein Fundamentalsystem für den unter $\mathfrak{G}_1$ enthaltenen Gattungsbereich G_1.

In der That, ist $(y_1^{(1)}, \ldots, y_1^{(m)})$ irgend ein Fundamentalsystem für $\mathfrak{G}_1$, so kann auch jede ganze Grösse η_1 des unter $\mathfrak{G}_1$ enthaltenen Bereiches G_1 in der Form:

$$\eta_1 = u_1 y_1^{(1)} + u_2 y_1^{(2)} + \cdots + u_m y_1^{(m)}$$

so dargestellt werden, dass die Coefficienten $u_1, \ldots, u_m$ *ganze* rationale Grössen sind. Bildet man also auf beiden Seiten die Spur, und beachtet die oben über die Spur von η_1 gemachte Bemerkung, so ergiebt sich die Darstellung:

$$\mu\eta_1 = u_1 \eta_1^{(1)} + u_2 \eta_1^{(2)} + \cdots + u_m \eta_1^{(m)}$$

*) Offenbar kann man die Indices i und k auch grösser als ν voraussetzen, wenn man übereinkommt, alsdann von H_i und $H_{h\nu+i}$ als gleich zu betrachten.

oder man erhält die folgende Darstellung der Grösse η_1:

$$\eta_1 = \frac{u_1}{\mu}\eta_1^{(1)} + \frac{u_2}{\mu}\eta_1^{(2)} + \cdots + \frac{u_m}{\mu}\eta_1^{(m)},$$

in welcher die Coefficienten $\frac{u_1}{\mu}, \ldots, \frac{u_m}{\mu}$ höchstens den Zahlenfactor μ als Nenner enthalten können; es ergiebt sich als das Resultat:

> Die Spur $(\eta_1^{(1)}, \ldots, \eta_1^{(m)})$ des Fundamentalsystemes $(y_1^{(1)}, \ldots, y_1^{(m)})$ ist ein Fundamentalsystem für die Gattung G_1 ausser für diejenigen Primgrössen, welche ***Zahlen*** und in dem Quotienten $\mu = \frac{n}{\nu}$ der Ordnungszahlen von $\mathfrak{G}_1$ und G_1 enthalten sind. Von diesen verschwindend wenigen Ausnahmen soll im Folgenden stets abgesehen werden.

Dieses Resultat giebt nun sofort eine wichtige Einsicht in die Beziehung, welche zwischen den Elementartheilern der enthaltenden und der enthaltenen Gattung besteht. Ersetzt man nämlich in der Matrix

$$(y) = (y_i^{(1)}, y_i^{(2)}, \ldots, y_i^{(m)}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

von mn Elementen, welche durch die n conjugirten Fundamentalsysteme von $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n$ gebildet wird, ihre ersten ν Zeilen durch ihre Spuren, so erhält man ein System $\binom{\eta}{y}$, welches sich von (y) nur dadurch unterscheidet, dass an die Stelle der Fundamentalsysteme für die ν ersten Gattungen $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_\nu$ die entsprechenden Fundamentalsysteme für die enthaltenen Gattungen $G_1, \ldots, G_\nu$ getreten sind, während die $n-\nu$ letzten Zeilen sich garnicht geändert haben. Andererseits erkennt man leicht, dass das System $\binom{\eta}{y}$ dem Systeme (y) äquivalent ist, denn von seinen ν ersten Zeilen geht allgemein die $i$te aus der entsprechenden von (y) dadurch hervor, dass zu ihr der Reihe nach die $(i+\nu)$-te, $(i+2\nu)$-te, $\ldots$, $(i+(\mu-1)\nu)$-te Zeile addirt wird. Daraus folgt also, dass die beiden Systeme $\binom{\eta}{y}$ und (y) dieselben Elementartheiler haben. Betrachtet man jetzt das System

$$(\eta) = \begin{pmatrix} \eta_1^{(1)} & \eta_1^{(2)} & \ldots & \eta_1^{(m)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_\nu^{(1)} & \eta_\nu^{(2)} & \ldots & \eta_\nu^{(m)} \end{pmatrix}$$

für sich, welches aus den ν conjugirten Fundamentalsystemen für $G_1, G_2, \ldots, G_\nu$ gebildet ist, so sind seine Elementartheiler Vielfache der entsprechenden

Elementartheiler von $\binom{\eta}{y}$ oder, was dasselbe ist von (y) selbst; denn das System (η) besteht aus den ν ersten Zeilen von $\binom{\eta}{y}$, ist also ein Partialsystem von diesem*). Hieraus folgt also der wichtige Satz:

> Die Elementartheiler einer beliebigen Gattung sind in den entsprechenden Theilern einer jeden unter ihr enthaltenen Gattung enthalten.

Eine unmittelbare Folge dieses Satzes, welche aber viel weniger tief liegt, als der Satz selbst, ist in dem Theorem ausgesprochen:

> Die Determinantentheiler einer Gattung sind Theiler der entsprechenden Determinantentheiler jeder in ihr enthaltenen Gattung.

Die Gattung $\mathfrak{G}_1$ selbst ist offenbar den unter $\mathfrak{G}_1$ enthaltenen Gattungen G_1 zuzuzählen; ferner muss man für eine jede Gattung G_1 der νten Ordnung die Elementartheiler und damit auch die Determinantentheiler von höherer als der νten Ordnung gleich Null setzen; dann ist jeder Elementartheiler, also auch jeder Determinantentheiler einer beliebigen $h$ten Ordnung in allen Theilern derselben Ordnung für alle unter $\mathfrak{G}_1$ enthaltenen Gattungen G_1 enthalten, und da $\mathfrak{G}_1$ selbst unter jenen enthaltenen Gattungsbereichen vorkommt, so ergiebt sich der wichtige Satz:

> Diese Elementartheiler (Determinantentheiler) einer beliebigen Gattung $n$ter Ordnung $\mathfrak{G}_1$ sind die grössten gemeinsamen Divisoren der entsprechenden Elementartheiler (Determinantentheiler) für alle unter $\mathfrak{G}_1$ enthaltenen Gattungen.

§ 2.

Im vorigen Abschnitte wurde nachgewiesen, dass sowohl die Determinantentheiler als auch die Elementartheiler einer Gattung $\mathfrak{G}_1$ in den entsprechenden Theilern jeder enthaltenen Gattung G_1 enthalten sind, und hiernach scheint es zunächst gleichgültig zu sein, ob man die n Determinantentheiler einer Gattung $\mathfrak{G}_1$ als die fundamentalen, und die n Elementartheiler derselben als die abgeleiteten Invarianten betrachten, oder ob man

*) Für den Beweis des wichtigen Satzes, dass die Elementartheiler eines beliebigen Systemes Theiler der entsprechenden Elementartheiler eines jeden seiner Partialsysteme sind, vergleiche z. B. meine Arbeit „Ueber die Elementartheiler componirter Systeme“ dieses Journal Bd. 114 S. 109—115.

lieber umgekehrt die letzteren als die ursprünglichen Invarianten ansehen will.

Im Folgenden soll aber gezeigt werden, dass zwischen den Elementartheilern der enthaltenden und der enthaltenen Gattung eine noch weit engere Beziehung besteht, und zwar eine solche, welche für die Determinantentheiler nicht erfüllt ist; und hierdurch wird man genöthigt, die Elementartheiler als die wesentlichen, ursprünglichen, die Determinantentheiler erst als die abgeleiteten Invarianten anzusehen, im Gegensatz zu einer Bemerkung *Leopold Kronecker*s, welche sich in seinem Nachlasse vorgefunden hat.

Ist nämlich P irgend ein rationaler Primfactor und sind

$$P^{r_1}, \quad P^{r_2}, \quad \ldots, \quad P^{r_n}$$

die in den Elementartheilern von $\mathfrak{G}_1$ und

$$P^{\varrho_1}, \quad P^{\varrho_2}, \quad \ldots, \quad P^{\varrho_\nu}$$

die in den entsprechenden Elementartheilern von G_1 enthaltenen Potenzen von P, so sind nach dem vorher bewiesenen Satze die Potenzen P^{ϱ_i} durch die entsprechenden Potenzen P^{r_i} theilbar, aber, und das ist weit wichtiger, die ν Potenzen P^{ϱ_i} der zweiten Reihe sind *identisch* mit gewissen ν unter den n Potenzen P^r der ersten Reihe, es ist also

$$\varrho_1 = r_{h_1}, \quad \varrho_2 = r_{h_2}, \quad \ldots, \quad \varrho_\nu = r_{h_\nu},$$

wo $h_1, h_2, \ldots, h_\nu$ gewisse ν unter den n Zahlen $1, 2, \ldots, n$ bedeuten. Aus der Reihe der Elementartheiler

$$P^{r_1}, \quad P^{r_2}, \quad \ldots, \quad P^{r_n}$$

fallen also beim Uebergange von der enthaltenden zur enthaltenen Gattung nur gewisse fort, während die übrigen

$$P^{r_{h_1}}, P^{r_{h_2}}, \ldots, P^{r_{h_\nu}}$$

völlig ungeändert bleiben; ein Elementartheiler bleibt also bei jenem Uebergange entweder ganz ungeändert, oder geht vollständig verloren. Bildet man dagegen für die enthaltende und für die enthaltene Gattung die beiden Reihen der Determinantentheiler, so sind diese bezw.

$$P^{r_1}, \quad P^{r_1+r_2}, \quad \ldots, \quad P^{r_1+r_2+\cdots+r_\nu}, \quad \ldots, \quad P^{r_1+\cdots+r_n}$$

$$P^{r_{h_1}}, \quad P^{r_{h_1}+r_{h_2}}, \quad \ldots, \quad P^{r_{h_1}+r_{h_2}+\cdots+r_{h_\nu}}.$$

dieselben sind also im allgemeinen vollständig von einander verschieden, und ihre einzige Beziehung ist die, dass die Exponenten der zweiten Reihe gleich oder grösser sind als die entsprechenden Exponenten der ersten, eine Beziehung, die unmittelbar aus $r_i \leqq r_{h_i}$ geschlossen werden kann. Die Determinantentheiler sind also Invarianten der Gattung $\mathfrak{G}_1$ welche etwa auf einer Stufe stehen mit der Ordnung n derselben, denn diese verwandelt sich in einen Theiler von n, wenn man von $\mathfrak{G}_1$ zu G_1 übergeht, dagegen lehren die vorangegangenen Betrachtungen, dass die Elementartheiler viel wichtigere und wesentlichere Invarianten sind, und diese theoretischen Ueberlegungen haben in der That bereits in der Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen in dem Zusammenhange zwischen den Elementartheilern und den Verzweigungspunkten der zugehörigen *Riemann*schen Fläche, der für die Determinantentheiler nicht besteht, eine schöne Bestätigung gefunden*).

Der Beweis dieses Satzes soll hier für alle Primtheiler erster Stufe gegeben werden, welche bereits in der unmittelbar vorhergehenden Arbeit betrachtet wurden: Ist nämlich der Rationalitätsbereich I ein natürlicher, so soll P eine beliebige irreductible Function der in I auftretenden Variablen $\mathfrak{R}', \ldots, \mathfrak{R}^{(\nu)}$ sein; ist $I(\mathfrak{R}', \ldots, \mathfrak{R}^{(\nu)})$ ein algebraischer Gattungsbereich, so sei P ein algebraischer Primtheiler des Bereiches I von einer solchen irreductiblen Function von $\mathfrak{R}', \ldots, \mathfrak{R}^{(\nu)}$. Ferner seien

$$P^{r_1}, \quad P^{r_2}, \quad \ldots, \quad P^{r_n}$$

die in den n Elementartheilern von $\mathfrak{G}_1$ enthaltenen Potenzen von P, jetzt aber nicht mehr nach der Grösse ihrer Exponenten geordnet, sondern in ganz beliebiger Reihenfolge. Ich betrachte nun an Stelle des im ersten Abschnitte benutzten absoluten Fundamentalsystemes ein kanonisches Fundamentalsystem modulo P, d. h. ein System

$$y_1^{(1)}, \quad y_1^{(2)}, \quad \ldots, \quad y_1^{(n)}$$

von n modulo P unabhängigen ganzen algebraischen Grössen von $\mathfrak{G}_1$, welche der Reihe nach durch $P^{r_1}, P^{r_2}, \ldots, P^{r_n}$ algebraisch theilbar sind. Ein solches Fundamentalsystem ist dadurch vollständig charakterisirt, dass in

*) Vgl. meine Abhandlungen: Ueber die Ordnungen der Verzweigungspunkte einer *Riemann*schen Fläche. — Ueber die Verzweigung der drei- und vierblättrigen *Riemann*schen Flächen. — Sitzungsberichte der Berliner Akademie v. J. 1895 S. 933 ff. u. S. 1103 ff.

lieber umgekehrt die letzteren als die ursprünglichen Invarianten ansehen will.

Im Folgenden soll aber gezeigt werden, dass zwischen den Elementartheilern der enthaltenden und der enthaltenen Gattung eine noch weit engere Beziehung besteht, und zwar eine solche, welche für die Determinantentheiler nicht erfüllt ist; und hierdurch wird man genöthigt, die Elementartheiler als die wesentlichen, ursprünglichen, die Determinantentheiler erst als die abgeleiteten Invarianten anzusehen, im Gegensatz zu einer Bemerkung *Leopold Kroneckers*, welche sich in seinem Nachlasse vorgefunden hat.

Ist nämlich P irgend ein rationaler Primfactor und sind

$$P^{r_1},\ P^{r_2},\ \ldots,\ P^{r_n}$$

die in den Elementartheilern von $\mathfrak{G}_1$ und

$$P^{\varrho_1},\ P^{\varrho_2},\ \ldots,\ P^{\varrho_\nu}$$

die in den entsprechenden Elementartheilern von G_1 enthaltenen Potenzen von P, so sind nach dem vorher bewiesenen Satze die Potenzen P^{ϱ_i} durch die entsprechenden Potenzen P^{r_i} theilbar, aber, und das ist weit wichtiger, die ν Potenzen P^{ϱ_i} der zweiten Reihe sind *identisch* mit gewissen ν unter den n Potenzen P^r der ersten Reihe, es ist also

$$\varrho_1 = r_{h_1},\quad \varrho_2 = r_{h_2},\quad \ldots,\quad \varrho_\nu = r_{h_\nu},$$

wo $h_1, h_2, \ldots, h_\nu$ gewisse ν unter den n Zahlen $1, 2, \ldots, n$ bedeuten. Aus der Reihe der Elementartheiler

$$P^{r_1},\quad P^{r_2},\quad \ldots,\quad P^{r_n}$$

fallen also beim Uebergange von der enthaltenden zur enthaltenen Gattung nur gewisse fort, während die übrigen

$$P^{r_{h_1}},\ P^{r_{h_2}},\ \ldots,\ P^{r_{h_\nu}}$$

völlig ungeändert bleiben; ein Elementartheiler bleibt also bei jenem Uebergange entweder ganz ungeändert, oder geht vollständig verloren. Bildet man dagegen für die enthaltende und für die enthaltene Gattung die beiden Reihen der Determinantentheiler, so sind diese bezw.

$$P^{r_1},\quad P^{r_1+r_2},\quad \ldots,\quad P^{r_1+r_2+\cdots+r_\nu},\quad \ldots,\quad P^{r_1+\cdots+r_n}$$

$$P^{r_{h_1}},\quad P^{r_{h_1}+r_{h_2}},\quad \ldots,\quad P^{r_{h_1}+r_{h_2}+\cdots+r_{h_\nu}}.$$

dieselben sind also im allgemeinen vollständig von einander verschieden, und ihre einzige Beziehung ist die, dass die Exponenten der zweiten Reihe gleich oder grösser sind als die entsprechenden Exponenten der ersten, eine Beziehung, die unmittelbar aus $r_i \leqq r_{h_i}$ geschlossen werden kann. Die Determinantentheiler sind also Invarianten der Gattung $\mathfrak{G}_1$ welche etwa auf einer Stufe stehen mit der Ordnung n derselben, denn diese verwandelt sich in einen Theiler von n, wenn man von $\mathfrak{G}_1$ zu G_1 übergeht, dagegen lehren die vorangegangenen Betrachtungen, dass die Elementartheiler viel wichtigere und wesentlichere Invarianten sind, und diese theoretischen Ueberlegungen haben in der That bereits in der Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen in dem Zusammenhange zwischen den Elementartheilern und den Verzweigungspunkten der zugehörigen *Riemann*schen Fläche, der für die Determinantentheiler nicht besteht, eine schöne Bestätigung gefunden*).

Der Beweis dieses Satzes soll hier für alle Primtheiler erster Stufe gegeben werden, welche bereits in der unmittelbar vorhergehenden Arbeit betrachtet wurden: Ist nämlich der Rationalitätsbereich I ein natürlicher, so soll P eine beliebige irreductible Function der in I auftretenden Variablen $\mathfrak{R}', \ldots, \mathfrak{R}^{(\nu)}$ sein; ist $I'(\mathfrak{R}', \ldots, \mathfrak{R}^{(\nu)})$ ein algebraischer Gattungsbereich, so sei P ein algebraischer Primtheiler des Bereiches I von einer solchen irreductiblen Function von $\mathfrak{R}', \ldots, \mathfrak{R}^{(\nu)}$. Ferner seien

$$P^{r_1}, \quad P^{r_2}, \quad \ldots, \quad P^{r_n}$$

die in den n Elementartheilern von $\mathfrak{G}_1$ enthaltenen Potenzen von P, jetzt aber nicht mehr nach der Grösse ihrer Exponenten geordnet, sondern in ganz beliebiger Reihenfolge. Ich betrachte nun an Stelle des im ersten Abschnitte benutzten absoluten Fundamentalsystemes ein kanonisches Fundamentalsystem modulo P, d. h. ein System

$$y_1^{(1)}, \quad y_1^{(2)}, \quad \ldots, \quad y_1^{(n)}$$

von n modulo P unabhängigen ganzen algebraischen Grössen von $\mathfrak{G}_1$, welche der Reihe nach durch $P^{r_1}, P^{r_2}, \ldots, P^{r_n}$ algebraisch theilbar sind. Ein solches Fundamentalsystem ist dadurch vollständig charakterisirt, dass in

*) Vgl. meine Abhandlungen: Ueber die Ordnungen der Verzweigungspunkte einer *Riemann*schen Fläche. — Ueber die Verzweigung der drei- und vierblättrigen *Riemann*schen Flächen. — Sitzungsberichte der Berliner Akademie v. J. 1895 S. 933 ff. u. S. 1103 ff.

dem Systeme von n^2 Elementen

$$(y) = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \cdots & y_1^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

die Colonnentheiler mit den Elementartheilern $P^{r_1}, \ldots, P^{r_n}$ übereinstimmen, dass also das algebraische System

$$\left(\frac{y_k^{(i)}}{P^{r_i}}\right)$$

ein Einheitssystem modulo P ist.

Ersetzt man nun in dem Systeme (y) wie in dem vorigen Abschnitte die ν ersten Zeilen durch ihre Spuren, so bleibt das sich so ergebende äquivalente System $\binom{\eta}{y}$ ebenfalls ein kanonisches System, wie am Ende der vorigen Arbeit nachgewiesen wurde, und seine Colonnentheiler sind ebenfalls bezw. gleich $P^{r_1}, P^{r_2}, \ldots, P^{r_n}$; also ist auch das System

$$\left(\begin{matrix} \frac{\eta^{(i)}}{P^{r_i}} \\ \frac{y^{(i)}}{P^{r_i}} \end{matrix}\right), \tag{1.}$$

welches aus $\binom{\eta}{y}$ durch Division seiner Colonnen durch ihre Colonnentheiler P^{r_i} hervorgeht, ebenfalls ein Einheitssystem modulo P.

Betrachtet man jetzt wieder nur die aus den ν ersten Zeilen von $\binom{\eta}{y}$ bestehende Matrix:

$$(\eta_k^{(i)}) = \begin{pmatrix} \eta_1^{(1)}, & \cdots, & \eta_1^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_\nu^{(1)}, & \cdots, & \eta_\nu^{(n)} \end{pmatrix},$$

so kann dasselbe in einem erweiterten Sinne ebenfalls als ein kanonisches System mit den Colonnentheilern $P^{r_1}, \ldots, P^{r_n}$ bezeichnet werden; denn seine Colonnen sind offenbar bezw. durch $P^{r_1}, \ldots, P^{r_n}$ theilbar, und ferner zeigt man leicht, dass das System

$$\left(\frac{\eta_k^{(i)}}{P^{r_i}}\right), \tag{2.}$$

welches aus $(\eta_k^{(i)})$ durch Division seiner Colonnen durch die entsprechenden Theiler entsteht, ebenfalls ein Einheitssystem modulo P ist. In der That sind die Quadrate aller Determinanten νter Ordnung von $(\eta_k^{(i)})$ rational, also

sind alle Determinanten derselben Ordnung von $\left(\frac{\eta_k^{(i)}}{P^{r_i}}\right)$ ebenfalls ganze Grössen, welche durch rational gebrochene Potenzen von P genau theilbar sind. Wären nun *alle* jene Determinanten noch durch eine weitere Potenz von P theilbar, so wäre dieselbe Potenz auch in der Determinante (1.) enthalten, da diese aus dem *Laplace*schen Determinantensatze als homogene lineare Function jener Determinanten mit ganzen Coefficienten darstellbar ist. Also existirt in dem Systeme (2.) mindestens eine Determinante νter Ordnung, welche durch P garnicht mehr theilbar ist; es sei die Bezeichnung von vornherein so gewählt, dass diese Eigenschaft der ersten jener Determinanten zukommt. Dann ist das zu dieser gehörige System:

$$\eta_1^{(1)}, \quad \eta_1^{(2)}, \quad \ldots, \quad \eta_1^{(\nu)}$$

für die enthaltene Gattung G_1 ein kanonisches Fundamentalsystem und die Potenzen:

$$P^{r_1}, \quad P^{r_2}, \quad \ldots, \quad P^{r_\nu}$$

sind ihre Elementartheiler, soweit diese Potenzen von P sind; denn das System

$$\left(\frac{\eta_i^{(1)}}{P^{r_1}}, \quad \frac{\eta_i^{(2)}}{P^{r_2}}, \quad \ldots, \quad \frac{\eta_i^{(\nu)}}{P^{r_\nu}}\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

besteht aus lauter ganzen Grössen und ist in Bezug auf P nach dem Vorhergehenden ein Einheitssystem; also sind $P^{r_1}, \ldots, P^{r_\nu}$ die Elementartheiler des Systemes $(\eta_k^{(1)}, \ldots, \eta_k^{(\nu)})$ und da dieses echt gebrochene Potenzen von P sind, so ist jenes System in der That ein kanonisches Fundamentalsystem. Man erhält also den wichtigen Satz:

> Ist $(y_1^{(1)}, \ldots, y_1^{(n)})$ ein kanonisches Fundamentalsystem modulo P für eine beliebige Gattung $\mathfrak{G}_1$ und $(\eta_1^{(1)}, \ldots, \eta_1^{(n)})$ die Spur desselben für eine beliebige unter $\mathfrak{G}_1$ enthaltene Gattung G_1, so kann man aus jenem Systeme stets ν Elemente so auswählen, dass sie ein kanonisches Fundamentalsystem für G_1 bilden, und die Elementartheiler für G_1 sind dann identisch mit den ν entsprechenden Elementartheilern der enthaltenden Gattung.

Hiermit ist der im Anfange dieses Abschnittes aufgestellte Satz vollständig bewiesen.

Aber jene Beziehung zwischen den Elementartheilern der beiden Gattungen G_1 und $\mathfrak{G}_1$ ist eine noch engere, als sie in diesem Satze ausgesprochen wurde. In der That können die Exponenten $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ der Elementartheiler von $\mathfrak{G}_1$, wie in der vorigen Arbeit bewiesen wurde, stets

in Bruchsequenzen:

$$(3.) \qquad \left[\frac{1}{d_1}\right], \ \left[\frac{1}{d_2}\right], \ \ldots, \ \left[\frac{1}{d_s}\right]$$

angeordnet werden, und nach demselben Satze muss das Gleiche auch für die Exponenten $(r_1, r_2, \ldots, r_\nu)$ der Elementartheiler für die enthaltene Gattung G_1 gelten; es seien also:

$$(4.) \qquad \left[\frac{1}{\delta_1}\right], \ \left[\frac{1}{\delta_2}\right], \ \ldots, \ \left[\frac{1}{\delta_\sigma}\right]$$

die Sequenzen für diese Gattung. Da aber die ν echten Brüche $(r_1, \ldots, r_\nu)$ welche die Sequenzen (4.) bilden, gewisse von den n Brüchen $(r_1, \ldots, r_n)$ sind, aus denen die s Sequenzen (3.) bestehen, so lehrt der blosse Anblick jener beiden Reihen, dass die Nenner $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\sigma$ genaue Theiler von gewissen σ unter den Nennern $d_1, d_2, \ldots, d_s$ sein müssen. Es ergiebt sich also der Fundamentalsatz:

Sind:

$$\left[\frac{1}{d_1}\right], \ \left[\frac{1}{d_2}\right], \ \ldots, \ \left[\frac{1}{d_s}\right]$$

die sämmtlichen (gleichen oder verschiedenen) Sequenzen eines beliebigen Gattungsbereiches $\mathfrak{G}_1$ in Bezug auf irgend einen rationalen Primfactor P, sind ferner

$$\left[\frac{1}{\delta_1}\right], \ \left[\frac{1}{\delta_2}\right], \ \ldots, \ \left[\frac{1}{\delta_\sigma}\right]$$

die entsprechenden Sequenzen für einen beliebigen unter $\mathfrak{G}_1$ enthaltenen Bereich G_1, so ist jeder der Nenner δ_i ein Theiler eines der Nenner d_k, ferner ist das Product $\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_\sigma$ aller Nenner von G_1 ein Theiler des Productes $d_1 d_2 \ldots d_s$ aller Nenner von $\mathfrak{G}_1$ und endlich ist die Anzahl σ aller Sequenzen von G_1 höchstens gleich der Anzahl s der Sequenzen von $\mathfrak{G}_1$.

Die Discriminanten D und Δ der Gattungen $\mathfrak{G}_1$ und G_1 enthalten P bezw. in den Potenzen:

$$P^{(d_1-1)+\cdots+(d_s-1)} \quad \text{und} \quad P^{(\delta_1-1)+\cdots+(\delta_\sigma-1)},$$

und da allgemein d_i ein Vielfaches von δ_i ist, so folgt als ganz specielles Corollar der bekannte Satz:

Die Discriminante einer Gattung ist ein Vielfaches der Discriminante einer jeden unter ihr enthaltenen Gattung.

Eine zweite interessante Folgerung ergiebt sich unmittelbar aus diesem Satze: Sind s und σ die Anzahlen der zu P gehörigen Sequenzen von $\mathfrak{G}_1$ und G_1 so ist $\sigma \leqq s$ und es sind die Discriminanten jener Gattungen bezw. durch P^{n-s} und $P^{\nu-\sigma}$ theilbar. Soll nun P in der Gattungsdiscriminante von G_1 garnicht enthalten sein, so muss $\sigma = \nu$ also $\nu \leqq s$ sein, anderenfalls muss P in der Discriminante von G_1 nothwendig auftreten; man erhält also den Satz:

> Ist $\mathfrak{G}_1$ eine Gattung $n$ter Ordnung, deren Discriminante durch P^{n-s} theilbar ist, so ist die Discriminante einer jeden unter $\mathfrak{G}_1$ enthaltenen Gattung von höherer als der $s$ten Ordnung sicher ebenfalls durch P theilbar.

† Karl Weierstrass.

(Geb. 31. Oktober 1815, gest. 19. Februar 1897.)

Am 19. Februar dieses Jahres ist die mathematische Welt durch das Hinscheiden von *Karl Weierstrass* in tiefe Trauer versetzt worden.

Von seinem ersten Auftreten in der mathematischen Litteratur an bis in ein hohes Alter hinein hat *Weierstrass* die Wissenschaft nicht nur durch seine Entdeckungen bereichert, sondern auch durch sein Eingreifen in die Arbeiten der Zeitgenossen und durch seine Lehrtätigkeit an der hiesigen Universität, deren Zierde er über 40 Jahre gewesen, in einem solchen Maasse gefördert, dass eine Würdigung dieser reichen Wirksamkeit eine zu umfangreiche Aufgabe ist, um an dieser Stelle Platz zu finden.

Aber die Redaction dieses Journals hat die besondere Pflicht, hier das Andenken des grossen Mathematikers zu ehren. Unser Journal hatte das Glück, seine berühmtesten Arbeiten in seine Spalten aufnehmen zu können; und unter den Mitwirkenden ziert der Name *Weierstrass* unser Journal vom 53. bis zum 117. Bande, während die Bände 91 bis 103 ihn im Verein mit *Kronecker* als Redacteur bezeichnen durften.

Berlin, im März 1897.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Unter Mitwirkung des Herrn

Weierstrass

herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 117.

Heft I.

Ausgegeben den 6. October.

Berlin, 1896.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Verlag von **Louis Nebert** in Halle a. S.

Elliptische Funktionen.
Theorie und Geschichte.
Akademische Vorträge

von

Prof. Dr. A. Enneper.

2. Auflage.

Lex. 8°. br. 18 Mark.

Die Kegelschnitte
in rein projectiver Behandlung

von

Hofrat Prof. Dr. J. Thomae.

Mit Holzsch. u. 16 lithogr. Tafeln.

Lex. 8°. br. 6 Mark.

Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.

Durch **jede Buchhandlung** zu beziehen:

Die Geometrie der Lage.

Vorträge von Prof. Dr. **Th. Reye,** ord. Professor an der Universität Strassburg.

Abt. II (3. Aufl.). Mit 26 Textfiguren. Broch. 9 Mk., in Halbfranz gebunden 11 Mk.
Abt. III (neu). Broch. 6 Mk., in Halbfranz gebunden 8 Mk.

Bereits früher erschien:

Abt. I (3. Aufl.). Mit 92 Textfiguren. Broch. 7 Mk., in Halbfranz gebunden 9 Mk.

Aus einer Besprechung von Guido Hauck: „Unserem Verfasser gebührt das Verdienst, das System jenes grossen Geometers (Staudt) von seinen Einseitigkeiten befreit und dadurch nicht nur schmackhaft, sondern vor allem für die Weiterförderung der Wissenschaft nutzbar gemacht zu haben. Diese hat denn auch in den letzten Dezennien eine überaus fruchtbare Weiterentwickelung erfahren, an welcher der Verfasser durch seine bahnbrechenden Arbeiten in hervorragender Weise beteiligt war. Es sei dabei namentlich auf den Ausbau der Liniengeometrie hingewiesen.... Das auch bereits ins Französische und Italienische übersetzte Werk stellt in dieser seiner neuen Auflage das vollständigste Lehrbuch der neueren Geometrie dar."

Freie Perspektive (Centrale Projektion)
in ihrer Begründung und Anwendung

von Dr. **G. A. V. Peschka,** K. K. Reg.-Rat, ord. Prof. d. darst. Geom., Ritter usw.

Zweite vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage in 2 Bänden.

Bd. I. Mit 13 lithogr. Tafeln. Brosch. 14 Mk. In Halbfr. geb. 16 Mk.
Bd. II. Mit 30 Textfiguren u. 16 lithogr. Tafeln. Brosch. 14 Mk. In Halbfr. 16 Mk.

Die erste Auflage bereits besprach s. Z. (Zeitschrift für Mathematik u. Physik Bd. XIV Heft 1) Geh. Rat Prof. Schlömilch, Dresden, mit den Worten: Referent glaubt nicht zu irren, wenn er das vorliegende Werk für das beste neuere Lehrbuch der Perspektive erklärt.

Ueber die neue Auflage aber sagt die Zeitschr. f. mathemat. u. naturwissensch. Unterr.: „Die Darstellung ist ausserordentlich klar. Eine Fülle interessanter und elegant durchgeführter Aufgaben dient zur Durcharbeitung des Stoffes, wie zur Vertiefung der Theorie. Das Buch wird jedem Freunde geometrischer Forschung volle Befriedigung gewähren."

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin,
zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Jahrbuch
über die
Fortschritte der Mathematik
begründet
von
Carl Ohrtmann.
Im Verein mit anderen Mathematikern
und unter besonderer Mitwirkung der Herren
Felix Müller und **Albert Wangerin**
herausgegeben von
Emil Lampe.
Band XXV.
Jahrgang 1893 u. 94.
(In 3 Heften.)
Heft I: M. 21.—. Heft II: M. 11.—.

Allgemeine Mechanik
der Punkte und starren Systeme.
Ein Lehrbuch für Hochschulen
von
Dr. E. Budde.
Erster Band: Mechanik der Punkte und Punktsysteme. Preis: 10 Mk.
Zweiter Band (Schluss): Mechanische Summen u. starre Gebilde. Preis: 13 Mk.

Handbuch
der
Kugelfunctionen,
Theorie und Anwendungen,
von
Dr. **E. Heine,**
ordentlichem Professor der Mathematik an der vereinigten
Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg.
Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage.
Erster Band. Theorie.
Preis: M. 8.—.
Zweiter Band. Anwendungen.
Preis: M. 6.—.

Band 117. Heft I.
Inhaltsverzeichniss.

K. Fischer. Ueber kanonische Systeme algebraischer Functionen einer Veränderlichen, die einem Gattungsbereich dritter oder vierter Ordnung angehören. . . . . Seite 1

F. Schur. Ueber den *Pohlke*schen Satz. . . . . — 24

K. Hensel. Ueber die Darstellung der Integrale erster Gattung durch ein Fundamentalsystem. . . . . — 29

J. N. Hazzidakis. Biegung mit Erhaltung der Hauptkrümmungsradien. . — 42

E. Netto. Zur Theorie der Resultanten. (Nachtrag zu der Abhandlung aus Bd. 116 S. 33—49.) . . . . . — 57

A. Kneser. Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser linearer Differentialgleichungen bei grossen reellen Werthen des Arguments. (Zweiter Aufsatz.) . . . . . — 72

Sendungen von Beiträgen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich** unter der Adresse:

An die Redaction des Journals für die reine und angewandte Mathematik, Verlagsbuchhandlung von Georg Reimer. Berlin S.W., Anhaltstrasse 12.

GENERAL LIBRARY,
UNIV. OF MICH.
10 DEC 1896

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Unter Mitwirkung des Herrn

Weierstrass

herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 117.

Heft II.

Ausgegeben den 13. November.

Berlin,
S.W. Anhaltstrasse 12.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1896.

Jährlich circa 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 12.—.

Verlag von **Louis Nebert** in Halle a. S.

Elliptische Funktionen.
Theorie und Geschichte.
Akademische Vorträge

von

Prof. Dr. A. Enneper.

2. Auflage.

Lex. 8°. br. 18 Mark.

Die Kegelschnitte
in rein projectiver Behandlung
von

Hofrat Prof. Dr. J. Thomae.

Mit Holzsch. u. 16 lithogr. Tafeln.

Lex. 8°. br. 6 Mark.

Baumgärtner's Buchhandlung, Leipzig.

Durch **jede Buchhandlung** zu beziehen:

Die Geometrie der Lage.

Vorträge von Prof. Dr. **Th. Reye,** ord. Professor an der Universität Strassburg.

Abt. II (3. Aufl.). Mit 26 Textfiguren. Broch. 9 Mk., in Halbfranz gebunden 11 Mk.
Abt. III (neu). Broch. 6 Mk., in Halbfranz gebunden 8 Mk.

Bereits früher erschien:

Abt. I (3. Aufl.). Mit 92 Textfiguren. Broch. 7 Mk., in Halbfranz gebunden 9 Mk.

Aus einer Besprechung von Guido Hauck: „Unserem Verfasser gebührt das Verdienst, das System jenes grossen Geometers (Staudt) von seinen Einseitigkeiten befreit und dadurch nicht nur schmackhaft, sondern vor allem für die Weiterförderung der Wissenschaft nutzbar gemacht zu haben. Diese hat denn auch in den letzten Dezennien eine überaus fruchtbare Weiterentwickelung erfahren, an welcher der Verfasser durch seine bahnbrechenden Arbeiten in hervorragender Weise beteiligt war. Es sei dabei namentlich auf den Ausbau der Liniengeometrie hingewiesen.... Das auch bereits ins Französische und Italienische übersetzte Werk stellt in dieser seiner neuen Auflage das vollständigste Lehrbuch der neueren Geometrie dar."

Freie Perspektive (Centrale Projektion)
in ihrer Begründung und Anwendung
von Dr. **G. A. V. Peschka,** K. K. Reg.-Rat, ord. Prof. d. darst. Geom., Ritter usw.

Zweite vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage in 2 Bänden.

Bd. I. Mit 13 lithogr. Tafeln. Brosch. 14 Mk. In Halbfr. geb. 16 Mk.
Bd. II. Mit 30 Textfiguren u. 16 lithogr. Tafeln. Brosch. 14 Mk. In Halbfr. 16 Mk.

Die erste Auflage bereits besprach s. Z. (Zeitschrift für Mathematik u. Physik Bd. XIV Heft 1) Geh. Rat Prof. Schlömilch, Dresden, mit den Worten: Referent glaubt nicht zu irren, wenn er das vorliegende Werk für das beste neuere Lehrbuch der Perspektive erklärt.

Ueber die neue Auflage aber sagt die Zeitschr. f. mathemat. u. naturwissensch. Unterr.: „Die Darstellung ist ausserordentlich klar. Eine Fülle interessanter und elegant durchgeführter Aufgaben dient zur Durcharbeitung des Stoffes, wie zur Vertiefung der Theorie. Das Buch wird jedem Freunde geometrischer Forschung volle Befriedigung gewähren."

Gewandte Rechner, welche Uebung **im logarithmischen Rechnen** besitzen und **nach complicirten mathematischen Formeln flott zu arbeiten verstehen,** finden gut honorirte Beschäftigung eventl. spätere Anstellung in der **optischen Anstalt C. P. Goerz, Berlin**-Schöneberg. Hauptstr. 140.

Verlag von B. F. Voigt in Weimar.

Elementarbuch der

Differential- und Integralrechnung

mit zahlreichen Anwendungen aus der Analysis, Geometrie, Mechanik, Physik etc.

für höhere Lehranstalten und den Selbstunterricht bearbeitet von

Fr. Autenheimer,

gew. Direktor des zürcherischen Technikums zu Winterthur.

Vierte verbesserte Auflage.

Mit 157 Abbildungen.

Geh. 9 Mark.

Vorrätig in allen Buchhandlungen.

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin,

zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.
III. Band. 1892—93. Hrsg. von **W. Dyck** und **E. Lampe.**
Preis M. 16.—.

Enthaltend eine Chronik der Vereinigung für 1892—93, sowie einen ausführlichen Bericht über die Entwickelung der **Theorie der algebraischen Functionen** in älterer und neuerer Zeit von Dr. **A. Brill** in Tübingen und Dr. **M. Noether** in Erlangen, und einen Bericht über die Entwicklung und die Hauptaufgaben der **Theorie der einfachen Fachwerke** von Dr. **L. Henneberg.** Mit 2 Figurentafeln.

Handbuch
der
Kugelfunctionen,
Theorie und Anwendungen,
von
Dr. **E. Heine,**
ordentlichem Professor der Mathematik an der vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg.

Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage.

Erster Band. Theorie.
Preis: M. 8.—.

Zweiter Band. Anwendungen.
Preis: M. 6.—.

Band 117. Heft II.

Inhaltsverzeichniss.

A. Kneser. Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser linearer Differentialgleichungen bei grossen reellen Werthen des Arguments. (Zweiter Aufsatz.) (Fortsetzung aus Heft I.) . . . . . Seite 89

J. Horn. Ueber die Reihenentwickelung der Integrale eines Systems von Differentialgleichungen in der Umgebung gewisser singulärer Stellen. (Fortsetzung der Arbeit aus Band 116 S. 265—306.) . . . . . — 104

K. Hensel. Ueber die Reduction algebraischer Systeme auf die kanonische Form. . . . . — 129

G. Landsberg. Ueber das Fundamentalsystem und die Discriminante der Gattungen algebraischer Zahlen, welche aus Wurzelgrössen gebildet sind. — 140

L. Schlesinger. Zur Theorie der *Euler*schen Transformirten einer homogenen linearen Differentialgleichung der *Fuchs*schen Klasse. . . . . — 148

P. Günther. Zur Theorie der adjungirten Differentialgleichung. . . . . — 168

Druckfehler.

Heft I S. 80 Zeile 11 u. 12 v. u. lies G statt g.

Sendungen von Beiträgen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich** unter der Adresse:

An die Redaction des Journals für die reine und angewandte Mathematik, Verlagsbuchhandlung von Georg Reimer. Berlin S.W., Anhaltstrasse 12.

GENERAL LIBR
UNIV. OF M
1 MAR 18

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Unter Mitwirkung des Herrn

Weierstrass

herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 117.

Heft III.

Ausgegeben den 4. Februar.

Berlin,
S.W. Anhaltstrasse 12.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1897.

Jährlich circa 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 12.—.

Hierzu eine Beilage von H. Bechhold, Frankfurt am Main.

Verlag von **Louis Nebert** in Halle a/S.

Enneper, Prof. Dr. A., **Elliptische Funktionen. Theorie und Geschichte.** Akademische Vorträge. **Zweite Auflage.** Neu bearb. u. herausg. von Prof. Dr. **Felix Müller.** Lex. 8. geh. 18 Mark.

Thomae, Hofrat, Prof. Dr. J., **Die Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung.** gr. 8°. geh. 6 Mark.

Thomae, Hofrat, Prof. Dr. J., **Abriss e. Theorie d. Funktionen e. complexen Veränderlichen u. der Thetafunktionen. Dritte,** erheblich vermehrte **Auflage.** gr. 4. geh. 10 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale.** gr. 4. geh. 2 Mark 80 Pf.

Thomae, Prof. Dr. J., **Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhain'schen Funktionen gebraucht werden.** gr. 4. geh. 3 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Ueber eine specielle Klasse Abel'scher Funktionen.** 2 Teile. gr. 4. geh. 9 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Ueber eine Funktion, welche einer linearen Differential- u. Differenzen-Gleichung IV. Ordn. Genüge leistet.** gr. 4. geh. 1 Mark 50 Pf.

Repetitorium der analytischen Geometrie. gr. 8. geh. 1 Mark 20 Pf.

Hofmann, Dr. F., **Methodik der stetigen Deformation von zweiblättrigen Riemann'schen Flächen.** Ein Uebungsbuch für den geometrischen Teil der Funktionentheorie. gr. 8. geh. 2 Mark.

Rulf, Prof. W., **Elemente der projektivischen Geometrie.** gr. 8. geh. 2 Mark 50 Pf.

Beau, Dr. O., **Analytische Untersuchungen im Gebiete der trigonometrischen Reihen und der Fourier'schen Integrale. Zweite** verb. u. verm. **Auflage.** gr. 4. geh. 5 Mark 50 Pf.

Odstrčil, Prof. Dr. J., **Kurze Anleitung zum Rechnen mit den (Hamilton'schen) Quaternionen.** gr. 8. geh. 2 Mark 25 Pf.

Hochheim, Prof. Dr. A., **Kâfî fîl Hisâb** (Genügendes über Arithmetik) **des Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhî.** 3 Hefte. gr. 4. geh. 3 Mark 90 Pf.

Hochheim, Dr. A., **Ueber die Differentialcurven der Kegelschnitte.** gr. 8. geh. 3 Mark.

Hochheim, Dr. A., **Ueber Pole u. Polaren d. parabol. Curven III. Ordn.** gr. 4. geh. 1 Mark.

Langer, Dr. P., **Die Grundprobleme der Mechanik.** Eine kosmologische Skizze. gr. 8. geh. 1 Mark 80 Pf.

Frege, Dr. G., **Begriffsschrift.** Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. gr. 8. geh. 3 Mark.

Radicke, A., **Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen.** gr. 8. geh. 1 Mark 20 Pf.

Schobloch, Dr. J. A., **Ueber Beta- und Gammafunktionen.** gr. 4. geh. 60 Pf.

Dronke, Dr. A., **Einleitung in die höhere Algebra.** gr. 8. geh. 4 Mark 50 Pf.

Günther, Prof. Dr., **Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie.** gr. 8. geh. 12 Mark.

Günther, Prof. Dr., **Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen.** gr. 8. geh. 12 Mark.

Outre les renseignements pratiques qu'il contient chaque année, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1897 renferme des articles dus aux savants les plus illustres sur les Monnaies, la Statistique, la Géographie, la Minéralogie, etc., enfin les Notices suivantes: *Notice sur le mouvement propre du système solaire;* par M. F. Tisserand. — *Les rayons cathodiques et les rayons Röntgen;* par M. H. Poincaré. — *Les époques dans l'Histoire astronomique des planètes;* par M. J. Janssen. — *Notice sur la quatrième Réunion du Comité international pour l'exécution de la Carte photographique du Ciel;* par M. F. Tisserand. — *Notice sur les travaux de la Commission internationale des étoiles fondamentales;* par M. F. Tisserand. — *Discours prononcé aux funérailles de M. Hippolyte Fizeau;* par M. A. Cornu. — *Discours prononcès aux funérailles de M. Tisserand:* par MM. H. Poincaré, J. Janssen et M. Lœwy. — *Travaux au mont Blanc en* 1896; par M. J. Janssen. In-18 de v-918 pages, avec 2 Cartes magnétiques. (Paris, Gauthier-Villars et fils, 1 Fr. 50.)

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin,

zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.
III. Band. 1892—93. Hrsg. von **W. Dyck** und **E. Lampe.**
Preis M. 16.—.

Enthaltend eine Chronik der Vereinigung für 1892—93, sowie einen ausführlichen Bericht über die Entwickelung der **Theorie der algebraischen Functionen** in älterer und neuerer Zeit von Dr. **A. Brill** in Tübingen und Dr. **M. Noether** in Erlangen, und einen Bericht über die Entwicklung und die Hauptaufgaben der **Theorie der einfachen Fachwerke** von Dr. **L. Henneberg.** Mit 2 Figurentafeln.

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin,
zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Jahrbuch
über die
Fortschritte der Mathematik
begründet
von
Carl Ohrtmann.
Im Verein mit anderen Mathematikern
und unter besonderer Mitwirkung der Herren
Felix Müller und **Albert Wangerin**
herausgegeben von
Emil Lampe.
Band XXV.
Jahrgang 1893 u. 94.
(In 3 Heften.)
Heft I: M. 21.—. Heft II: M. 11.—.

Handbuch
der
Kugelfunctionen,
Theorie und Anwendungen,
von
Dr. **E. Heine,**
ordentlichem Professor der Mathematik an der vereinigten
Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg.
Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage.
Erster Band. Theorie.
Preis: M. 8.—.
Zweiter Band. Anwendungen.
Preis: M. 6.—.

Studien über die
Reduction der Potentialgleichung
auf
gewöhnliche Differentialgleichungen.
Ein Anhang zu Heine's Handbuch der Kugelfunctionen
von
Dr. Emil Haentzschel,
Oberlehrer an der III. Realschule zu Berlin.
Preis: M. 6.—.

Band 117. Heft III.

Inhaltsverzeichniss.

F. Mertens. Ueber Multiplication und Nichtverschwinden *Dirichlet*scher Reihen. . . . . Seite 169

L. W. Thomé. Ueber eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen auf lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. . . . — 185

F. Schottky. Ueber die Werthschwankungen der harmonischen Functionen zweier reellen Veränderlichen und der Functionen eines complexen Arguments. . . . . — 225

J. Horn. Ueber die Reihenentwickelung der Integrale eines Systems von Differentialgleichungen in der Umgebung gewisser singulärer Stellen. (Fortsetzung der Arbeit aus Band 117 S. 104—128.) . . . . . — 254

G. Kowalewski. Ueber eine Art von simultaner Darstellung bestimmter Integrale. . . . . — 267

Sendungen von Beiträgen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich** unter der Adresse:

An die Redaction des Journals für die reine und angewandte Mathematik, Verlagsbuchhandlung von Georg Reimer. Berlin S.W., Anhaltstrasse 12.

fol.

GENERAL LIBRARY
UNIV. OF MICH.
7 MAY 1897

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Unter Mitwirkung des Herrn

Weierstrass

herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 117.

Heft IV.

Ausgegeben den 14. April.

Berlin,
S.W. Anhaltstrasse 12.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1897.

Jährlich circa 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 12.—.

Verlag von **Louis Nebert** in Halle a/S.

Enneper, Prof. Dr. A., **Elliptische Funktionen. Theorie und Geschichte.** Akademische Vorträge. **Zweite Auflage.** Neu bearb. u. herausg. von Prof. Dr. **Felix Müller.** Lex. 8. geh. 18 Mark.

Thomae, Hofrat, Prof. Dr. J., **Die Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung.** gr. 8°. geh. 6 Mark.

Thomae, Hofrat, Prof. Dr. J., **Abriss e. Theorie d. Funktionen e. complexen Veränderlichen u. der Thetafunktionen. Dritte,** erheblich vermehrte **Auflage.** gr. 4. geh. 10 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale.** gr. 4. geh. 2 Mark 80 Pf.

Thomae, Prof. Dr. J., **Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhain'schen Funktionen gebraucht werden.** gr. 4. geh. 3 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Ueber eine specielle Klasse Abel'scher Funktionen.** 2 Teile. gr. 4. geh. 9 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Ueber eine Funktion, welche einer linearen Differential- u. Differenzen-Gleichung IV. Ordn. Genüge leistet.** gr. 4. geh. 1 Mark 50 Pf.

Repetitorium der analytischen Geometrie. gr. 8. geh. 1 Mark 20 Pf.

Hofmann, Dr. F., **Methodik der stetigen Deformation von zweiblättrigen Riemann'schen Flächen.** Ein Uebungsbuch für den geometrischen Teil der Funktionentheorie. gr. 8. geh. 2 Mark.

Rulf, Prof. W., **Elemente der projektivischen Geometrie.** gr. 8. geh. 2 Mark 50 Pf.

Beau, Dr. O., **Analytische Untersuchungen im Gebiete der trigonometrischen Reihen und der Fourier'schen Integrale. Zweite** verb. u. verm. **Auflage.** gr. 4. geh. 5 Mark 50 Pf.

Odstrčil, Prof. Dr. J., **Kurze Anleitung zum Rechnen mit den (Hamilton'schen) Quaternionen.** gr. 8. geh. 2 Mark 25 Pf.

Hochheim, Prof. Dr. A., **Kâfî fîl Hisâb** (Genügendes über Arithmetik) **des Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhî.** 3 Hefte. gr. 4. geh. 3 Mark 90 Pf.

Hochheim, Dr. A., **Ueber die Differentialcurven der Kegelschnitte.** gr. 8. geh. 3 Mark.

Hochheim, Dr. A., **Ueber Pole u. Polaren d. parabol. Curven III. Ordn.** gr. 4. geh. 1 Mark.

Langer, Dr. P., **Die Grundprobleme der Mechanik.** Eine kosmologische Skizze. gr. 8. geh. 1 Mark 80 Pf.

Frege, Dr. G., **Begriffsschrift.** Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. gr. 8. geh. 3 Mark.

Radicke, A., **Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen.** gr. 8. geh. 1 Mark 20 Pf.

Schobloch, Dr. J. A., **Ueber Beta- und Gammafunktionen.** gr. 4. geh. 60 Pf.

Dronke, Dr. A., **Einleitung in die höhere Algebra.** gr. 8. geh. 4 Mark 50 Pf.

Günther, Prof. Dr., **Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie.** gr. 8. geh. 12 Mark.

Günther, Prof. Dr., **Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen.** gr. 8. geh. 12 Mark.

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin,

zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.
III. Band. 1892—93. Hrsg. von **W. Dyck** und **E. Lampe.**
Preis M. 16.—.

Enthaltend eine Chronik der Vereinigung für 1892—93, sowie einen ausführlichen Bericht über die Entwickelung der **Theorie der algebraischen Functionen** in älterer und neuerer Zeit von Dr. **A. Brill** in Tübingen und Dr. **M. Noether** in Erlangen, und einen Bericht über die Entwicklung und die Hauptaufgaben der **Theorie der einfachen Fachwerke** von Dr. **L. Henneberg.** Mit 2 Figurentafeln.

Allgemeine Mechanik

der Punkte und starren Systeme.

Ein Lehrbuch für Hochschulen

von

Dr. E. Budde.

Erster Band: Mechanik der Punkte und Punktsysteme. Preis: 10 Mk.

Zweiter Band (Schluss): Mechanische Summen u. starre Gebilde. Preis: 13 Mk.

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin,
zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Jahrbuch
über die
Fortschritte der Mathematik
begründet
von
Carl Ohrtmann.

Im Verein mit anderen Mathematikern
und unter besonderer Mitwirkung der Herren
Felix Müller und **Albert Wangerin**
herausgegeben von
Emil Lampe.
Band XXV.
Jahrgang 1893 u. 94.
(In 3 Heften.)
Heft I: M. 21.—. Heft II: M. 11.—. Heft III: M. 19.—.

Handbuch
der
Kugelfunctionen,
Theorie und Anwendungen,
von
Dr. **E. Heine,**
ordentlichem Professor der Mathematik an der vereinigten
Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg.
Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage.
Erster Band. Theorie.
Preis: M. 8.—.
Zweiter Band. Anwendungen.
Preis: M. 6.—.

Studien über die
Reduction der Potentialgleichung
auf
gewöhnliche Differentialgleichungen.
Ein Anhang zu Heine's Handbuch der Kugelfunctionen
von
Dr. Emil Haentzschel,
Oberlehrer an der III. Realschule zu Berlin.
Preis: M. 6.—.

Band 117. Heft IV.
Inhaltsverzeichniss.

E. **Grünfeld.** Ueber die Beschaffenheit der Differentialgleichungen der *n* Adjungirten, die zu einer linearen Differentialgleichung *n*ter Ordnung gehören. . . . . Seite 273

P. **Jaerisch.** Theorie der Reflexion und Brechung transversaler Kugelwellen mit Anwendung auf die Reflexion und Brechung des Lichtes. . . . . — 291

K. **Hensel.** Ueber die Fundamentaltheiler algebraischer Gattungsbereiche. . — 333

— — Ueber die Elementartheiler zweier Gattungen, von denen die eine unter der anderen enthalten ist. . . . . — 346

Nachruf für *Karl Weierstrass*. . . . . — 357

Sendungen von Beiträgen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich** unter der Adresse:

An die Redaction des Journals für die reine und angewandte Mathematik, Verlagsbuchhandlung von Georg Reimer. Berlin S.W., Anhaltstrasse 12.